Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Elfter Band,

in 4 Heften.

Mit fünf Kupfertafeln.

Berlin, 1834.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des elften Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
1.	Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires. Par Mr. *Joseph Liouville* à Paris.	I.	1
4.	Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung. Von dem Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen. (Fortsetzung der Abhandlung No. 1., 10., 18. und 30. im vorigen Bande.	I.	33
12.	Fernere Fortsetzung dieser Abhandlung.	II.	142
27.	Fernere Fortsetzung dieser Abhandlung.	III.	277
31.	Beschlufs dieser Abhandlung.	IV.	311
6.	Aufstufungen der einfachen Functionen. Von dem Hrn. Prof. *Oettinger* zu Heidelberg.	I.	75
14.	Fortsetzung dieser Abhandlung.	II.	173
8.	Über die allgemeine Entwickelung der ganzen Potenzen des Bogens in Reihen, die nach den aufsteigenden Potenzen des Sinus fortschreiten. Vom Herrn Prof. *H. F. Scherk* in Halle.	II.	101
11.	Note sur une formule de Laplace. (Extrait d'une dissertation.) Par Mr. *Chr. Jürgensen* de Copenhague.	II.	136
13.	Note sur les différentielles partielles de la fonction $\frac{x}{x^2+y^2}$. Par Mr. *R. Lobatto* à la Haye.	II.	169
15.	Exemplum usus functionum iteratarum in theoria functionum integraliter transcendentium. Auct. *Hill,* prof. math. Lond. Goth.	II.	193
18.	Resolutio algebraica aequationis $x^{257}-1=0$. Auctore *A. Fischer* Regiomontano.	III.	201
20.	Analytisch-combinatorische Sätze. Vom Herrn Prof. *H. F. Scherk* in Halle.	III.	226
21.	Analysis aequationum aliquot, functiones duplicis argumenti (x, y) determinantium, videlicet I. $(x,(y,z)) = ((x,y),z)$, II. $(x,(y,z)) = (y,(y,z))$, III. $(x+y,z) = (x,(y,z))$. Auct. *Carolo Joh Ds. Hill* Lond. Goth.	III.	241
22.	De factoribus numerorum compositorum dignoscendis. Auct. *Carolo Joh. Ds. Hill* Lond. Goth.	III.	251
23.	De radice cubica celeriter extrahenda. Auct. *Carolo Joh. Ds. Hill* Lond. Goth.	III.	262
25.	Sur la valeur de 0^0.	III.	272
26.	Über die Taylorsche Reihe; nebst einer Anwendung auf die Zerlegung der algebraischen Brüche. Von Herrn Dr. *Schellbach* zu Berlin. . .	III.	274
28.	Demonstratio formulae $\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}\partial w = \frac{\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\partial x \cdot \int_0^\infty e^{-x}x^{b-1}\partial x}{\int_0^\infty e^{-x}x^{a+b-1}\partial x} = \frac{\Gamma a\,\Gamma b}{\Gamma(a+b)}$. Auct. Dr. *C. G. J. Jacobi,* prof. math. Regiom.	III.	307

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
30.	Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen. Von dem Herrn Prof. *J. L. Raabe* zu Zürich.	IV.	309
33.	Solution générale d'un problème d'analyse combinatoire. Par Mr. *Ramus*, lecteur en math. de l'université de Copenhague.	IV.	353
35.	Beitrag zur Theorie der Facultäten. Von Herrn Dr. *A. Müller*, Universitäts-Bibliothecar in Heidelberg.	IV.	361
36.	Recherches sur la sommation d'un certain nombre de fonctions transcendantes, dont les dérivées sont déterminées par des équations algébriques du troisième dégré. Par Mr. *Minding*, docteur ès sciences à Berlin.	IV.	373

2. Geometrie.

2.	Sur la somme des carrés de toutes les droites, qui à partir d'un point donné coupent sous un angle déterminé une courbe algébrique. Par *E. Ferd. A. Minding*.	I.	20
3.	Analytisch-geometrische Aphorismen. Von dem Herrn Professor *Plücker* zu Berlin.	I.	26
9.	Fortsetzung derselben.	II.	117
19.	Fernere Fortsetzung derselben.	III.	219
34.	Fernere Fortsetzung derselben.	IV.	356
5.	Beweis der Lehrsätze No. 40. und 41. im Anhange zum geometrischen Werke des Herrn Steiner. Vom Herrn *Leithold*, Zögling der Berliner Gewerbschule.	I.	67
8.	Über die allgemeine Entwickelung der ganzen Potenzen des Bogens in Reihen, die nach den aufsteigenden Potenzen des Sinus fortschreiten. Vom Herrn Prof. *H. F. Scherk* in Halle.	II.	101
10.	Beweis einiger auf der Kugel Statt findenden Sätze. In Folge der Bd. 9. S. 102. No. 13. und 14. d. J. stehenden Aufforderung, bearbeitet von *Gerwien*, Pr. Lieuten. im Königl. Preufs. 22sten Inf. Reg.	II.	130
16.	Theorie des parallèles.	II.	198
24.	Einige geometrische Sätze. Von dem Königl. Pr. Lieutenant Herrn *Gerwien* zu Berlin.	III.	264
39.	Die loxodromische Linie und ihr merkwürdiger Zusammenhang mit der sphärischen Kettenlinie. Von Hrn Prof. Dr. *C Gudermann* in Münster.	IV.	394
40.	Beweis des Lehrsatzes des Herrn Steiner (im 2ten Bande S. 192. No. 34. dieses Journals). Von Herrn *Th. Clausen* zu München. . .	IV.	399
41.	Beitrag zur Theorie der krummen Linien dritter Ordnung. Von Herrn *Th. Clausen* zu München	IV.	402

3. Mechanik.

7.	Einfacher Beweis des Gesetzes der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Von Herrn Dr. *A. Müller*, in Heidelberg.	I.	98
38.	Déplacement virtuel d'un système de points unis invariablement entre eux. Par Mr. *Pagani*, Prof. ord. à l'Université de Liège.	IV.	388

II. Angewandte Mathematik.

32.	Note sur la loi de la réfraction simple. Par Mr. *Pagani*, Prof. ord. à la faculté des sciences de l'Université de Liège.	IV.	351
37.	Sur la forme et le mouvement d'une bulle qui se meut à travers un liquide. Par le même auteur.	IV.	384

Aufgaben und Lehrsätze.

17.	Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen. .	II.	199
29.	Aufgaben.	III.	308

1.
Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires.

(Par Mr. *Joseph Liouville* à Paris.)

1.

Déjà dans un précédent mémoire, je me suis occupé très en détail des *fonctions complémentaires*, c'est-à-dire de ces quantités qu'il faut ajouter aux valeurs des différentielles à indices quelconques, pour les completter et les rendre aussi générales qu'elles peuvent l'être; et je suis parvenu à en déterminer la forme et la nature, en m'appuyant sur les propriétés singulières des fonctions exponentielles à exposants infiniment petits*). Je ne crois pas qu'on puisse élever d'objection solide contre l'analyse dont j'ai fait usage; ni qu'on doive espérer de découvrir dans la question présente un principe plus fécond ou plus approprié au sujet; mais comme la diversité des méthodes contribue beaucoup à éclaircir les points difficiles, et que le théorème des fonctions complémentaires est sans contredit le plus important que l'on rencontre dans le nouveau calcul, je pense faire plaisir à quelques lecteurs en y revenant encore, et en en déduisant la démonstration de considérations nouvelles, très différentes de celles qui m'ont guidé en premier lieu.

2.

La théorie des fonctions complémentaires est liée d'une manière inséparable à la théorie des fonctions dont les dérivées peuvent être prises égales à zéro et qui disparaissent en conséquence par les différenciations. Cette vérité est d'abord sensible dans le calcul ordinaire, car si l'on désigne par n un nombre entier >0, on sait que la fonction complémentaire ψ, relative à l'intégrale de l'ordre n ou à la dérivée de l'ordre $-n$, est de la forme:

$$\psi = B + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx^{n-1},$$

d'où l'on conclut en différenciant: $\frac{d^n\psi}{dx^n} = 0$. Ainsi la fonction complémentaire, relative à la dérivée de l'ordre $-n$, n'est autre chose que la fonc-

*) Voyez le XXIème cahier *du journal de l'Ecole polytechnique.*

tion ψ qui satisfait à l'équation:

$$\frac{d^n \psi}{dx^n} = 0,$$

ou celle qui s'évanouit après une différenciation de l'ordre n. Cette propriété des fonctions complémentaires n'est pas bornée au cas où le nombre n est entier positif, et n'est pas seulement un théorème qu'on doive vérifier *à posteriori*, ainsi que nous venons de le faire sur cet exemple: c'est une vérité primordiale presque évidente, qui s'applique à toutes les différentielles, quelque soit l'indice μ de différenciation.

Pour le montrer, supposons que μ soit une quantité quelconque, fractionnaire ou non, positive ou négative, réelle ou imaginaire; désignons par y une fonction de x, et par ψ la fonction complémentaire relative à l'indice μ, en sorte que si $\left(\frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right)$ représente une valeur particulière de $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$, la valeur générale puisse s'en déduire tout de suite en ajoutant le complément ψ. On aura d'après cela:

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \left(\frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right) + \psi.$$

Renversant actuellement les opérations qui ont été nécessaires pour différencier, c'est-à-dire intégrant par rapport au même indice μ, on devra retrouver y dans les deux membres de l'équation qui ont la même généralité: or le premier membre $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ redonne évidemment y, et le second $y + \int^\mu \psi dx^\mu$; et comme ces deux résultats doivent être égaux, on en conclut:

$$\int^\mu \psi dx^\mu = 0 \quad \text{ou:} \quad \frac{d^{-\mu}\psi}{dx^{-\mu}} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer et ce qui établit le théorème suivant: *La dérivée à indice μ d'une fonction de x a pour fonction complémentaire la quantité ψ dont la dérivée à indice $-\mu$ peut être prise égale à zéro.*

Pour déterminer généralement la forme des fonctions complémentaires, il suffit donc de chercher les fonctions que la différenciation peut faire disparaître, ou, ce qui revient au même, il suffit de chercher l'intégrale de l'équation:

$$\frac{d^\mu \psi}{dx^\mu} = 0,$$

μ étant une quantité donnée quelconque.

3.

Mais cette recherche doit être précédée de quelques préliminaires où nous présenterons d'une manière plus concise et plus élégante que

nous ne l'avons fait jusqu'ici, la formule qui sert à différencier à indices quelconques les puissances de x.

Soient n et μ deux fractions, à volonté positives ou négatives, réelles ou imaginaires. Il est évident que $\frac{1}{x^n}$ représentera une puissance quelconque de x, car nous n'excluons pas les valeurs entières de n. Cela posé, le problème préliminaire que nous devons résoudre consiste à calculer la dérivée:

$$\frac{d^\mu \frac{1}{x^n}}{dx^\mu}.$$

Si nous supposons d'abord que n et $n+\mu$ soient des nombres réels positifs, ou du moins des nombres imaginaires dont la partie réelle soit positive, la question dont je parle ne présente aucune difficulté. En effet on a, en supposant, pour fixer les idées, $x>0$:

$$\frac{1}{x^n} = \frac{\int_0^\infty e^{-\alpha x}.\alpha^{n-1}.d\alpha}{\Gamma(n)},$$

$\Gamma(n)$ étant, conformément à la notation de M. *Legendre*, l'intégrale eulérienne de seconde espéce:

$$\int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{n-1}.d\theta,$$

et on en conclut sans peine:

$$A. \qquad \frac{d^\mu \frac{1}{x^n}}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu \Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)x^{n+\mu}}.$$

Mais si l'un des deux nombres n, $n+\mu$ est <0, cette formule parait d'abord inadmissible à cause des quantités infinies qui s'y trouvent renfermées. Pour faire disparaître ces quantités infinies, nous avons eu recours ailleurs à des considérations assez délicates qui supposent le théorème des fonctions complémentaires. Comme notre objet présent est au contraire d'arriver à une démonstration nouvelle de ce théorème fondamental, en nous appuyant sur les propriétés de la différentielle $d^\mu \frac{1}{x^n}$, on voit que nous devons renverser l'ordre suivi dans notre premier mémoire, et donner, pour calculer cette différentielle, un moyen direct, indépendant de la notion des fonctions complémentaires. Or ce qui est très remarquable, c'est que non seulement la chose est possible, mais qu'elle est fort simple, en sorte qu'en suivant cette idée, nous avons découvert, pour ar-

river au but cherché, savoir à la valeur de $d^\mu \frac{1}{x^n}$, une route préférable à toute autre, même abstraction faite des motifs qui nous forcent à l'adopter ici. Le résultat auquel cette voie nous mène, et qui se déduirait également de nos recherches antérieures, consiste en ce que la formule (*A.*) est la formule générale pour la différenciation des puissances, en attachant à la lettre Γ une signification qui va être expliquée.

4.

Dans le XXIème cahier *du journal de l'Ecole polytechnique*, nous avons donné les moyens de calculer $d^\mu \frac{1}{x^n}$ dans tous les cas possibles; mais nous avons négligé d'avertir que la formule (*A.*) peut être regardée comme en renferment la solution générale, pourvu que l'on altère un peu le sens naturel du signe Γ, conformément aux remarques faites par M. *Legendre* *), lorsqu'il a considéré les expressions $\Gamma(n)$, en supposant n un nombre négatif.

Il parait nécessaire d'entrer dans quelques détails à ce sujet, afin de fixer bien nettement le sens précis que nous attacherons désormais au signe Γ.

D'après l'équation conventionnelle:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-\theta}\theta^{n-1}\,d\theta,$$

qui a servi à la définition de ces transcendantes, on voit que $\Gamma(n)$ est une quantité finie >0 tant que n est positif, et que:

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty e^{-\theta}\frac{d\theta}{\theta} = \infty.$$

Si l'on donnait actuellement à n des valeurs négatives, il est évident que les valeurs correspondantes de $\Gamma(n)$ seraient toutes infinies. Pour éviter cet inconvénient qui obligerait à renoncer à l'emploi des fonctions $\Gamma(n)$ pour des valeurs de $n<0$, on change la définition précédente, ou du moins on ne la conserve que pour $n>0$, et lorsque n est nul ou négatif, on calcule la valeur de $\Gamma(n)$ au moyen de l'équation générale:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} = \frac{\Gamma(n+2)}{n(n+1)} = \ldots,$$

que l'on établit tout de suite quand n est positif, et que l'on étend par une convention permise à des valeurs quelconques de n.

---

*) Dans ses *exercies de calcul intégral.*

Mais pour rendre plus sensibles à l'esprit ces conventions qui servent à définir les fonctions Γ, nous dirons que:

1°. Quand n est positif, on a:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{n-1}.d\theta.$$

Cette valeur ne peut jamais être ni nulle ni infinie.

2°. Quand n est zéro ou est compris entre 0 et -1, on a:

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{n}.d\theta.$$

Ainsi $\Gamma(0)=\infty$; mais pour toutes les valeurs de n comprises entre 0 et -1, $\Gamma(n)$ ne peut être ni zéro ni l'infini.

3°. Quand n est égal à -1 ou compris entre -1 et -2, on a:

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n(n+1)}\int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{n+1}.d\theta,$$

ce qui donne $\Gamma(n)=-\infty$ pour $n=-1$, et seulement pour $n=-1$: il n'y a d'ailleurs entre -1 et -2 aucune valeur de n telle que l'on ait $\Gamma(n)=0$.

4°. Quand n est égal à -2 ou est compris entre -2 et -3, on a:

$$\Gamma(n) = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{n+2}.d\theta,$$

valeur qui n'est jamais nulle, mais qui devient infinie pour $n=-2$.

Et ainsi de suite pour les autres valeurs de n.

Ce que nous venons de dire suffit pour établir d'une manière précise le sens du signe $\Gamma(n)$, lorsque n est un nombre réel: si n était imaginaire et $=p+q\sqrt{-1}$, nous avons à peine besoin d'ajouter que tout ce qui vient d'être expliqué relativement à n, devrait s'entendre, *mutatis mutandis*, de la partie réelle p, en sorte que:

1°. Si p est positif, on a:

$$\Gamma(p+q\sqrt{-1}) = \int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{p-1+q\sqrt{-1}}.d\theta,$$

expression qui n'est jamais infinie.

Il est bon d'observer ici, parceque cette remarque nous sera utile plus bas, qu'il n'y a pas de valeurs de p et de q qui puissent rendre nulle cette expression de $\Gamma(p+q\sqrt{-1})$; et en effet il est clair qu'on a:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}.\alpha^{p-1+q\sqrt{-1}}.d\alpha = \frac{\Gamma(p+q\sqrt{-1})}{x^{p+q\sqrt{-1}}},$$

quelle que soit l'indéterminée x supposée >0: donc on aurait pour ces mêmes valeurs de p et q l'équation:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}.\alpha^{p-1+q\sqrt{-1}}.d\alpha = 0,$$

et parceque x est quelconque, cette dernière ne pourrait subsister qu'autant que l'on aurait:

$$\alpha^{p-1+q\sqrt{-1}} = 0,$$

depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \infty$, ce qui est absurde.

2°. Si p est zéro, ou si p est compris entre 0 et -1, on a:

$$\Gamma(p+q\sqrt{-1}) = \frac{1}{p+q\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{p+q\sqrt{-1}}\,d\theta,$$

valeur qui ne peut jamais être ni nulle ni infinie, puisque q est différent de zéro.

3°. Si $p=-1$, ou est compris entre -1 et -2, on a cette valeur qui ne peut jamais être non plus ni nulle ni infinie:

$$\Gamma(p+q\sqrt{-1}) = \frac{1}{(p+q\sqrt{-1})(p+1+q\sqrt{-1})}\int_0^\infty e^{-\theta}.\theta^{p+1+q\sqrt{-1}}.d\theta,$$

et ainsi de suite.

De ces définitions on déduirait toutes les propriétés des fonctions Γ, mais cette recherche étant étrangère au sujet de notre mémoire, nous renverrons sur ce point à l'ouvrage de Mr. *Legendre*. Nous nous bornerons à en tirer cette conclusion importante que l'équation $\Gamma(n) = 0$ est impossible, et que toutes les racines de l'équation: $\frac{1}{\Gamma(n)} = 0$, sont $n=0$, $n=-1$, $n=-2$, ... c'est-à-dire zéro ou un nombre entier négatif, pourvu toutefois que ce nombre ne soit pas infini. C'est là un corollaire tellement simple de ce qu'on vient de lire qu'il serait superflu de nous y arrêter.

5.

Ce qui précède une fois entendu, je dis que la formule (*A.*) est vraie, quels que soient n et $n+\mu$, pourvu qu'on attribue au signe Γ la signification dont nous venons de convenir.

En effet cette formule est déjà démontrée pour les valeurs de n et $n+\mu$ plus grandes que zéro, et nous allons faire voir:

1°. Qu'elle est encore vraie lorsque $n+\mu$ devient negatif, n restant positif.

2°. Qu'elle subsiste également lorsque n devient négatif, quelque soit $n+\mu$.

En établissant ces deux propositions, j'aurai démontré que la formule (*A.*) est exacte dans tous les cas où l'on attribue à l'exposant n et

à l'indice μ des valeurs réelles: mais quand même ces nombres deviendraient de la forme $p+q\sqrt{-1}$, cela n'exigerait pas de considérations spéciales, puisqu'il suffirait de raisonner sur la partie réelle p de ces quantités, comme nous allons raisonner sur elles-mêmes, en les supposant réelles.

Le premier cas à examiner est celui où, n restant positif, $n+\mu$ devient négatif. Soit donc $n+\mu<0$ et, pour fixer les idées, >-1, c'est-à-dire soit $n+\mu$ compris entre 0 et -1: on aura $n+\mu+1>0$, et par conséquent:

$$\frac{d^{\mu+1}\frac{1}{x^n}}{dx^{\mu+1}}=\frac{(-1)^{\mu+1}\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n).x^{n+\mu+1}},$$

d'où l'on conclut en intégrant une fois:

$$\frac{d^{\mu}\frac{1}{x^n}}{dx^{\mu}}=\frac{(-1)^{\mu}\Gamma(n+\mu+1)}{(n+\mu)\Gamma(n)x^{n+m}}.$$

Mais d'après nos conventions:

$$\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{n+\mu}=\Gamma(n+\mu).$$

On a donc bien:

$$\frac{d^{\mu}\frac{1}{x^n}}{dx^{\mu}}=\frac{(-1)^{\mu}\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)x^{n+\mu}},$$

conformément à la formule (*A.*) et malgré la valeur négative de $n+\mu$.

Supposons ensuite que $n+\mu$ soit entre -1 et -2: donc $n+\mu+1$ sera entre 0 et -1, et d'après ce qui vient d'être prouvé, on aura:

$$\frac{d^{\mu+1}\frac{1}{x^n}}{dx^{\mu+1}}=\frac{(-1)^{\mu+1}\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n).x^{n+\mu+1}},$$

d'où l'on tirera, comme tout à l'heure, par l'intégration, une valeur de $d^{\mu}\frac{1}{x^n}$, conforme à celle que la formule (*A.*) fournirait.

On s'élevera de la même manière au cas où $n+\mu$ serait entre -2 et -3, ou entre -3 et -4.... et ainsi de suite; en sorte que la formule (*A.*) peut être considérée comme bien établie, quelque soit $n+\mu$, pourvu que n soit >0.

Maintenant si n devient négatif, supposons cet exposant renfermé entre les limites 0 et -1: donc $n+1$ sera entre 0 et 1, et l'on aura:

$$\frac{d^{\mu}\frac{1}{x^{n+1}}}{dx^{\mu}}=\frac{(-1)^{\mu}\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(n+1)x^{n+\mu+1}},$$

d'où l'on déduit, en intégrant une fois:

$$\frac{d^\mu \frac{1}{x^n}}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu n\,\Gamma(n+\mu+1)}{(n+\mu)\,\Gamma(n+1)\,.\,x^{n+\mu}},$$

et parceque, d'après nos conventions, on trouve:

$$\frac{n\,\Gamma(n+\mu+1)}{(n+\mu)\,\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)},$$

il nous viendra définitivement:

$$\frac{d^\mu \frac{1}{x^n}}{dx^\mu} = \frac{(-1)^\mu\,\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)\,x^{n+\mu}},$$

comme la formule (*A.*) le donnerait.

En continuant ainsi, il est évident qu'on prouvera l'exactitude de cette formule pour des valeurs de n comprises entre -1 et -2, ou entre -2 et -3, ..., c'est-à-dire pour des valeurs quelconques de n, ce qu'il fallait faire. Donc, en adoptant nos conventions relatives au signe Γ, les différentielles des puissances se trouvent par la formule générale (*A.*). Toutefois cette formule prend un numérateur infini et cesse de pouvoir être employée, lorsque $n+\mu=0$, ou lorsque $n+\mu$ est un nombre entier négatif $-r$, sans que la même chose ait lieu pour n, ce qui tient à ce que dans ce cas la dérivée dont on cherche la valeur, cesse d'être une fonction algébrique de x. Pour calculer $d^\mu \frac{1}{x^n}$, on observe alors que l'équation:

$$\frac{1}{x^n} = -\frac{1}{(-1)^n\,\Gamma(n)} \cdot \frac{d^{n-1}\frac{1}{x}}{dx^{n-1}},$$

qui est une conséquence rigoureuse de nos principes *), donne, quand on prend la dérivée à indice μ des deux membres, et qu'on fait en outre $n+\mu=-r$:

$$\frac{d^\mu \frac{1}{x^n}}{dx^\mu} = -\frac{1}{(-1)^n\,\Gamma(n)} \cdot \int^{r+1} \frac{dx^{r+1}}{x},$$

par où l'on voit que, dans le cas particulier où $n+\mu$ est égal à zéro ou à un nombre entier négatif, la valeur de $d^\mu \frac{1}{x^n}$ ne dépend que des intégrales ordinaires de $\frac{1}{x}$. Mais ce cas particulier, d'ailleurs très facile à

*) Pourvu que n ne soit ni zéro ni un entier négatif; mais si n et $n+\mu$ étaient tous deux nuls ou entiers négatifs, la formule (*A.*) ne serait plus en défaut.

traiter directement, n'empêche pas plus la formule (*A.*) d'être la formule générale propre à la question présente que la circonstance équivalente n'empêche la formule:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

d'être la formule générale pour l'intégration des puissances dans le calcul intégral ordinaire.

6.

Cette même formule (*A.*) qui donne les valeurs de $d^\mu \frac{1}{x^n}$ va nous faire connaître directement la forme des fonctions complémentaires; car nous avons dit que la recherche de ces fonctions dépend de la recherche des quantités dont la différentielle peut être prise égale à zéro, en sorte que toute la difficulté du problème est de trouver l'intégrale générale de l'équation:

$$\frac{d^\mu \psi}{dx^\mu} = 0,$$

ce à quoi la formule (*A.*) permet d'arriver.

Pour le faire voir, je commence par exclure le cas ou μ serait un nombre entier positif ou négatif, lequel est connu par les éléments: ainsi μ est une fraction réelle ou une quantité imaginaire. Cela posé, je développe la fonction ψ en une série de la forme $\Sigma \frac{A_n}{x^n}$, c'est-à-dire en série procédant suivant les puissances quelconques de x, et j'en conclus:

$$\frac{d^\mu \psi}{dx^\mu} = (-1)^\mu \Sigma \frac{A_n \Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n) x^{n+\mu}}.$$

Cette valeur devant être nulle quel que soit x, on en tire, en égalant à zéro les coefficients de chaque puissance de x, l'équation suivante:

$$\frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)} = 0,$$

à laquelle les exposants n doivent satisfaire, en sorte qu'elle servira à déterminer ces nombres. Mais comme on sait qu'il n'y a pas de valeur de n qui puisse rendre $\Gamma(n+\mu) = 0$, cette équation se réduit à:

$$\frac{1}{\Gamma(n)} = 0,$$

égalité satisfaite par les seules racines $n = 0$, $n = -1$, $n = -2$, $n = -3$, ... et en général $n =$ un nombre entier négatif quelconque, non infini. De plus, par hypothèse μ n'étant pas entier, il est clair que $n+\mu$ ne pourrait l'être que si n était une fraction. Donc les valeurs qui

rendent $\frac{1}{\Gamma(n)} = 0$, donnent pour $\Gamma(n+\mu)$ une valeur finie et satisfont à:

$$\frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)} = 0,$$

ce qui pourrait ne pas arriver si μ était un nombre entier *).

Ainsi, en excluant ce cas bien connu, on peut faire $n = 0$, $n = -1$, $n = -3$, ... $n = -m$, m désignant un nombre entier quelconque > 0; et il en résulte:

$$\psi = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m,$$

A_0, A_1, A_2, ... A_m étant des constantes arbitraires.

Donc les fonctions dont les différentielles à indices quelconques peuvent être prises égales à zéro sont les fonctions algébriques entières. Donc aussi les fonctions complémentaires de ces différentielles sont des fonctions algébriques entières, d'un degré indéterminé et à coefficients arbitraires: ce qui est précisément le théorème fondamental que nous avons établi ailleurs par le secours des fonctions exponentielles à exposants infiniment petits.

La méthode nouvelle dont nous venons de faire usage pour démontrer le même théorème est fondée sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances de la variable indépendante. Elle nous parait inférieure à celle de notre premier mémoire et pourrait donner lieu à quelques observations que nous supprimons pour abréger; elle est surtout moins directe et, si l'on peut s'exprimer ainsi, moins tirée des entrailles du sujet. Toutefois elle n'est pas à dédaigner. Le rapprochement des principes divers qui mènent à la même conclusion est surtout nécessaire quand il s'agit de questions primordiales.

---

*) Si μ était un nombre entier positif, le quotient qu'on obtiendrait en divisant $\Gamma(n+\mu)$ par $\Gamma(n)$, serait $n(n+1)\ldots(n+\mu-1)$; et en l'égalant à zéro, on trouverait $n = 0$, $n = -1 \ldots n = -(\mu-1)$: si au contraire μ était un nombre entier négatif $-r$, on ferait $n+\mu = k$, d'où $n = k-\mu = k+r$; le quotient de $\Gamma(n+\mu)$ par $\Gamma(n)$, c'est-à-dire le quotient de $\Gamma(k)$ par $\Gamma(k+r)$, serait une fraction ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le produit $K(K+1)\ldots(K+r-1)$, d'où il suit que ce quotient ne pourrait jamais être nul. Il est aisé de conclure de là que les dérivées à indices entiers positifs ont pour fonction complémentaire zéro, et que les dérivées à indices entiers négatifs, ou les intégrales ordinaires, ont pour fonction complémentaire une fonction algébrique entière, dont le degré est inférieur d'une unité à l'indice d'intégration; ainsi qu'on le sait par les éléments.

7.

La question de déterminer les fonctions complémentaires des différentielles à indices quelconques est une des plus difficiles de celles qu'il fallait résoudre pour établir les bases du nouveau calcul. La conclusion singulière à laquelle nous sommes arrivés dans nos premiers mémoires, conclusion que nous venons de confirmer, comme on l'a vu, par une analyse toute différente, n'est pas seulement une spéculation théorique élégante; c'est un principe dont on a besoin à chaque instant, et sans lequel il faudrait renoncer à faire usage des dérivées fractionnaires, puisque lui seul peut indiquer d'une manière précise l'étendue des résultats auxquels l'usage de ces dérivées conduit.

Pour fixer les idées, je vais choisir un exemple fort simple dans lequel il s'agit de déterminer une intégrale définie, à l'aide de la différenciation sous le signe $\int$ par rapport à un paramètre différent de la variable à laquelle l'intégration définie est relative. Je considère donc la formule connue:

$$1. \quad \int_0^\infty \frac{\cos ax \,.\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a},$$

dans laquelle a est un nombre positif quelconque.

Si l'on désigne par h une quantité arbitraire >0, on pourra dans les deux membres de (1.) changer a en $a+h$, en $a+2h$, en $a+3h$ .... sans que cette équation cesse d'être vraie. Soit donc μ un nombre réel pris à volonté: représentons pour un moment $\cos ax$ par $F(a)$, et $\frac{\pi}{2} e^{-a}$ par $f(a)$: et posons:

$$P_h = \frac{(-1)^\mu}{h^\mu}\left(F(a) - \frac{\mu}{1}F(a+h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}F(a+2h) - \ldots.\right),$$

$$Q_h = \frac{(-1)^\mu}{h^\mu}\left(f(a) - \frac{\mu}{1}f(a+h) + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}f(a+2h) - \ldots.\right).$$

Ces deux séries sont convergentes, et il est aisé de démontrer que:

$$\int_0^\infty \frac{P_h\, dx}{1+x^2} = Q_h.$$

Faisant actuellement $h=0$, et observant que pour cette valeur *) P_h et

---

*) Voyez *le journal de l'école polytechnique* XXIème cahier page 107. C'est par le secours des formules données à l'endroit cité, que l'on parvient à connaître quand la différenciation à indices quelconques sous le signe $\int$ est permise; car elle ne l'est pas toujours. L'exemple que nous venons de traiter suffit pour indiquer la marche à suivre dans les cas semblables, et il ne serait pas difficile d'établir par des raisonnements du même genre les règles générales que la matière comporte.

Q_h se réduisent à:

$$P_0 = \frac{d^\mu \cos ax}{da^\mu}, \qquad Q_0 = \frac{d^\mu\left(\frac{\pi}{2}e^{-a}\right)}{da^\mu},$$

il vient:

$$2. \quad \int_0 \frac{dx}{1+x^2}\cdot\frac{d^\mu \cos ax}{da^\mu} = \frac{\pi}{2}e^{-a}\cdot(-1)^\mu + \psi,$$

ψ étant une fonction complémentaire de la forme:

$$A + Ba + Ca^2 + \ldots + Ka^m.$$

L'équation (2.) n'est autre chose que l'équation (1.) dont on a différencié les deux membres par rapport au paramètre a. Maintenant comme le second membre de (1.) est une exponentielle à exposant négatif qui devient zéro pour $a = \infty$, on voit que $\cos ax$ doit être regardé comme la limite du produit:

$$e^{-na}\cdot\cos ax,$$

n étant une quantité infiniment petite >0. On aura d'après cela:

$$\frac{d^\mu \cos ax}{da^\mu} = (-1)^\mu\cdot x^\mu\cdot\cos\left(ax - \frac{\mu\pi}{2}\right).$$

Substituant cette valeur dans (2.), il vient une égalité de la forme:

$$3. \quad \int_0^\infty \frac{\cos\left(ax-\frac{\mu\pi}{2}\right)\cdot x^\mu\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a} + A + Ba + Ca^2 + \ldots + Ka^m.$$

Mais il reste à déterminer les constantes A, B, C, ... K, qui entrent dans l'équation (3.). A cet effet nous distinguerons plusieurs cas.

1°. Si μ est un nombre positif, on du moins si la valeur de μ, supposée négative, est telle que le quarré μ^2 soit <1, il est facile de s'assurer que l'intégrale:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(ax-\frac{\mu\pi}{2}\right)\cdot x^\mu\, dx}{1+x^2}$$

doit devenir zéro quand $a = \infty$; cas si l'on pose $ax = \theta$, on trouve:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(ax-\frac{\mu\pi}{2}\right)\cdot x^\mu\, dx}{1+x^2} = a^{1-\mu}\int_0^\infty \frac{\cos\left(\theta-\frac{\mu\pi}{2}\right)\cdot \theta^\mu\, d\theta}{a^2+\theta^2},$$

et le second membre de cette égalité devient évidemment zéro pour $a = \infty$, puisque l'on a $\mu > -1$ ou $1-\mu<2$. Donc il faut, dans cette hypothèse, poser $A=0$, $B=0$, $C=0$, ... $K=0$; et il reste:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(ax-\frac{\mu\pi}{2}\right)\cdot x^\mu\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a},$$

ce qui s'accorde avec une formule donnée par Mr. *Cauchy* dans ses *Exercices de mathématiques.*

2°. Si μ est une quantité négative égale à -1 ou comprise entre -1 et -2, l'intégrale:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(ax - \frac{\mu\pi}{2}\right) . x^\mu \, dx}{1+x^2}$$

devient infiniment grande avec a; mais en la divisant par a, il est clair que le quotient δ devient nul quand $a = \infty$. Or quand on divise par a les deux membres de l'équation (3.), elle prend la forme:

$$\delta = \frac{\pi e^{-a}}{2a} + \frac{A}{a} + B + Ca + \ldots + Ka^{m-1}.$$

Donc, puisque δ doit être zéro pour $a = \infty$, on a déjà:

$$B = 0, \quad C = 0, \quad \ldots, \quad K = 0,$$

et il reste simplement:

$$\delta = \frac{\pi e^{-a}}{2a} + \frac{A}{a},$$

ou:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(ax - \frac{\mu\pi}{2}\right) . x^\mu \, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a} + A.$$

Actuellement, pour déterminer A, qui reste encore inconnue, je pose $a = 0$, et je trouve:

$$A = -\frac{\pi}{2} + \int_0^\infty \frac{\cos\frac{\mu\pi}{2} . x^\mu \, dx}{1+x^2},$$

d'où je conclus:

$$\int_0^\infty \frac{\left[\cos\left(ax - \frac{\mu\pi}{2}\right) - \cos\frac{\mu\pi}{2}\right] . x^\mu \, dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}(e^{-a} - 1).$$

Si l'on supposait μ égal à -2 ou compris entre -2 et -3, en opérant d'une manière analogue, on déterminerait facilement les constantes $A, B, C, \ldots . K$, et il serait aisé de continuer ainsi pour toutes les autres valeurs de μ. Mais il est inutile de nous arrêter plus long-tems sur cet exemple: ce que nous venons de dire suffit pour faire comprendre, comment on doit tenir compte des fonctions complémentaires, quand on applique notre nouveau calcul à la théorie des intégrales définies.

8.

Le théorème des fonctions complémentaires fournit immédiatement l'intégrale de l'équation: $\frac{d^\mu \psi}{dx^\mu} = 0$, qui est la plus simple qu'on puisse se

proposer d'intégrer. La valeur la plus générale de ψ qui y satisfasse est de la forme:

$$\psi = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx^m.$$

Le nombre des constantes arbitraires que cette intégrale contient est indéterminé, ce qui établit une différence essentielle et bien remarquable entre les équations différentielles à indices fractionnaires et les équations différentielles ordinaires, puisque dans celles-ci l'intégrale complette ne peut contenir qu'un nombre de constantes égal à l'indice de différentiation le plus élevé qui s'y rencontre.

En combinant le théorème des fonctions complémentaires avec la formule générale qui sert à différencier les produits de deux facteurs, on parvient à trouver les intégrales complètes des équations différentielles à indices fractionnaires, quand elles sont linéaires et à coefficients constants avec un second membre variable quelconque. Et même quand les coefficients, au lieu d'être constants, sont des fractions algébriques rationnelles, on parvient toujours, si non à intégrer les équations proposées, du moins à faire dépendre leur intégration de celle d'un système déterminé et connu d'équations différentielles ordinaires. Mais il suffit d'énoncer ici ces propositions qui méritent qu'on s'en occupe à part et avec étendue.

9.

Dans nos premières recherches sur le calcul des différentielles à indices quelconques, nous en avons donné une définition complète et générale fondée sur ce que toute fonction de x peut être mise sous la forme $\Sigma A_m e^{mx}$. Mais les résultats, que nous avons obtenus dans ce mémoire montrent que l'on pourrait arriver à une définition des différentielles à indices quelconques, en partant du développement des fonctions en séries ordonnées suivant les puissances de la variable indépendante. Après ce que nous avons dit dans les pages qui précèdent, une telle définition s'offre d'elle-même. Soit y une fonction de x; développons cette fonction en une série de la forme:

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots.$$

que, pour abréger, nous représenterons par $\Sigma \frac{A_n}{x^n}$, de sorte que:

$$y = \Sigma \frac{A_n}{x^n}.$$

Donnant ensuite au signe Γ la signification adoptée au No. 4., formons la quantité:

$$(-1)^{\mu}\Sigma\frac{A_n\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)x^{n+\mu}},$$

et convenons d'appeler cette quantité dérivée de l'ordre μ et de la désigner par $\frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}}$. Il est évident que cette définition suffira pour établir la théorie des dérivées fractionnaires: le principe des fonctions complémentaires en sera une conséquence presque immédiate. Dans cette manière de procéder, la définition des différentielles à indices quelconques, donnée par nous dans nos premiers mémoires, deviendrait un véritable théorème qu'il faudrait démontrer, tandis que la formule:

$$(B.). \qquad \frac{d^{\mu}y}{dx^{\mu}} = (-1)^{\mu}\Sigma\frac{A_n\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)x^{n+\mu}}$$

serait considérée comme une définition. Nous avons cru devoir préférer la marche inverse et définir les dérivées à indices quelconques par le développement exponentiel, puis en déduire l'équation $(B.)$ comme une simple conséquence. Ce n'est point ici le lieu d'entrer dans le détail des raisons très nombreuses qui nous ont porté à préférer notre définition à celle que fournit l'équation $(B.)$; mais les personnes qui voudront approfondir l'étude des rapprochements que nous venons d'indiquer, verront que cette étude est loin d'être inutile.

10.

Maintenant il sera aisé d'apprécier convenablement le peu de mots qu'*Euler* a écrits sur le calcul des dérivées fractionnaires dans les *commentaires de Petersbourg* *). Ce grand géomètre ne s'est occupé de cette matière qu'une seule fois, et sans y attacher aucune importance: aussi nous semble-t-il, que ses raisonnements ont quelque chose de vague et d'incomplet. Il n'a point donné de définition générale, et la formule à laquelle il arrive ne convient pas même à une puissance quelconque de x. S'il était parvenu à trouver les dérivées à indices fractionnaires d'une puissance quelconque de x, sans doute il lui aurait été facile de passer de ce cas particulier au cas d'une fonction quelconque, puisque le développement en serie de la forme $\Sigma\frac{A_n}{x^n}$ lui aurait présenté

*) Commentarii Acad. Petrop. tom. V. — An. (1730—1731) — Pag. 55.

pour cela une route directe et naturelle. Ainsi la difficulté principale consistait à trouver une formule semblable à notre formule (*A.*) du No. 3., et fournissant la valeur de $d^\mu \frac{1}{x^n}$ pour toutes les valeurs possibles de l'exposant n et de l'indice μ. Mais il ne parait pas qu'*Euler* ait atteint ce but, et peut-être n'y pouvait-on réussir que par l'emploi des fonctions Γ, en attribuant à cette lettre la signification que nous avons fait connaître au No. 4. et que Mr. *Legendre* a imaginée le premier.

11.

Au reste voici l'article d'*Euler*, tel qu'il se trouve dans la collection académique citée tout à l'heure, à la fin d'un mémoire ayant pour titre: *De progressionibus transcendentibus, seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt.*

„§. 27. Coronidis loco adhuc aliquid, curiosum id quidem magis „quam utile, adjungam. Notum est per $d^n x$ intelligi differentiale ordinis „n ipsius x; et $d^n p$, si p denotet functionem quampiam ipsius x, pona„turque dx constans, esse homogeneum cum dx^n; semper autem, quando „n est numerus integer affirmativus, ratio quam habet $d^n p$ ad dx^n alge„braice potest exprimi, ut si $n = 2$ et $p = x^3$, erit $d^2(x^3)$ ad dx^2 ut $6x$ „ad 1. Quaeritur nunc si n sit numerus fractus, qualis tum futura sit ratio. „Difficultas in his casibus facile intelligitur, nam si n est numerus integer „affirmativus, d^n continuata differenciatione invenitur; talis autem via non „patet si n est numerus fractus. Sed tamen ope interpolationum, de qui„bus in hac dissertatione explicavi, rem expedire licet."

„§. 28. Sit invenienda ratio inter $d^n(z^e)$ et dz^n, posito dz con„stante, seu requiritur valor fractionis $\frac{d^n(z^e)}{dz^n}$. Videamus primo qui sint ejus „valores, si n est numerus integer, ut post modum generaliter illatio fieri „possit. Si $n = 1$, erit hujus valor $ez^{e-1} = \frac{1.2.3....e}{1.2.3....(e-1)} z^{e-1}$; hoc modo „exprimo ut facilius postea ea quae tradita sunt huc referantur; si $n = 2$, „erit valor $e(e-1)z^{e-2} = \frac{1.2.3....e}{1.2.3....(e-2)} z^{e-2}$; si $n = 3$, habebitur

$$„e(e-1)(e-2)z^{e-3} = \frac{1.2.3....e}{1.2.3....(e-3)} z^{e-3}.$$

„Hinc generaliter infero, quicquid sit n, fore semper

„$\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = \frac{1.2.3....e}{1.2.3....(e-n)} . z^{e-n}$. Est autem per §. 14. $1.2.3....e =$

„$\int dx(-lx)^e$ et $1.2.3....(e-n) = \int dx(-lx)^{e-n}$, quare habetur *):

$$\text{„}\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = z^{e-n}.\frac{\int dx(-lx)^e}{\int dx(-lx)^{e-n}},$$

„vel:

$$d^n(z^e) = z^{e-n}.dz^n.\frac{\int dx(-lx)^e}{\int dx(-lx)^{e-n}}.$$

„Ponitur hic dz constans, et $\int dx(-lx)^e$ ut et $\int dx(-lx)^{e-n}$ ita debent „integrari, ut supra praeceptum est, et tum ponere oportet $x = 1$."

„§. 29. Non necesse est, quomodo verum eliciatur, ostendere; ap-„parebit id ponendo loco n numerum integrum affirmativum quemcunque. „Quaeratur autem quid sit $d^{\frac{1}{2}}z$, si sit dz constans. Erit ergo $e = 1$ et „$n = \frac{1}{2}$: habebitur itaque:

$$\text{„}d^{\frac{1}{2}}z = \frac{\int dx(-lx)}{\int dx\sqrt{(-lx)}}\sqrt{(z\,dz)}.$$

„Est autem $\int dx(-lx) = 1$, et dicta area circuli A, cujus diameter est „1, erit $\int dx\sqrt{(-lx)} = \sqrt{A}$; unde $d^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{\left(\frac{z\,dz}{A}\right)}$. Proposita igitur sit „haec aequatio ad quampiam curvam: $y\,d^{\frac{1}{2}}z = z\sqrt{(dy)}$, ubi dz ponitur „constans, et quaeratur qualis ea sit curva. Cum sit $d^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{\left(\frac{z\,dz}{A}\right)}$, abibit „ea aequatio in hanc $y\sqrt{\left(\frac{z\,dz}{A}\right)} = z\sqrt{(dy)}$, quae quadrata dat $\frac{y^2\,dx}{A} = z\,dy$; „unde invenitur: $\frac{1}{A}lz = C - \frac{1}{y}$, vel $y\,lz = CA.y - A$, quae est aequa-„tio ad curvam quaesitam."

12.

Nous n'avons pas besoin de faire observer que nos idées sur le calcul des différentielles à indices quelconques diffèrent complètement de celles qu'*Euler* a exposées dans le passage qu'on vient de lire, soit qu'on adopte notre définition fondée sur le développement exponentiel des fonctions, soit que l'on fasse usage de la definition nouvelle indiquée au No. 9. laquelle est bien d'accord avec celle de nos premiers mémoires, puisqu'elle en est une conséquence. Ainsi, en supposant dz constant, *Euler* trouve:

$$d^{\frac{1}{2}}z = \sqrt{\left(\frac{z\,dz}{A}\right)},$$

*) *Euler* désigne par lx le logarithme népérien de x; et les limites des intégrales sont $x = 0$, $x = 1$.

et nous trouverions au contraire $d^{\frac{1}{2}}z = 0$, ou mieux $d^{\frac{1}{2}}z = \psi\, dz^{\frac{1}{2}}$, ψ étant une fonction complémentaire $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_m z^m$, dont il faut tenir compte quand on prend la différentielle à indice $\frac{1}{2}$ d'une fonction. La dissemblance de nos principes se manifeste mieux encore, lorsque l'on cherche à intégrer l'équation:

$$(\alpha.) \qquad y\, d^{\frac{1}{2}}z = z\sqrt{(dy)}.$$

D'abord cette équation cesserait en quelque sorte d'avoir un sens à nos yeux, si nous y regardions avec *Euler* dz comme constant. Prendre dz constant dans l'équation (α), c'est pour nous comme si l'on prenait dz constant dans l'équation:

$$y\, d^2 z = z\, dy^2.$$

Quand on adopte une variable z pour variable indépendante, la différentielle première dz de cette quantité peut seule entrer dans les calculs, parcequ'au fond ces calculs s'appliquent aux dérivées de certaines fonctions inconnues de z, dont on cherche la valeur, et parceque ces dérivées, telles que seraient $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dz^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2 y}{dz^2}$, ... dépendent du rapport des différentielles $d^{\frac{1}{2}}y$, $d^2 y$, ... aux puissances de la différentielle dz, et non pas du rapport de $d^{\frac{1}{2}}y$, $d^2 y$, ... aux différentielles $d^{\frac{1}{2}}z$, $d^2 z$, ... d'un ordre différent du premier.

Maintenant si dans l'équation $(\alpha.)$ on choisit y pour variable indépendante, ce qui rend dy constant; et si, en raisonnant toujours d'après notre définition des différentielles, on demande l'intégrale de cette équation $(\alpha.)$, il faudra employer, pour l'obtenir, des considérations tout à fait différentes de celles d'*Euler*. Après avoir mis $(\alpha.)$ sous la forme:

$$y\frac{d^{\frac{1}{2}}z}{dy^{\frac{1}{2}}} = z,$$

et avoir désigné par A une constante arbitraire, on fera voir d'abord que l'on y satisfait en posant:

$$z = A\left(1 - 2\sqrt{-1}\int_0^\infty e^{-\alpha^2 y}.e^{-2\alpha\sqrt{-1}}.d\alpha\right).$$

En effet on déduit de là:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}z}{dy^{\frac{1}{2}}} = 2A\int_0^\infty e^{-\alpha^2 y}.e^{-2\alpha\sqrt{-1}}.\alpha\, d\alpha,$$

ce qui, après une intégration par parties, donne:

$$y\frac{d^{\frac{1}{2}}z}{dy^{\frac{1}{2}}} = A\left(1 - 2\sqrt{-1}\int_0^\infty e^{-\alpha^2 y}.e^{-2\alpha\sqrt{-1}}.d\alpha\right) = z.$$

Mais on peut trouver une intégrale incomparablement plus générale que

celle là; car il est permis d'ajouter à la valeur précédente de z une fonction de la forme:

$$By + Cy^2 + \ldots + Ky^m,$$

m étant un nombre entier positif quelconque, et A, B, C, ... K des constantes prises à volonté. En effet si l'on pose:

$$z = By + Cy^2 + \ldots + Ky^m,$$

on voit que $\frac{d^k z}{dy^k}$ sera une fonction algébrique entière à coefficients arbitraires, laquelle étant multipliée par y pourra toujours être prise égale à z. Ainsi on satisfait à (α) en posant:

$$z = A\left(1 - 2\sqrt{-1}\int_0^\infty e^{-\alpha^2 y} . e^{-2\alpha\sqrt{-1}} . d\alpha\right) + By + Cy^2 + \ldots + Ky^m,$$

ce qui n'est point d'accord avec le résultat du No. 11.

2.

Sur la somme des carrés de toutes les droites, qui à partir d'une point donné coupent sous un angle déterminé une courbe algébrique.

(Par *E. Ferd. A. Minding.*)

Je commence par exposer les considérations, qui m'ont porté à entreprendre les recherches, dont je proposerai plus bas le résultat. Ordinairement on se contente, dans l'application des formules algébriques à la géométrie, à ne mettre dans une fonction donnée $f(x, y)$ des coordonnées x et y, que les valeurs de ces coordonnées qui réduisent à zéro la valeur de la fonction proposée, et qui par conséquent appartiennent aux points de la courbe déterminée par l'quation $f(x, y) = 0$. Mais il m'a paru important de savoir, si la fonction $f(u, v)$ conserverait encore un certain rapport géométrique avec la courbe déterminée par l'équation $f(x, y) = 0$, même dans le cas, que les coordonnées u et v ne fussent pas choisies de manière à satisfaire à l'équation $f(u, v) = 0$, ou ce qui revient au même, si le point déterminé par les coordonnées u et v, fût pris arbitrairement hors de la courbe. On trouve le rapport cherché, pour la droite et le cercle, à l'aide des considérations les plus élémentaires, et il sera établi dans l'article présent un théorème général sur les courbes algébriques, en vertu duquel il sera permis de conclure, que le rapport cherché existe encore, quoique d'une manière moins simple, pour les sections coniques. Mais en même tems on verra par le théorème mentionné, que le rapport ne paraît pas avoir lieu à l'égard de toutes les courbes algébriques en général, ou qu'il faudrait au moins, pour le trouver, envisager la question sous un point du vue plus avantageux que celui, que l'auteur de cette note a été en état de prendre.

Pour faire voir clairement ce que j'entends par le rapport géométrique qui fait l'objet de mes recherches, je traiterai d'abord la droite et le cercle.

Soit (Taf. I. Fig. 1.) C un point déterminé par les coordonnées $AB = u$, $BC = v$, qui font l'une avec l'autre l'angle $CBD = \alpha$.

Soit EG une droite qui coupe l'arc des abscisses au point F situé à la distance donnée $AF = a$ de l'origine A des coordonnées, et désignons par β l'angle GFD que la droite EG fait avec l'axe AD. Du point C abaissons une perpendiculaire $CP = p$ sur la droite EG, qui suffisamment prolongée coupera en K une droite BK parallèle à EG. Enfin menons BH perpendiculairement à EG.

L'aspect de la figure donne l'égalité:

$$CP = CK - BH,$$

qui, traduite en termes algébriques, devient:

$$p = v\sin(\alpha - \beta) - (u - a)\sin\beta.$$

Si l'on prend le point C sur la droite EG, la distance $CP = p$ du point C à la droite EG s'évanouit, et on trouve l'équation de cette droite:

$$v\sin(\alpha - \beta) - (u - a)\sin\beta = 0.$$

Imaginons une seconde droite, donc la distance du point C soit désignée par p'. A l'égard de cette droite on aura l'équation:

$$p' = v\sin(\alpha - \beta') - (u - a')\sin\beta'.$$

Maintenant si p. ex. on demande l'équation d'une droite, qui partage en raison donnée l'angle formé par les deux droites proposées, on doit regarder comme connu le rapport n des perpendiculaires p et p', et on trouvera l'équation cherchée par la seule soustraction des deux valeurs de p et p', après avoir multiplié par n la valeur de p'. C'est de cette manière qu'on est conduit à appliquer à la droite la méthode des coefficiens indéterminés, qui a été introduite dans l'analyse géométrique avec tant de succès, par quelques géomètres de nos tems. Qu'il me soit permis seulement de remarquer qu'il est bon dans l'application de l'analyse à la géométrie, de n'introduire dans le calcul des coefficiens, ou en général, des quantités quelconques, qu'en rendant compte, dès le premier pas, de leur signification géométrique.

Passons maintenant au cercle. Choisissons les coordonnées orthogonales; désignons par r le rayon, par a et b les coordonnées du centre, par t la longueur de la tangente menée à partir d'un point donné dont les coordonnées sont u et v, jusqu'au point de conctact.

Rien n'est plus facile que de vérifier l'équation:

$$(u - a)^2 + (v - b)^2 - r^2 = t^2.$$

En faisant $t = 0$, on parviendra à l'équation du cercle. Pour un autre

cercle on pourra poser une équation semblable: $(u-a')^2+(v-b')^2-r'^2=t'^2$, u et v étant toujours les coordonnées d'un même point.

Si l'on demande, à l'égard de ces deux cercles, la ligne des tangentes égales, il n'y a qu'à poser $t=t'$, ce qui donne, par la simple soustraction, l'équation de la droite qu'on a appelé la cordale de deux cercles. — Soit proposé, de trouver la ligne des tangentes proportionelles, c'est-à-dire telle que deux tangentes t et t' menées d'un point quelconque de cette ligne aux deux cercles proposés, soient entre elles dans le rapport constant de 1 à n. On remplacera t' par sa valeur nt, et on trouvera par l'élimination de t, l'équation suivante qui indique évidemment un cercle:

$$n^2(u-a)^2-(u-a')^2+n^2(v-b)^2-(v-b')^2=n^2r^2-r'^2,$$

ou bien:

$$\left(u-\frac{n^2a-a'}{n^2-1}\right)^2+\left(v-\frac{n^2b-b'}{n^2-1}\right)^2=\frac{n^2r^2-r'^2}{n^2-1}+\frac{n^2[(a-a')^2+(b-b')^2]}{(n^2-1)^2}.$$

Quoique bien éloigné de prétendre, que cette manière plus générale d'envisager les expressions analytiques de la droite et du cercle, puisse conduire à des résultats qu'on ne saurait obtenir par les méthodes généralement admises; j'avoue cependant qu'elle me paraît, sous le rapport de la fécondité, avoir des avantages marqués sur l'emploi bien moins étendu qu'on fait ordinairement de ces expressions, et qu'elle ne le cède guère, en simplicité, aux méthodes dont on se sert dans les élémens, pour parvenir aux équations de la droite et du cercle, bien que ces équations ne soient que des cas particuliers contenus dans les formules rapportées ci-dessus. Ces motifs me font croire, qu'il serait convenable d'introduire dans les élémens ces expressions comme formules fondamentales, et d'en tirer ensuite les équations ordinaires.

Le théorème général dont il a été question dans le commencement de cette note, peut être énoncé comme il suit:

Si à partir d'un point donné on mène à une courbe algébrique, également donnée, toutes les lignes droites, soit réelles soit imaginaires, qui coupent cette courbe sous un angle déterminé et constant; la somme des carrés de ces droites interceptées entre le point donné et les points d'intersection avec la dite courbe, sera une fonction algébrique et rationnelle des coordonnées du point donné et des coefficiens de l'équation de la courbe proposée.

Pour démontrer ce théorème, soit $f(x, y)$ une fonction rationnelle et entière des coordonnées orthogonales x et y, qui égalée à zéro, représente l'équation de la courbe proposée. On trouvera aisément l'équation d'une droite, qui passe par un point dont u et v représentent les coordonnées, et qui coupe la courbe sous un angle dont je suppose $= c$ la tangente. Cette équation sera, en écrivant f au lieu de $f(x, y)$:

$$(A.) \quad \left(\frac{df}{dy} + c\frac{df}{dx}\right)(y - v) + \left(\frac{df}{dx} - c\frac{df}{dy}\right)(x - u) = 0.$$

En éliminant y entre cette équation et celle de la courbe proposée ($f(x, y) = 0$), on aura une équation en x, dont les racines x', x'', x''', ... donnent les abscisses des points cherchés d'intersection. Il est clair qu'on pourra exprimer les ordonnées correspondantes y', y'', ... au moyen d'une fonction rationnelle en x.

On peut aussi employer, pour trouver ces ordonnées, l'équation algébrique en y, qui résultera de l'élimination de x entre l'équation ($A.$) et celle de la courbe.

Si l'on désigne par t' la longueur d'une quelconque des droites qui partent du point donné, prise jusqu'au point de son intersection avec la courbe, on aura:

$$t'^2 = (x' - u)^2 + (y' - v)^2.$$

Donc si l'on ajoute ensemble tous les carrés semblables, on en trouve la somme:

$$t'^2 + t''^2 + t'''^2 + \ldots = (x' - u)^2 + (x'' - u)^2 + (x''' - u)^2 + \ldots$$
$$+ (y' - v)^2 + (y'' - v)^2 + (y''' - v)^2 + \ldots$$

Cette somme se partage, comme on voit, en deux parties, l'une symmétrique par rapport à toutes les abscisses x', x'', ..., l'autre par rapport aux ordonnées y', y'', ... On peut donc à l'aide des équations algébriques en x et y, obtenues par l'élimination, exprimer rationnellement la première et la second partie, au moyen de deux seulement des coefficiens des dites équations.

C'est sous ce théorème que sont contenus les deux cas particuliers relatifs à la droite et au cercle, qu'on vient de traiter plus haut. On peut appliquer le théorème énoncé aux tangentes et aux normales des courbes algébriques; je me contenterai d'en faire l'application aux tangentes en général et notamment à celles des sections coniques.

Si l'on désigne par T', T'', T''', ... les tangentes menées d'un point donné à une courbe algébrique, on pourra exprimer la somme $T'^2 + T''^2 + T'''^2 + \ldots$. rationnellement en fonction des coordonnées u et v du point donné d'où partent les tangentes T', T'' ....

Pour trouver l'expression de la somme mentionnée, on éliminera y entre les deux équations:

$$(B.) \quad f(x, y) = 0 \text{ et } \frac{df}{dy}(y - v) + \frac{df}{dx}(x - u) = mf,$$

dont la dernière est identique avec celle qu'on obtient en supposant $c = 0$ dans l'équation $(A.)$, avec ce changement qu'on ait mis mf au lieu de zéro, ce qui réduit, comme on sait, l'équation au degré $m - 1$, le degré de f étant supposé égal à m. L'équation en x sera donc en général du degré $m.m-1$, et il en sera de même de l'équation en y.

Cela posé on trouvera sans difficulté l'expression rationnelle de la somme cherchée des carrés des tangentes, au moyen de deux seulement des coefficiens des équations algébriques en x et y.

Du théorème énoncé relatif aux tangentes je tire le corollaire suivant:

Si l'on prend le point du départ de toutes les tangentes sur la courbe même, il est possible, quoique ne pas nécessaire, que toutes les tangentes s'évanouissent. Dans ce cas l'expression générale de la somme des carrés des tangentes en fonction rationnelle des coordonnées u et v du point donné, aura un facteur qui égalé à zéro, réprésentera l'équation de la courbe algébrique proposée.

C'est à l'égard du cas mentionné dans ce corollaire, que je dis qu'il existe un rapport géométrique tel que je l'ai cherché, entre les valeurs de l'expression $f(u, v)$ et la courbe déterminée par l'équation algébrique $f(x, y) = 0$.

Afin que ce cas ait lieu, il est nécessaire que toutes les abscisses x', x'', ... des divers points de contact deviennent égales à l'abscisse u du point donné, si ce point est situé sur la courbe même, c'est-à-dire si l'on ajoute au système des équations marqués par B l'équation $f(u, v) = 0$. L'équation en x qui résulte de l'élimination de y entre les équations $(B.)$ se réduira par suite de cette hypothèse à la forme:

$$(x - u)^n = 0,$$

en désignant son degré par n. Il en sera de même de l'équation en y, qui se réduira à $(y - v)^n = 0$. Pour appliquer ces remarques aux

sections coniques, j'en suppose les équations réduites à la forme la plus simple.

Soit l'équation de la parabole $y^2 = 2px$. L'équation de sa tangente sera:

$$px + pu = yv.$$

L'élimination de y entre ces deux équations donne:

$$px^2 + 2(pu - v^2)x + pu^2 = 0,$$

et celle de x:

$$y^2 - 2vy + 2pu = 0.$$

Si l'on suppose $v^2 = 2pu$, ces équations se réduisent aux suivantes:

$$p(x-u)^2 = 0, \qquad (y-v)^2 = 0.$$

D'où il est permis de conclure, que le rapport cherché a lieu pour la parabole. Je trouve en effet:

$$\tfrac{1}{2}p^2(T^{1/3} + T^{1/2}) = (v^2 - 2pu)(2v^2 - 2pu + p^2).$$

En posant l'équation suivante pour l'ellipse ou pour l'hyperbole:

$$ax^2 + by^2 = 1,$$

je trouve:

$$\tfrac{1}{2}ab(au^2 + bv^2)^3(T^{1/3} + T^{1/2})$$
$$= (au^2 + bv^2 - 1)(ab(u^2 + v^2)(au^2 + bv^2 - 1) + a^2u^2 + b^2v^2).$$

Donc il est prouvé que le rapport cherché a lieu à l'égard de l'ellipse et de l'hyperbole.

Avant de terminer cet article, je remarque encore, qu'il ne sera pas difficile d'étendre, avec les modifications convenables, aux surfaces et aux courbes à double courbure, determinées par des équations algébriques, les resultats obtenus.

P. S. Il est vrai qu'il existe un rapport très simple, puisque la fonction $f(u, v)$ exprime une quantité proportionelle au produit des segmens d'une droite parallèle à l'axe et qui passe par le point donné; mais ayant d'abord autrement envisagé la question, l'auteur prie ses lecteurs, d'ajouter cette remarque à l'introduction de cet article et d'en modifier quelques expressions.

3.

Analytisch-geometrische Aphorismen.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 15. im 3ten Hefte und No. 24. im 4ten Hefte X. Bandes.)

(Von dem Herrn Professor *Plücker* zu Berlin.)

III.

Über die Anwendung allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten zum Beweise geometrischer Sätze.

Wir haben in dem Frühern diejenigen schon bekannten Sätze der Situations-Geometrie bewiesen, welche sich auf die Durchschnittspuncte irgend solcher sechs gerader Linien, von welchen drei durch einen gegebenen Punct gehen, und die drei übrigen durch einen andern, beziehen. Man wird leicht auf den Gedanken hingeführt, die analogen Sätze zu suchen, welche sich auf die Durchschnittspuncte irgend solcher sechs gerader Linien, von welchen vier durch einen gegebenen, und die beiden übrigen durch einen andern gegebenen Punct gehen, beziehen. Auf diesem Wege findet man folgenden Satz.

Wenn sechs gerade Linien gegeben sind, von welchen vier durch einen gegebenen Punct P und die beiden übrigen durch einen zweiten gegebenen Punct Q gehen, so schneiden sich diese geraden Linien aufserdem noch in acht Puncten. Diese acht Puncte lassen sich durch zwölf neue gerade Linien verbinden, und diese zwölf gerade Linien schneiden sich in zwei und vierzig neuen Puncten. Von diesen zwei und vierzig Puncten liegen sechs auf ein und derselben geraden Linie, die durch den Punct Q geht, zwölf dieser Puncte liegen zu vier auf drei und vier und zwanzig zu zwei auf zwölf geraden Linien, die alle durch den Punct P gehen.

Wir wollen die vier durch den Punct P gehenden geraden Linien durch die Buchstaben a, b, c, und d, die beiden durch den Punct Q gehenden durch g und h bezeichnen. (a, g) zum Beispiel stellt alsdann nach unserer gewöhnlichen Bezeichnungs-Art den Durchschnittspunct von a und g dar, (b, h) den Durchschnittspunct von b und h; ferner $(a, g; b, h)$ diejenige gerade Linie, welche die beiden Durchschnittspuncte (a, g) und (b, h) verbindet, und endlich $[(a, g; b, h), (d, g; c, h)]$ den Durchschnitts-

punct zweier solcher gerader Linien. Diesen letzten Punct können wir durch das abgekürzte Symbol $abdc$ bezeichnen, und dem analog alle solche Puncte, in deren vollständigen Symbolen g und h auf dieselbe Weise vorkommen. Durch Hinzufügung der letztgenannten beiden Buchstaben in den ihnen zugehörigen Stellen können wir hiernach jedes abgekürzte Symbol vervollständigen, so z. B. bedeutet das Symbol $abbc$ den Punct $[(a, g; b, h)\ (b, g; a, h)]$. Diefs vorausgesetzt, liegen

I. die Puncte
$$abba,\ acca,\ adda,\ bccb,\ bddb,\ cddc,$$
alle sechs auf einer durch Q gehenden geraden Linie;

II. die dreimal vier Puncte
$$\begin{array}{llll} abdc, & bacd, & adbc, & dacb; \\ abcd, & badc, & acbd, & cadb; \\ acdb, & cabd, & adcb, & dabc; \end{array}$$
auf drei durch P gehenden geraden Linien, und endlich

III. die zwölfmal zwei Puncte
$$\begin{array}{ll} baac & caab \\ baad & daab \\ caad & daac \\ abbc & cbba \\ abbd & dbba \\ cbbd & dbbc \\ accb & bcca \\ accd & dcca \\ bccd & dccb \\ addb & bdda \\ addc & cdda \\ bddc & bddb. \end{array}$$
auf zwölf ebenfalls durch P gehenden geraden Linien.

Man sieht sogleich, dafs jede der 12 geraden Linien, welche die 8 ursprünglichen Durchschnittspuncte verbinden, von 7 der übrigen in neuen Puncten geschnitten wird. Man erhält also für die Zahl aller solcher Durchschnittspuncte $\frac{7.12}{2} = 42$. Alle diese Puncte kommen in den vorstehenden Schemata vor.

Beweis. Die Gleichungen aller gerader Linien, welche in der vorliegenden Construction vorkommen, können wir durch Hülfe von vier unbestimmten Coefficienten μ, ν, ϱ und σ aus den symbolischen Gleichungen der beiden geraden Linien a und g und der geraden Linie PQ, welche die beiden gegebenen Puncte P und Q verbindet, herleiten. Die Glei-

chungen dieser drei geraden Linien seien:

$$a = 0, \quad g = 0, \quad m = 0,$$

und die Gleichungen der übrigen gegebenen geraden Linien:

$$b = 0, \quad c = 0, \quad d = 0, \quad h = 0.$$

Alsdann ist

$$\text{1.}\quad m + \mu a = b, \qquad \text{3.}\quad m + \varrho a = d,$$
$$\text{2.}\quad m + \nu a = c, \qquad \text{4.}\quad m + \sigma g = h,$$

und in diesen identischen Gleichungen sind die Bedingungen des Satzes vollständig ausgedrückt.

Der Beweis für den **ersten Theil** des obigen Satzes ist bereits schon durch allgemeine Symbole im ersten Paragraph dieser Aphorismen geführt worden. Wir erhalten so viele Durchschnittspuncte, die alle mit dem Puncte Q in gerader Linie liegen, als sich die 4 geraden Linien a, b, c und d zu zwei combiniren lassen, nemlich 6.

Wir wenden uns zum Beweise des **zweiten Theiles.** Zu diesem Ende wollen wir zuerst die Gleichung der geraden Linie $(a, g; b, h)$ entwickeln. Die beiden ersten Buchstaben dieses Symbols zeigen, dafs diese Gleichung folgende Form hat:

$$pa + qg = 0,$$

und die beiden letzten, dafs dieselbe Gleichung eine algebraische Folge aus den Gleichungen $\quad b = 0, \quad h = 0,$

sein mufs. Folglich erhalten wir die gesuchte Gleichung, wenn wir die Ausdrücke für b und h, (1.) und (4.), damit m verschwinde, von einander abziehen. Auf diese Weise kommt:

$$\text{5.}\quad \mu a - \sigma g = 0.$$

Die Gleichung für $(d, g; c, h)$ hat zugleich folgende beide Formen:

$$A.\quad (m + \varrho a) + pg = 0, \qquad q(m + \nu a) + r(m + \sigma g) = 0.$$

Um die ersten Theile dieser beiden Gleichungen durch Hülfe der unbestimmten Coefficienten p, q und r identisch zu machen, müssen wir:

$$q + r = 1, \quad q\nu = \varrho, \quad r\sigma = p,$$

setzen. Diese Gleichungen geben auf der Stelle

$$p = \frac{\sigma(\nu - \varrho)}{\nu},$$

und hiernach verwandelt sich die erste der beiden Gleichungen (*A.*) in

$$\text{6.}\quad \nu m + \nu\varrho a + \sigma(\nu - \varrho)g = 0.$$

Man erhält hiernach ferner die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche durch den Durchschnittspunct von (5.) und (6.), und zugleich

durch den Punct P geht, wenn man, um zu einer Gleichung von der Form:

$$pa + qm = 0$$

zu gelangen, zwischen den Gleichungen (5.) und (6.) g eliminirt. Auf diese Weise findet man sogleich:

$$7. \quad \nu m + (\nu(\mu+\varrho) - \mu\varrho)a = 0.$$

Diese letzte Gleichung bleibt identisch dieselbe, wenn wir μ und ϱ gegenseitig mit einander vertauschen. Dieser Vertauschung entspricht aber die gegenseitige Vertauschung der beiden geraden Linien b und d. Auf der geraden Linie (7.) liegt also nicht allein der Durchschnittspunct von (5.) und (6.) oder der Punct $abdc$, sondern auch der Punct $adbc$. Der zweite Punct ist hiernach aus dem ersten dadurch bestimmt, dafs die beiden mittlern Buchstaben ihrer (abgekürzten) Symbole ihre Stellen vertauschen. Den ersten dieser beiden Puncte können wir aber auch durch das Symbol $dcab$ bezeichnen und den zweiten durch $bcad$, was blofs darauf hinauskommt, diejenigen beiden geraden Linien, welche den jedesmaligen Durchschnittspunct bilden, in anderer Ordnung zu nehmen. Vertauschen wir also wiederum die mittlern Buchstaben in den letzten beiden Symbolen, so erhalten wir die Symbole zweier neuen Puncte, $dacb$ und $bacd$, welche ebenfalls auf der geraden Linie (7.) liegen. Die auf diese Weise bestimmten vier Puncte sind also:

$$abdc, \quad adbc, \quad dacb, \quad bacd,$$

und liegen, wie behauptet wurde, auf ein und derselben durch den Punct P gehenden geraden Linie.

Vertauschen wir einmal gegenseitig d und c, und das andere Mal b und c mit einander, so erhalten wir noch zweimal vier analoge Puncte, und für die Gleichungen der beiden diese Puncte enthaltenden geraden Linien ergiebt sich, indem man in (7.) einmal gegenseitig ϱ und ν, das andere Mal μ und ν mit einander vertauscht:

$$8. \quad \varrho m + (\varrho(\mu+\nu) - \mu\nu)a = 0, \qquad 9. \quad \mu m + (\mu(\varrho+\nu) - \varrho\nu)a = 0.$$

Da vier Elemente 24 verschiedene Permutationen bilden und jeder Punct sich auf doppelte Weise durch ein Symbol ausdrücken läfst, so entsprechen allen jenen Permutationen solche Puncte, wie wir eben betrachtet haben.

Es bleibt uns jetzt also nur noch übrig, den dritten Theil des vorliegenden Satzes zu beweisen. Für die gerade Linie $(a, g; b, h)$ haben wir oben schon die Gleichung:

$$5. \quad \mu a - \sigma g = 0$$

erhalten. Für $(c,g\,;a,h)$ erhalten wir jede von folgenden beiden Gleichungen

$$(m+\nu a)+qg=0, \qquad (m+\sigma g)+pa=0,$$

wenn wir die ersten Theile derselben durch Hülfe der beiden unbestimmten Coefficienten q und p identisch machen. Diefs giebt unmittelbar

$$q=\sigma, \qquad p=\nu,$$

und hiernach ist die Gleichung der in Rede stehenden geraden Linie:

$$10. \quad m+\nu a+\sigma g=0.$$

Wenn man in der vorstehenden Gleichung für σg aus (5.) μa schreibt, so ergiebt sich:

$$11. \quad m+(\mu+\nu)g=0.$$

Diese Gleichung stellt diejenige gerade Linie dar, welche durch den Durchschnitt von (10.) und (5.), d. h. durch den Punct $caab$ und zugleich durch den Punct P, den Durchschnitt von a und g, geht. Diese Gleichung bleibt unverändert, wenn man μ und ν, d. h. die geraden Linien b und c gegenseitig mit einander vertauscht. Man erhält also den neuen Punct $baac$, welcher ebenfalls auf der geraden Linie (11.) liegt.

Das eben Bewiesene erstreckt sich unmittelbar auf alle Combinationen aus den vier Elementen a, b, c und d, welche den vorstehenden analog gebildet sind, auf solche Symbole nemlich, in welchen in der Mitte derselbe Buchstabe zweimal vorkommt. Zu demselben Buchstaben in der Mitte können sich zwei der drei übrigen offenbar auf dreifache Weise gesellen, und zwar jedesmal zweifach, indem derselbe Buchstabe einmal vorn und das andere Mal hinten steht. Es giebt also $4.3=12$ Paare solcher Puncte, die im dritten Theile des vorliegenden Satzes zusammengestellt sind.

Aus dem in dem Vorstehenden vollständig bewiesenen Satze ergiebt sich sogleich nach dem Principe der Reciprocität der folgende neue Satz.

Wenn sechs Puncte gegeben sind, von welchen vier auf einer gegebenen geraden Linie P, und die beiden übrigen auf einer andern gegebenen geraden Linie Q liegen, so kann man diese sechs Puncte noch durch acht neue gerade Linien verbinden. Diese acht gerade Linien schneiden sich in zwölf neuen Puncten, und diese zwölf Puncte lassen sich paarweise durch zwei und vierzig neue gerade Linien verbinden. Von diesen zwei und vierzig geraden Linien schneiden sich sechs in ein und demselben Puncte der geraden Linie Q, zwölf derselben schneiden sich zu vier in drei und vier und zwanzig zu zwei in zwölf Puncten der geraden Linie P.

Da die eigentliche Absicht dieses Aufsatzes blofs darin besteht, die Methode der Symbole und unbestimmten Coefficienten in ein helleres Licht zu stellen und dadurch zugänglicher zu machen, so ergreife ich die neue Gelegenheit, die sich mir darbietet, und will den letzten Satz ebenfalls direct beweisen. Die detaillirte Aussage dieses Satzes können wir wie bei dem ersten Satze schematisiren, und brauchen zu diesem Ende nur Puncte an die Stelle von geraden Linien, Durchschnitte zweier gerader Linien an die Stelle von geraden Linien, welche durch zwei Puncte gehen und, umgekehrt, zu setzen. Hiernach ist der erste Theil des Satzes als nach dem ersten Paragraphen dieser Aphorismen schon bewiesen anzusehen. Was die beiden andern Theile betrifft, so ist die Schlufsweise aus den Symbolen gerade dieselbe, wie in dem ersten Satze, und es braucht also nur noch gezeigt zu werden, einmal, dafs die beiden geraden Linien: $[(a,g;b,h),(d,g;c,h)]$ und $[(a,g;d,h),(b,g;c,h)]$, oder: $abdc$ und $adbc$; und das andere Mal, dafs die beiden geraden Linien: $[(b,g;a,h),(a,g;c,h)]$ und $[(c,g;a,h),(a,g;b,h)]$, oder: $baac$ und $caab$, sich auf der geraden Linie P schneiden.

Wir können alle geraden Linien der vorstehenden Construction durch Gleichungen ausdrücken, wenn wir von den symbolischen Gleichungen einer derselben, etwa (a, g), und den beiden gegebenen geraden Linien auf der die vier Puncte a, b, c und d, und Q, auf der die beiden Puncte g und h liegen, ausgehen. Diese drei Gleichungen seien

$$a = 0, \qquad p = 0, \qquad q = 0.$$

Wir erhalten alsdann für die acht neuen die sechs gegebenen Puncte verbindenden geraden Linien folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} a = 0, & (a,g) & a+\sigma p = 0, & (a,h) \\ a+\mu q = 0, & (b,g) & a+\sigma p+\mu q = 0, & (b,h) \\ a+\nu q = 0, & (c,g) & a+\sigma p+\nu q = 0, & (c,h) \\ a+\varrho q = 0, & (d,g) & a+\sigma p+\varrho q = 0. & (d,h) \end{array}$$

Wenn wir die 4 Puncte a, b, c und d beliebig mit einander verwechseln, so behalten wir ganz dieselben 8 Gleichungen, nur in anderer Ordnung.

Für die gerade Linie $[(a,g;\ b,h),\ (d,g;\ c,h)]$ ergeben sich hiernach folgende Gleichungen:

$$ma+\sigma p+\mu q = 0, \qquad n(a+\varrho q)+a+\sigma p+\nu q = 0,$$

die durch Hülfe der beiden unbestimmten Coefficienten m und n identisch gemacht werden müssen. Hiernach kommt:

$m = 1 + n$, $\mu = n\varrho + \nu$, und somit ist $m = \frac{\varrho + \mu - \nu}{\varrho}$, wonach die gesuchte Gleichung für $abdc$ folgende wird:

1. $(\varrho + \mu - \nu)a + \varrho\sigma p + \varrho\mu q = 0.$

Um die Gleichung für $adbc$ zu erhalten, brauchen wir blofs b und d, und, dem entsprechend, in der letzten Gleichung μ und ϱ gegenseitig mit einander zu vertauschen. Auf diese Weise kömmt:

2. $(\varrho + \mu - \nu)a + \mu\sigma p + \varrho\mu q = 0.$

Wenn man die beiden Gleichungen (1.) und (2.) von einander abzieht, und den Factor von p im Resultate fortläfst, so kommt: $p = 0$, d. h., was zu beweisen war, dafs sich die beiden geraden Linien (1.) und (2.) auf der geraden Linie P schneiden.

Für die Gleichung von $[(b, g;\ a, h),\ (a, g;\ c, h)]$ oder $baac$ erhalten wir folgende Form:

$$a + \sigma p + m(a + \mu q) = 0, \qquad na + \sigma p + \nu q = 0,$$

die durch Hülfe der beiden unbestimmten Coefficienten m und n identisch gemacht werden müssen. Zu diesem Ende müssen wir

$1 + m = n$, $m\mu = \nu$ nehmen, wonach $n = \frac{\nu + \mu}{\mu}$

ist, und die letzte der obigen Gleichungen in folgende, vollkommen bestimmte übergeht:

3. $(\nu + \mu)a + \sigma\nu p + \nu\mu q = 0.$

Vertauscht man μ und ν und umgekehrt, so erhält man aus der vorstehenden Gleichung von $baac$ die nachstehende für $caab$:

4. $(\nu + \mu)a + \sigma\nu p + \nu\mu q = 0.$

Wenn man abzieht, erhält man aus (3.) und (4.), wie oben: $p = 0$, und die beiden bezüglichen geraden Linien schneiden sich also wiederum auf der gegebenen geraden Linie P.

Jeder Leser, welcher der Art, wie die verschiedenen Sätze der Geometrie unter einander verknüpft sind, — und hieraus schöpfen, was nicht oft genug wiederholt werden kann, die neuern Behandlungsweisen der Geometrie ihre glänzendsten Resultate — besondere Aufmerksamkeit geschenkt hat, wird mit Grund vermuthen, dafs es allgemeinere Sätze giebt, von welchen die vorstehenden Particularisationen sind. Es giebt wirklich solche Sätze. Es dürfen dieselben uns aber hier nicht beschäftigen. Gelegentlich werde ich auf dieselben zurückkommen.

Godesberg bei Bonn im August 1831.

4.

Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 1. im ersten, No. 10. im zweiten, No. 18. im dritten und No. 30. im vierten Hefte X. Bandes.)

(Von dem Herrn Dr. *Stern*, zu Göttingen.)

63.

Nach diesen Vorbereitungen wird es leichter sein, die Theorie der Summation der Kettenbrüche zu entwickeln. Die Summe eines Kettenbruchs kann entweder mittelbar gesucht werden, indem man den Kettenbruch auf einen anderen ins Unendliche fortlaufenden Ausdruck zurückführt, dessen Summe leichter gefunden werden kann, oder unmittelbar, indem man einen geschlossenen Ausdruck sucht, der den Werth des Kettenbruchs angiebt. Die ins Unendliche fortlaufenden Ausdrücke lassen sich aber auf drei Klassen zurückführen, deren Entstehung auf den arithmetischen Grundoperationen beruht. Die unendlichen Reihen sind ein fortgesetztes Addiren und Subtrahiren, die unendlichen Producte ein fortgesetztes Multipliciren, die Kettenbrüche ein fortgesetztes Dividiren. Alle anderen continuirlichen Ausdrücke müssen sich auf diese zurückführen lassen; die mittelbare Summation der Kettenbrüche wird sich daher darauf beschränken, dafs man diese entweder in unendliche Reihen oder in unendliche Producte verwandelt. Die Regeln zu dieser Verwandlung sind in den vorhergehenden Capiteln gegeben, und es wäre daher dieser Gegenstand als abgethan zu betrachten, wenn nicht noch einige Umstände zu berücksichtigen wären, deren Nichtbeachtung zu grofsen Irrthümern führen kann und geführt hat. Wird ein convergenter Kettenbruch nach §. 28. oder §. 50. in eine Reihe oder in ein unendliches Product verwandelt, so ist hier weiter keine Vorsicht nöthig, sondern sobald man im Stande ist, die Summe einer solchen Reihe oder eines solchen Products anzugeben, so wird diese mit Bestimmtheit auch als Werth des Kettenbruchs angesehen werden können. Die nach dieser Methode erhaltenen Reihen oder Producte sind nicht blofs im Ganzen dem Kettenbruche gleich, sondern es entspricht auch jeder Theil, jeder Näherungswerth derselben,

einem Theile, einem Näherungswerthe des Kettenbruchs. Anders aber verhält es sich mit den Methoden, die in §. 35. — 48. gezeigt wurden, und mit anderen diesen ähnlichen. Hier nemlich ist keinesweges die Reihe dem Kettenbruche auch theilweise gleich, sondern es wird blofs der Kettenbruch aus der Reihe, oder die Reihe aus dem Kettenbruche durch gewisse analytische Operationen entwickelt, so dafs sie gegenseitig nicht als Summe von einander, sondern vielmehr als erzeugende Function zu betrachten sind. Daher wird sich nach diesen Methoden nicht immer aus einem convergenten Kettenbruche eine convergente Reihe, und umgekehrt, ergeben, sondern der eine Ausdruck kann convergiren, während der ihm gleichgesetzte divergirt, ja der eine kann positiv sein, während der andere als negative Gröfse erscheint. Die Lösung dieses Widerspruchs liegt, wie in allen ähnlichen Fällen, darin, dafs man nie den bei der Entwickelung übrig bleibenden Rest unberücksichtigt lassen darf. Man hat daher Folgendes zu merken. Wird irgend eine Reihe S in einen Kettenbruch verwandelt, dessen allmählige Entwickelung durch

$$a+\frac{b_1}{a_1+R_1},\quad a+\frac{b_1}{a_1+\dfrac{b_2}{a_2+R_2}}\quad \text{u. s. w.}$$

angedeutet wird, so dafs R_1, R_2 u. s. w. den jedesmal bei der Entwickelung übrig bleibenden Rest bedeutet, und sind die Theilzähler b_1, b_2 u. s. w. sämmtlich positive Gröfsen (die Theilnenner werden immer stillschweigend positiv gedacht), so kommt es darauf an, ob auch die Reste sämmtlich positive Gröfsen sind, oder nicht. Im ersten Falle kann man den unendlichen Kettenbruch mit Sicherheit als Werth der Reihe betrachten: die Vernachläfsigung irgend eines Restes kann keinen weiteren Einfluſs auf das Resultat haben, als dafs dasselbe noch nicht ganz genau ist, je weiter man aber in der Entwickelung geht, desto näher wird der Kettenbruch, seiner Natur nach, dem Werthe der Reihe kommen, desto weniger wird also die Vernachlässigung des Restes schaden. Ist aber irgend ein Rest R_m negativ, so kommt es darauf an, ob er gröfser oder kleiner als a_m ist. Im letzten Falle ist a_m eben sowohl wie $a_m - R_m$ eine positive Gröfse, wenn man daher statt $a_m - R_m$ nur a_m in Rechnung bringt, so kann man sich zwar noch vom wahren Werthe sehr entfernen, aber man wird kein falsches Resultat erhalten, sondern es wird sich

$$F(a+b_1:a_1+\ldots.+b_m:a_m),$$

dem wahren Werthe der Reihe desto mehr nähern, je gröfser m ist; ist dagegen R_m gröfser wie a_m, also $a_m - R_m$ eine negative Gröfse, so würde man, wenn man nur a_m zur Berechnung anwenden wollte, statt einer negativen Gröfse eine positive nehmen, und man könnte als Resultat eine positive Gröfse erhalten, während der wahre Werth negativ ist. Jedoch wenn $b_m < a_m - R_m$ ist, so kann man noch immer den Kettenbruch zur Berechnung anwenden $\left(\text{weil alsdann } a_{m-1} + \frac{b_m}{a_m} \text{ eben sowohl eine positive Gröfse ist wie } a_{m-1} + \frac{b_m}{a_m - R_m}\right)$, oder allgemeiner, wenn

$$a_{m-1} > \frac{b_m}{a_m - R_m}$$

ist (ohne Rücksicht auf das Zeichen). Ähnlich verhält es sich mit den Kettenbrüchen, deren Theilzähler sämmtlich oder theilweise negativ sind. Soll der Bruch bestimmt convergiren, so mufs jeder negative Theilzähler b_m kleiner als a_m sein; gehört daher zu a_m ein positiver Rest R_m, so kann der Kettenbruch unbedenklich zur Berechnung des Werthes der Reihe angewandt werden; ist R_m negativ, aber $b_m < a_m - R_m$ und zugleich $R_m < a_m$, so kann der Kettenbruch noch immer gebraucht werden; ist aber b_m nicht $< a_m - R_m$, so kann der Werth der Reihe S nicht mehr aus dem des Kettenbruchs abgeleitet werden. Es könnte sein, dafs die Reihe divergirte, während der Kettenbruch convergirt, und wenn $R_m > a_m$ ist, so würde man statt der positiven Gröfse $-\frac{b_m}{a_m - R_m}$ die negative $-\frac{b_m}{a_m}$ genommen, und also das Resultat vom Positiven zum Negativen geändert haben.

Zuweilen erscheint die bei der Entwickelung des Kettenbruchs vernachlässigte Gröfse auch in Form eines Factors, und dies ist immer der Fall, wenn der Kettenbruch nach §. 48. entwickelt wird. Sind alsdann die Theilzähler positiv, und ist der vernachlässigte Factor P ebenfalls positiv, so kann man ohne Bedenken den unendlichen Kettenbruch als Werth der entsprechenden Reihe ansehen. Denn der Ausdruck $a_{m-1} + \frac{b_m}{a_m}$ ist eben sowohl eine positive Gröfse wie $a_{m-1} + \frac{b_m}{a_m . P}$; die Vernachlässigung von P kann also nur bewirken, dafs der Kettenbruch den gesuchten Werth nicht ganz genau giebt; je weiter man aber in der Entwickelung fortgeht, desto mehr wird man sich dem wahren Werthe nähern; ist dagegen der Factor P negativ, so kann man ihn nur dann mit

Sicherheit vernachlässigen, wenn $a_{m-1} > \frac{b_m}{a_m . P}$ ist. Sind dagegen die Theilzähler negativ, so mufs, wenn der Kettenbruch bestimmt convergiren soll, b_m kleiner als a_m sein; es wird daher immer erlaubt sein, statt $a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m . P}$ näherungsweise den Werth $a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m}$ zu setzen, wenn P gröfser als die Einheit ist. Ist dagegen P ein ächter positiver Bruch, so mufs $a_m . P > b_m$ sein, sonst könnte $a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m . P}$ negativ sein, während $a_{m-1} - \frac{b_m}{a_m}$ positiv ist; ist endlich P negativ, so kann dieser Factor in jedem Falle vernachlässigt werden. Man wird diese Bemerkungen mit den vorhergehenden zusammenstimmend finden, wenn man bedenkt, dafs aus

$$a_m \pm R_m = a_m . P$$
$$\pm R_m = (P-1)\, a_m$$

folgt.

Es wurde früher der Ausdruck $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = {}_{1-\alpha}^{m}F[x + x^2 : (2m+1)]$ gefunden. Um nun zu untersuchen, ob der unendliche Kettenbruch für jeden Werth von x den Werth von $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ angiebt, entwickele man ihn nach §. 48. Man hat mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnung:

$$e^x - e^{-x} = 2x\varphi\left(R, R', \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right), \quad e^x + e^{-x} = 2\varphi\left(R, R', \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right),$$

wo R, R' unendlich grofse Zahlen sind. Die Ausdrücke

$$\varphi\left(R, R', \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right), \quad \varphi\left(R, R', \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)$$

sind für jeden Werth von x positiv; eben so werden auch die Ausdrücke

$$\varphi\left(R, R', \frac{5}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right), \quad \varphi\left(R, R', \frac{7}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)$$

u. s. w. immer positiv sein. Entwickelt man nun $\frac{\varphi\left(R, R', \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}{\varphi\left(R, R', \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}$ nach Formel (2.) des §. 48., so hat man

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{\cfrac{3\varphi\left(R, R', \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}{\varphi\left(R, R', \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}}}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{\cfrac{5\varphi\left(R, R', \frac{5}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}{\varphi\left(R, R', \frac{7}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}}}}} \quad \text{etc.}$$

Da aber $\dfrac{\varphi\left(R, R', \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}{\varphi\left(R, R', \frac{5}{2}, \frac{x^2}{4RR'}\right)}$ und jeder der folgenden ähnlichen Ausdrücke einen positiven Werth hat, so kann man, wenn der Kettenbruch ins Unendliche fortgesetzt wird, von dem vernachlässigten Factor ganz abstrahiren, und es ist daher, für jeden Werth von x,

$_{1-\infty}^{m}F(x:1+x^2:(2m+1))$ der wahre Werth des Ausdrucks $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

Schwerer würde es sein, direct zu beweisen, dafs

$$_{1-\infty}^{m}F(x:1-x^2:(2m+1))$$

für alle Werthe von x, den wahren Werth von $\text{tang}x$ angiebt, und der Rest vernachlässigt werden kann; auf indirectem Wege kann es leicht geschehen. Denn dieser Kettenbruch convergirt für jeden Werth von x in ganzen (oder rationalen) Zahlen (§. 58.), und daher auch für jeden irrationalen Werth von x. Man kann nemlich auf ähnliche Weise wie in §. 55. beweisen, dafs der Kettenbruch $F(a-b_1:a_1-b_2:a_2\ldots.)$ auch für irrationale Werthe von b_1, b_2, ... convergiren wird, sobald nur allgemein $b_m \lessgtr a_m - 1$ ist, woraus das Übrige von selbst folgt. Setzt man für x irgend einen zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ enthaltenen Werth, wo π die halbe Peripherie für den Halbmesser 1 bedeutet, so ist x, und daher auch x^2 kleiner als die Einheit, folglich auch $\dfrac{x^2}{3-\frac{x^2}{5}\text{ etc.}}$ kleiner als die Einheit, und $\dfrac{x^2}{1-\frac{x^2}{3-\frac{x^2}{5}\text{ etc.}}}$ eine positive Gröfse. Nun ist die Tangente zwischen diesen Gränzen immer positiv. Die Vernachlässigung des Restes kann also nur bewirken, dafs das Resultat nicht ganz genau ist; je mehr Glieder des convergirenden Kettenbruchs man aber zur Berechnung anwendet, desto näher wird man dem wahren Werthe kommen, und der unendliche Kettenbruch kann unbedenklich als Ausdruck desselben angesehen werden. Aus den Werthen der Tangenten zwischen den Grenzen $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, können aber, wie bekannt, alle übrigen Tangenten abgeleitet werden; es möge nur noch der Fall, wenn $x=\frac{\pi}{2}$ ist, besonders betrachtet werden. Man hat

alsdann $\tang x = \infty$; darf daher der Rest des Kettenbruchs vernachlässigt werden, so ist

$$\infty = \cfrac{\pi:2}{1-\cfrac{\pi^2:4}{3-\cfrac{\pi^2:4}{5\ \text{etc.}}}} = \cfrac{\pi}{2-\cfrac{\pi^2}{6-\cfrac{\pi^2}{10\ \text{etc.}}}}$$

folglich nothwendig

$$2 = \cfrac{\pi^2}{6-\cfrac{\pi^2}{10-\cfrac{\pi^2}{14\ \text{etc.}}}}$$

Man überzeugt sich aber bald, dafs die ersten Näherungswerthe des letzteren Kettenbruchs wirklich gegen den Werth 2 convergiren, daher wird, da der ganze Kettenbruch convergirt, 2 der Werth desselben sein, und der Rest kann unberücksichtigt bleiben.

64.

Besonders wichtig für die Theorie der Summation der Kettenbrüche ist auch der Umstand, dafs man in vielen Fällen, ohne noch den Werth derselben zu kennen, bestimmen kann, ob dieser Werth rational sein wird, oder nicht. Es ist in dieser Beziehung Folgendes zu bemerken.

I. Ist ein Kettenbruch $F(a_m, a_{m+n})$ gegeben, in welchem alle Theilzähler und Theilnenner rationale Gröfsen sind, und ist der Werth von $F(a_m, a_{m+n})$ nicht rational, so kann auch der Werth des ganzen Kettenbruchs nicht rational sein. Denn wäre er rational, so würde aus der Formel

$$F(a, a_{m+n}) = \frac{F(a_m, a_{m+n}).a,\ a_{m-1}+b_m.a,\ a_{m-2}}{F(a_m, a_{m+n}).a_1, a_{m-1}+b_m.a_1, a_{m-2}} \text{ (§. 7.)}$$

auch der Werth von $F(a_m, a_{m+n})$ rational gefunden, gegen die Voraussetzung.

II. Hat ein unendlicher Kettenbruch nur positive Theilzähler und Theilnenner (die sämmtlich ganze Zahlen sind), und sind die Theilzähler nicht gröfser als die ihnen entsprechenden Theilnenner, so ist der Kettenbruch nothwendig irrational. Denn man habe den Kettenbruch

$$\frac{b_1}{F(a_1, a_m)} = \cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3\ \text{etc.}}}},$$

so dafs $b_1 \leqq a_1$, $b_2 \leqq a_2$, $b_3 \leqq a_3$ u. s. w. ist, so ist

$$\frac{b_1}{F(a_1, a_m)} < 1, \quad \frac{b_2}{F(a_2, a_m)} < 1 \text{ u. s. w.}$$

Wäre nun $\frac{b_1}{F(a_1, a_m)}$ einer rationalen Zahl gleich, so setze man diese $= \frac{B}{A}$,

also $B<A$ (B und A sind ganze Zahlen); es ist aber $\frac{B}{A}<\frac{b_1}{a_1}$, folglich b_1A-a_1B eine positive Zahl. Sie heifse C, so ist $\frac{B}{A}=\frac{b_1}{a_1+\frac{C}{B}}$, also $\frac{C}{B}=\frac{b_2}{F(a_2,a_m)}$ oder $\frac{C}{B}<\frac{b_2}{a_2}<1$, d. h. $C<B$. Nun setze man $b_2B-a_2C=D$, so findet man wieder $\frac{D}{C}=\frac{b_3}{F(a_3,a_m)}$, $\frac{D}{C}<\frac{b_3}{a_3}<1$ oder $D<C$. Auf diese Weise erhielte man eine unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen A, B, C, D, ..., die immer kleiner würden, was unmöglich ist, also kann der Werth von $\frac{b_1}{F(a_1,a_m)}$ nicht rational sein.

Der Kettenbruch $F(x:1+x^2:3+x^2:5....)$ hat nie einen rationalen Werth, sobald x einen solchen hat, weil man, wie grofs auch der Werth von x sei, immer an einen Theilzähler x^2 kommt, von welchem an alle Theilzähler kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind (II. und I.), daher hat (§. 63.) auch $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ keinen rationalen Werth, also hat auch $\frac{e^x+1}{2}=\frac{1}{1-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}$ keinen solchen, d. h. die Basis der natürlichen Logarithmen, und jede rationale Potenz derselben, ist eine irrationale Gröfse *).

III. Sind die Theilnenner positiv, aber alle Theilzähler negativ, so wird der Kettenbruch $\frac{b_1}{F(a_1,a_m)}=\frac{b_1}{a_1-\frac{b_2}{a_2}\text{ etc.}}$ irrational sein, wenn alle Theilnenner gröfser als die entsprechenden Theilzähler sind. Denn auch in diesem Falle ist $\frac{b_1}{F(a_1,a_m)}<1$, $\frac{b_2}{F(a_2,a_m)}<1$, u. s. w. (§. 55.). Wäre $\frac{b_1}{F(a_1,a_m)}$ rational $=\frac{B}{A}$, $B<A$ (wo B und A ganze Zahlen sind), so hätte man $\frac{B}{A}>\frac{b_1}{a_1}$, daher setze man $a_1B-b_1A=C$, so ist C positiv und $\frac{C}{B}=\frac{b_2}{F(a_2,a_m)}$, $C<B$. Fährt man auf diese Weise fort, so würde man wieder eine unendliche Reihe A, B, C .... ganzer Zahlen finden, die

*) Die Idee, die Irrationalität gewisser Ausdrücke mit Hülfe der Kettenbrüche zu beweisen, verdankt man Lambert. Vergl. *hist. de l'ac. de Berl.* 1761. pag. 265 ff.

immer kleiner werden. Die Unmöglichkeit einer solchen zeigt, dafs $\frac{b_1}{F(a_1 \ldots a_m)}$ irrational ist. Nur in dem Falle, wenn jeder Theilnenner um eine Einheit gröfser als der entsprechende Theilzähler ist, ist der Kettenbruch rational (§. 55.).

Ganz auf dieselbe Weise kann man auch zeigen, dafs der Kettenbruch unter denselben Voraussetzungen irrational sein wird, wenn nur ein Theil der Theilzähler negativ ist, nur braucht alsdann der zu einem negativen Theilzähler b_m gehörende Theilnenner a_m, auf welchen ein positiver Theilzähler folgt, nur $= b_m$ zu sein (§. 55.).

Aus dem Vorhergehenden folgt, dafs der Kettenbruch

$$\overset{m}{m=\infty} F(x : 1 - x^2 : (2m+1)) = \operatorname{tang} x$$

für jeden rationalen Werth von x irrational ist, da man immer an einen Werth von m kommt, von welchem an gerechnet die Theilzähler kleiner als die entsprechenden Theilnenner sind. Hieraus folgt, dafs die Tangente eines Bogens immer irrational sein wird, wenn dieser rational ist. Es mufs daher auch nothwendig die Zahl, welche das Verhältnifs der Peripherie zum Halbmesser angiebt, irrational sein, denn wäre dieses, oder 2π, also auch $\frac{\pi}{4}$ rational, so müfste $\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}$ irrational sein; diese Tangente ist aber bekanntlich rational und dem Halbmesser gleich. Eben so wenig kann das Quadrat dieses Verhältnisses rational sein, denn wäre $4\pi^2$ oder π^2 rational, allenfalls $\pi^2 = \frac{m}{n}$, wo m, n rationale Zahlen sind, so hätte man

$$2 = \cfrac{m:n}{6 - \cfrac{m:n}{10 - \cfrac{m:n}{14}}} \text{ etc.} \qquad = \cfrac{m}{6n - \cfrac{m}{10 - \cfrac{m}{14n}}} \text{ etc.}$$

Dieser letzte Kettenbruch wäre aber offenbar irrational, und könnte daher unmöglich $= 2$ sein, folglich mufs π^2 irrational sein *).

IV. Sind alle Theilzähler negativ, die Theilnenner positiv, so wird der Kettenbruch auch irrational sein, wenn jeder Theilzähler dem entsprechenden Theilnenner gleich, und kleiner als der nächst folgende Theilzähler ist. Denn es ist $F(a_1 : a_1 - a_2 : a_2 - a_3 : a_3 \ldots) = F(1:1-1:a_1-a_1:a_2-a_2:a_3\ldots)$ (§. 62.). Nach der Voraussetzung ist $a_1 < a_2$, $a_2 < a_3$, $a_3 < a_4$, also ist der Kettenbruch $F(a_1 - a_1 : a_2 - a_2 : a_3 \ldots)$ irrational (II.), folglich auch

*) Man vergl. Legendre *Elém. de géom. Not.* 4.

$F(1:1-1:a_1-a_1:a_2....)$ oder der ihm gleiche Kettenbruch $F(a_1:a_1-a_2:a_2....)$ *). Ausgenommen ist der Fall, wenn jeder Theilzähler den vorhergehenden um eine Einheit übertrifft.

65.

Auf dieselbe Weise, wie in §. 55. der Ausdruck

$$1 = F(b_1:(b_1+1)-b_2:(b_2+1)-....)$$

gefunden wurde, können noch eine Menge ähnlicher Ausdrücke abgeleitet werden. So z. B. hat man

$$1 = \frac{b_1}{b_1-1+1}, \quad 1 = \frac{b_2}{b_2-1+1}, \quad 1 = \frac{b_3}{b_3-1+1} \ldots,$$

daher ist

$$1 = \cfrac{b_1}{b_1-1+\cfrac{b_2}{b_2-1+\cfrac{b_3}{b_3-1}}} \text{ etc.}$$

Ebenso hat man:

$$1 = m^2-(m^2-1), \quad m^2-1 = \frac{(m^2-1)^2}{2m^2-(m^2+1)}, \quad m^2+1 = \frac{(m^2+1)^2}{3m^2-(2m^2-1)},$$

$$2m^2-1 = \frac{(2m^2-1)^2}{4m^2-(2m^2+1)}, \quad 2m^2+1 = \frac{(2m^2+1)^2}{5m^2-(3m^2-1)} \text{ u. s. w.}$$

Substituirt man allmählich diese Werthe, so findet man

$$1 = m^2-\cfrac{(m^2-1)^2}{2m^2-\cfrac{(m^2+1)^2}{3m^2-\cfrac{(2m^2-1)^2}{4m^2-\cfrac{(2m^2+1)^2}{5m^2}}}} \text{ etc.}$$

Den besonderen Fall, wenn $m=2$ ist, hat schon Euler auf indirectem Wege gefunden (*act. acad. petr.* 1779 *p.* 1. *pag.* 18.).

Setzt man $1 = m+1-m$, $m = \frac{m^2}{2m+1-m+1}$, $m+1 = \frac{(m+1)^2}{3m+1-2m}$,

$2m = \frac{(2m)^2}{4m+1-(2m+1)}$, $2m+1 = \frac{(2m+1)^2}{5m+1-3m}$, ... also

*) Für Kettenbrüche, bei welchen die Theilzähler gröfser als die Theilnenner sind, hat man bis jetzt noch keine Merkmale gefunden, wodurch ihre Rationalität oder Irrationalität erkannt werden könnte; blos für einzelne Fälle wird später ein solches vorkommen. Ich glaube aber, dafs man mit Sicherheit den Satz aufstellen kann: Wenn in einem Kettenbruche nur positive Zeichen vorkommen, und die Theilzähler werden im Verhältnifs zu den ihnen entsprechenden Theilnennern immer gröfser, so ist der Kettenbruch irrational: wenigstens stimmen alle mir bekannten Beispiele hiermit überein. Könnte man diesen Satz zur Gewifsheit erheben, so wäre es leicht, vermöge der Formel (11.) des Kap. 3. darzuthun, dafs jede Potenz von π irrational ist.

$$1 = m+1-\cfrac{m^2}{2m+1-\cfrac{(m+1)^2}{3m+1-\cfrac{(2m)^2}{4m+1-\cfrac{(2m+1)^2}{5m+1}}}} \text{ etc.}$$

Den besonderen Fall, wenn $m=2$ ist, hat schon Euler auf indirectem Wege gefunden (*Act. ac. petr.* 1782 *p.* 2. *pag.* 73.).

Setzt man $1=\frac{1.2}{3-1}$, $1=\frac{1.2}{5-3}$, $3=\frac{3.4}{7-3}$, $3=\frac{3.4}{9-5}$, $5=\frac{5.6}{11-5}$ ...., so findet man:

$$1 = \cfrac{1.2}{3-\cfrac{1.2}{5-\cfrac{3.4}{7-\cfrac{3.4}{9-\cfrac{5.6}{11}}}}} \text{ etc.}$$

oder setzt man:

$1=\frac{4}{5-1}$, $1=\frac{1.2}{7-5}$, $5=\frac{5.6}{9-3}$, $3=\frac{3.4}{11-7}$, $7=\frac{7.8}{13-5}$, $5=\frac{5.6}{15-9}$ ...., so ist

$$1 = \cfrac{4}{5-\cfrac{1.2}{7-\cfrac{5.6}{9-\cfrac{3.4}{11-\cfrac{7.8}{13-\cfrac{5.6}{15}}}}}} \text{ etc.}$$

Die zwei letzten Resultate wurden schon §. 48. auf indirectem Wege gefunden.

Ein hierher gehörender Kettenbruch möge noch besonders erwähnt werden, weil ihn Euler aus sehr verwickelten Betrachtungen abgeleitet hat (*Opusc. anal. T. I. pag.* 117.). Man setze:

$$\alpha = \frac{(\beta+\delta)\alpha}{\beta+\delta-(\alpha+\gamma)+(\alpha+\gamma)}, \qquad \alpha+\gamma = \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+2\delta)}{\beta+2\delta-(\alpha+2\gamma)+(\alpha+2\gamma)},$$

$$\alpha+2\gamma = \frac{(\alpha+2\gamma)(\beta+3\delta)}{\beta+3\delta-(\alpha+3\gamma)+(\alpha+3\gamma)} \text{ u. s. w.,}$$

so findet man

$$\alpha = \cfrac{\alpha(\beta+\delta)}{\beta+\delta-(\alpha+\gamma)+\cfrac{(\alpha+\gamma)(\beta+2\delta)}{\beta+2\delta-(\alpha+2\gamma)+\cfrac{(\alpha+2\gamma)(\beta+3\delta)}{\beta+3\delta-(\alpha+3\gamma)}}} \text{ etc. *)}$$

*) Auch Trembley, der nach Euler den Werth dieses Kettenbruchs mit Hülfe der recurrirenden Reihen gefunden hat (*Nouv. Mém. de l'ac. de Berlin*), hat die einfache Entstehung desselben nicht bemerkt. Man kann, ganz auf dieselbe Weise, auch die verwickelteren Ausdrücke, die er dort (§. 22.) aufstellt, ableiten.

Auch die Art und Weise, wie in §. 62. aus $\frac{m-1}{m-2}$ der Kettenbruch

$$F[m:m-(m+1):(m+1)\ldots.]$$

abgeleitet wurde, kann oft mit Nutzen zur Auffindung von Kettenbrüchen angewandt werden. So z. B. hat man $\frac{m+1}{m} = \frac{m}{m-2+\frac{m+2}{m+1}}$; hieraus folgt

$\frac{m+2}{m+1} = \frac{m+1}{m-1+\frac{m+3}{m+2}}$, $\frac{m+3}{m+2} = \frac{m+2}{m+\frac{m+4}{m+3}}$ etc., folglich ist

$$\frac{m+1}{m} = \cfrac{m}{m-2+\cfrac{m+1}{m-1+\cfrac{m+2}{m+\cfrac{m+3}{m+1}\text{ etc.}}}}$$ *).

Dieser letztere Kettenbruch ist aber als besonderer Fall in einer viel allgemeineren Form enthalten, die nun behandelt werden soll.

66.

Es soll nemlich die Summe des unendlichen Kettenbruchs **)

$$1.\quad m+\cfrac{n}{m+1+\cfrac{n+1}{m+2+}\text{ etc.}}$$

gefunden werden. Es wird zuerst vorausgesetzt, dafs m und n beide positiv und ganze Zahlen sind. Wäre n negativ, so würde der Kettenbruch abbrechen, und in einen endlichen übergehen; auch wird die Untersuchung hier auf den Fall eingeschränkt, wenn $n \geqq m+2$ ist. Ist $n < m+2$, so ist der Kettenbruch irrational (§. 64., II.). Dieser Fall soll erst später untersucht werden. Man bezeichne den Werth des Kettenbruchs (1.) durch $f(m, n)$, und setze

$$m-1+\frac{n-1}{f(m,n)} = a_1,\quad m-2+\frac{n-2}{a_1} = a_2,\quad m-3+\frac{n-3}{a_2} = a_3, \ldots.$$

$$m-s+\frac{n-s}{a_{s-1}} = a_s,$$

---

*) Die hier erwähnten Kettenbrüche können auch dazu dienen, die Meinung, die man hin und wieder ausgesprochen findet, dafs ein unendlicher Kettenbruch keinen rationalen Werth haben kann, zu widerlegen.

**) Die Methode, die Euler zur Summirung der Kettenbrüche angewendet hat (*Opusc. anal. T.* I. *pag.* 85.), ist sehr verwickelt. Man vergleiche auch einen Aufsatz von Euler in den *Mém. de l'ac. de Petersb.* (*T. IV. pag.* 52.), und einen anderen von Trembley (*Mém. de l'ac. de Berl.* 1794).

so ist

$$f(m,n) = \frac{n-1}{-m+1+a_1}, \quad a_1 = \frac{n-2}{-m+2+a_2}, \quad \ldots\ a_{s-1} = \frac{n-s}{-m+s+a_s},$$

folglich

$$2. \quad f(m,n) = \cfrac{n-1}{-m+1+\cfrac{n-2}{-m+2+\cfrac{n-3}{-m+3}\ \text{etc.}}}$$

Dieser zweite Kettenbruch bricht in jedem Falle ab, wie grofs auch n sei, denn setzt man ihn weit genug fort, so wird man an die Form

$$\cfrac{n-n}{-m+n+\cfrac{n-(n+1)}{-m+n+1+\cfrac{n-(n+2)}{-m+n+2}\ \text{etc.}}}$$

kommen, welche, wenn man $n = m+r+1$ setzt, in

$$\cfrac{0}{r+1-\cfrac{1}{r+2-\cfrac{2}{r+3}\ \text{etc.}}}$$

übergeht. Dieser letztere Bruch ist aber wirklich $=0$, weil der Nenner $r+1-\cfrac{1}{r+2}\ \text{etc.}$ nicht Null, sondern vielmehr gröfser als r ist (§. 55.) und (§. 22.). Da nun der Kettenbruch (1.) convergirt (§. 54.), und der Kettenbruch (2.) endlich ist, und der letztere Kettenbruch, wie man sogleich sehen wird, ebensowohl wie der erste, einen positiven Werth hat, so sind diese beiden Formen identisch; es ist daher $f(m,n)$ durch die Form (2.) auf einen endlichen Kettenbruch zurückgeführt, und man kann hiernach seine Summe als schon gefunden ansehn. Eine genauere Betrachtung der Form (2.) führt aber zu sehr interessanten Bemerkungen. Setzt man in derselben statt m den Werth $n-(r+1)$, so geht sie in folgende über:

$$\cfrac{n-1}{r+2-n+\cfrac{n-2}{r+3-n+\ddots\ +\cfrac{3}{r-2+\cfrac{2}{r-1+\cfrac{1}{r}}}}}.$$

Je nachdem $n = 2, 3, 4, \ldots$ ist, ist daher der Werth von $f(m,n) =$

$$\frac{1}{r}, \quad \frac{2}{r-1+\cfrac{1}{r}}, \quad \frac{3}{r-2+\cfrac{2}{r-1+\cfrac{1}{r}}}, \quad \ldots\ .$$

Die Reihe, deren Glieder diese auf einander folgende Kettenbrüche sind, nenne man (*A.*). Reducirt man diese Brüche, so findet man

$$\frac{1}{r},\ \frac{2r}{r(r-1)+1},\ \frac{3[r(r-1)+1]}{r(r-1)(r-2)+(r-2)+2r},\ \ldots.$$

Es ist leicht einzusehen, dafs der Zähler des l^{ten} Bruches aus dieser Reihe das $l$fache des Nenners des vorhergehenden ist. Das Gesetz, nach welchem die Nenner gebildet werden, findet man aber auf folgende Weise. Man nehme an, es werde eine Reihe gebildet, deren auf einander folgende Glieder die Nenner r, $r(r-1)+1$, u. s. w. sind. Diese Reihe nenne man (*B.*). Es sei nun das $n-1^{\text{te}}$ Glied der Reihe (*A.*) $=\frac{p'}{q'}$, das n^{te} $=\frac{p}{q}$, so ist das $n+1^{\text{te}}=\frac{n+1}{r-n+\frac{r}{q}}=\frac{(n+1)q}{(r-n)q+p}$, oder, da $p=nq'$ ist, $=\frac{(n+1)q}{(r-n)q+nq'}$, das $n+1^{\text{te}}$ Glied der Reihe (*B.*) ist daher $(r-n)q+nq'$.

Ist nun das $n-1^{\text{te}}$ Glied dieser Reihe

$$=1+(n-1)(r-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}.(r-1)(r-2)+\ldots.$$

und das n^{te}

$$=1+n.(r-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}.(r-1)(r-2)+\ldots.,$$

so ist auch das $n+1^{\text{te}}$

$$=1+(n+1)(r-1)+\frac{(n+1)n}{1.2}.(r-1)(r-2)+\ldots.,$$

denn unter dieser Voraussetzung ist das $n+1^{\text{te}}$ Glied

$$=n\left[1+(n-1)(r-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(r-1)(r-2)\ldots.\right]$$
$$+(r-n)\left[1+n(r-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(r-1)(r-2)\ldots.\right],$$

ferner ist

$$(r-n-1)\left[1+n(r-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(r-1)(r-2)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r-1)(r-2)(r-3)+\ldots.\right]$$
$$+n\left[1+(n-1)(r-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(r-1)(r-2)+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}(r-1)(r-2)(r-3)+\ldots.\right]$$
$$=(r-1)\left[1+n[(r-n-1)+(n-1)]+\frac{n(n-1)}{1.2}[(r-n-1)(r-2)+(n-2)(r-2)]\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.3.3}[(r-n-1)(r-2)(r-3)+(n-3)(r-2)(r-3)]+\ldots.\right]+\ldots.$$
$$=(r-1)\left[1+n(r-2)+\frac{n(n-1)}{1.2}(r-2)(r-3)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r-2)(r-3)(r-4)+\ldots.\right],$$

folglich ist das $n+1^{\text{te}}$ Glied der Reihe (*B.*):

$$3.\quad \begin{cases} 1+n(r-1)+\frac{n(n-1)}{1.2}(r-1)(r-2)+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(r-1)(r-2)(r-3)+\ldots. \\ +\ r-1+\ n\ (r-1)\ (r-2)\ +\ \frac{n(n-1)}{1.2}\ (r-1)(r-2)(r-3)+\ldots. \end{cases}$$

$$=1+(n+1)(r-1)+\frac{(n+1)n}{1.2}(r-1)(r-2)+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}(r-1)(r-2)(r-3)+\ldots.$$

Setzt man $n=2$, so ist das $n-1^{\text{te}}$ **Glied** $=r=1+(2-1)(r-1)$, das n^{te} $=r(r-1)+1=1+(3-1)(r-1)+\frac{2.1}{1.2}(r-1)(r-2)$. **Da also auf diese zwei Glieder die hypothetisch angenommene Form wirklich pafst, so gilt sie auch für alle folgende, d. h. die Form. (3.) ist allgemein gültig.**

Setzt man statt r **seinen Werth** $n-m-1$, **und schreibt zugleich statt**

$$\frac{(n-m-2)(n-m-3)\ldots.(n-m-t)}{1.2\ldots.t}$$

das Zeichen ${}^{n-m-2}\mathfrak{B}$, **so ist das** $n-2^{\text{te}}$ **Glied der Reihe (*B.*)**

$$=1+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}(n-2)+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}(n-2)(n-3)+\ldots.,$$

das $n-1^{\text{te}}$ **Glied**

$$=1+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}(n-1)+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}(n-1)(n-2)+\ldots.$$

Nun ist $f(m,n)$ **das** $n-1^{\text{te}}$ **Glied der Reihe (*A.*), man hat daher**

$$4.\quad f(m,n)=\frac{(n-1)[1+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}(n-2)+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}(n-2)(n-3)+\ldots.]}{1+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}(n-1)+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}(n-1)(n-2)+\ldots.}.$$

Ist z. B. $m=n-3$, **so ist**

$$f(n-3,n)=\frac{(n-1)(1+n-2)}{1+n-1}=\frac{(n-1)^2}{n}=n-3+\frac{n}{n-2+\frac{n+1}{n-1}\text{ etc.}},$$

folglich $\frac{n}{n-2+\frac{n+1}{n-1}}=\frac{(n-1)^2}{n}-(n-3)=\frac{n+1}{n}$, **wie schon früher (§. 65.) gefunden wurde.**

Will man den Werth von $f(m,n+1)=m+\cfrac{n+1}{m+1+\cfrac{n+2}{m+2\text{ etc.}}}$ **wissen, so kann man ihn zwar geradezu aus Formel (4.) finden. Es ist nemlich**

$$f(m,n+1)=\frac{n[1+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}(n-1)+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}(n-1)(n-2)+\ldots.]}{1+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}.n+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}.n.(n-1)+\ldots.}.$$

Man kann ihn aber auch aus dem Werthe von $f(m,n)$ **ableiten.**

Setzt man nemlich $f(m,n)=\frac{P}{q}$, $f(m,n+1)=\frac{P}{Q}$, **so hat man**

$$p = n-1+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{1}(n-1)(n-2)+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-1)(n-2)(n-3)+\ldots.$$
$$q = \quad 1+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{1}(n-1) \quad +{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-1)(n-2)+\ldots.$$

Addirt man die unter einander stehenden Glieder zusammen, und bedenkt zugleich, dafs allgemein

$${}^{r}\mathfrak{B}+{}^{r+1}\mathfrak{B}={}^{s+1}\mathfrak{B}^{r+1}$$

ist, so hat man

$$p+q = 1+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{1}(n-1)+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{2}(n-1)(n-2)\text{ etc.} = \frac{P}{n}.$$

Ferner ist

$$(n-m)q = [1+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{1}(n-1)+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-1)(n-2)+\ldots.]\times(n-m)$$

oder $(n-m)q =$

$$1+n-m-1+(n-m-1)(n-m-2)(n-1)+\frac{(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{1.2}(n-1)(n-2)+\ldots.$$
$$+\quad (n-m-2)(n-1)+\frac{(n-m-2)(n-m-3)}{1.2}(n-1)(n-2)+\ldots.,$$

folglich $(n-m)q+p =$

$$\begin{cases} 1+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{1} \quad +2.{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{2}(n-1) \quad +3.{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{3}(n-1)(n-2) \quad +\ldots. \\ +{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{1}(n-1)+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-1)(n-2)+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{3}(n-1)(n-2)(n-3)+\ldots. \\ +\quad n-1+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{1}(n-1)(n-2)+{}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-1)(n-2)(n-3)+\ldots. \end{cases}$$

Addirt man die unter einander stehenden Glieder, und bedenkt, dafs

$$n-m-1+\frac{(n-m-(l+1))}{l}(n-l)+(n-l) = \frac{(n-m-1)n}{l}$$

ist, so findet man:

$$(n-m)q+p = 1+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{1}.n+{}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{2}n(n-1)+\ldots. = Q,$$

also

$$\frac{P}{Q} = \frac{n(p+q)}{(n-m)q+p} = \frac{n\left(\frac{p}{q}+1\right)}{\frac{p}{q}+n-m},$$

oder

$$5. \quad f(m, n+1) = \frac{n[f(m,n)+1]}{f(m,n)+n-m}\ *).$$

Man kann auch aus $f(m, n) = \frac{p}{q}$ den Werth von $f(m-1, n) = \frac{p'}{q'}$ ableiten. Es ist nemlich

---

*) Ist $m = 1$, so hat man

$$f(m, n+1) = \frac{n[f(m,n)+1]}{f(m,n)+n-1}.$$

Diese Formel hat schon *Euler* gefunden (*Op. an. T.* 1. *pag.* 88.).

$$\frac{m.p}{n-1} = m + m^{n-m-2}\mathfrak{B}^{1}(n-2) + m.^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-2)(n-3) \text{ etc.}$$

$$q = 1 + {}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{1}(n-1) + {}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-1)(n-2) + {}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{3}(n-1)(n-2)(n-3) \text{ etc.}$$

Addirt man die unter einander stehenden Glieder zusammen, und bemerkt zugleich, dafs

$$m + \frac{(n-m-(l+1))(n-1)}{l} = \frac{(n-m-1)(n-(l+1))}{l}$$

ist, so findet man

$$\frac{m.p}{n-1} + q = 1 + {}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{1}(n-2) + {}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{2}(n-2)(n-3)\ldots.$$

Aus Formel (4.) folgt aber

$$p' = (n-1)[1 + {}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{1}(n-2) + {}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{2}(n-2)(n-3)\ldots.] = mp + (n-1)q.$$

Ferner ist, wie schon früher bewiesen wurde, $q' = p + q$, folglich

$$\frac{p'}{q'} = \frac{mp+(n-1)q}{p+q},$$

oder

$$6. \quad f(m-1, n) = \frac{m.f(m,n)+n-1}{f(m,n)+1}.$$

Man kann den Werth von $f(m-1, n)$ noch leichter auf folgende Weise finden: Es ist

$$f(m-1, n) = m-1+\frac{n}{f(m, n+1)},$$

aber

$$f(m, n+1) = \frac{n[f(m,n)+1]}{f(m,n)+n-m},$$

folglich

$$f(m-1, n) = \frac{mf(m,n)+n-1}{f(m,n)+1}.$$

Man setze

$$\frac{M}{N} = m+2+\frac{n-m-2}{m+3+\frac{n-m-3}{m+4}} \text{ etc.}$$

Wie grofs auch n ist, so kommt man hier doch immer an einen Theilzähler $n-m-s$, der $=0$ ist, wenn man nemlich $n-m=s$ setzt. Es kann aber hier wieder wie bei der Formel (2.) gezeigt werden, dafs der Ausdruck, durch welchen dieser Theilzähler Null dividirt wird, nicht Null ist; der Kettenbruch (8.) bricht also ab, und ist endlich. Setzt man allmählich $n=2, =3, =4, \ldots$, so erhält man bezüglich

$$\frac{M}{N} = \frac{m+2}{1}, \quad = \frac{(m+2)(m+3)+1}{m+3}, \quad = \frac{(m+2)[(m+3)(m+4)+1]+2(m+4)}{(m+3)(m+4)+1} \ldots.,$$

und wenn man hier wieder das Gesetz, nach welchem die Zähler und Nenner gebildet werden, untersucht, so findet man auf ähnliche Weise, wie die Formel (4.) gefunden wurde:

$$M = 1 + {}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{1}(n-1) + {}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{1}(n-1)(n-2) + {}^{n-m-1}\mathfrak{B}^{3}(n-1)(n-2)(n-3) + \ldots.$$
$$N = 1 + {}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-1) + {}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{2}(n-1)(n-2) + {}^{n-m-2}\mathfrak{B}^{3}(n-1)(n-2)(n-3) + \ldots.$$

Zieht man die unter einander stehenden Glieder von einander ab, so findet man $M - N = p$; auch ist $N = q$, also

$$\frac{M}{N} = \frac{q}{p} + 1,$$

folglich

$$9.\quad f(m,n) = m + 1 + \cfrac{n-m-2}{m+3+\cfrac{n-m-3}{m+4+}}\ \text{etc.}$$

Auf dieselbe Weise, wie der Ausdruck (1.) und (2.) verwandelt wurde, kann man auch den Ausdruck (8.) verwandeln. Man findet alsdann

$$\frac{M}{N} = \cfrac{n-m-1}{-m-1+\cfrac{n-m}{-m+\cfrac{n-m+1}{-m+1}}}\ \text{etc.}$$

und

$$10.\quad f(m,n) = -1 + \cfrac{n-m-1}{-m-1+\cfrac{n-m}{-m+\cfrac{n-m+1}{-m+1}}}\ \text{etc.}$$

Zur Berechnung des Werthes von $f(m,n)$ ist der Ausdruck (9.) am tauglichsten, weil er am frühesten abbricht*).

Man hätte die Untersuchung noch allgemeiner halten können, wenn man statt des Kettenbruchs (1.) den Kettenbruch

$$11.\quad m + \cfrac{n}{m+\Delta+\cfrac{n+\Delta}{m+2\Delta+\cfrac{n+2\Delta}{m+3\Delta}}}\ \text{etc.}$$

zu Grunde gelegt hätte, wo m, n, Δ ganze positive Zahlen bedeuten, und $n > m+\Delta$, ferner $\frac{n}{\Delta}$ eine ganze Zahl sein soll. Aus diesem convergirenden Kettenbruche kann man wieder den gleichgeltenden endlichen $\cfrac{n-\Delta}{-(m-\Delta)+\cfrac{n-2\Delta}{-(m-2\Delta)+}}\ \text{etc.}$ erhalten. Hieraus folgt der bemerkenswerthe

Satz: Wenn Zähler und Nenner aller Theilbrüche eines unendlichen Ket-

*) Die Identität der vier Kettenbrüche (1.), (2.), (9.), (10.) hat Euler (*Op. anal. T.* 1. *pag.* 102.) auf ganz anderem Wege gefunden.

tenbruchs positiv, und um dieselbe Gröfse verschieden sind, so wird dieser Kettenbruch rational sein, sobald der erste Theilzähler gröfser als der dazu gehörende Theilnenner, und ein Vielfaches des Unterschiedes zweier Theilzähler ist.

67.

Die Methode, nach welcher der Kettenbruch (1.) in (2.) verwandelt wurde, darf aber nicht überall ohne weitere Untersuchung gebraucht werden, weil man sonst grofse Fehler begehen kann. So z. B. kann man aus dem Kettenbruche $S = a + \cfrac{f}{a+b+\cfrac{f+bh}{a+2b+\cfrac{f+2bh}{a+3b+\text{etc.}}}}$ den Kettenbruch $\cfrac{f-bh}{b-a+\cfrac{f-2bh}{2b-a+\cfrac{f-3bh}{3b-a\,\text{etc.}}}}$ ableiten, indem man $a-b+\frac{f-bh}{S} = a_1$, $a-2b+\frac{f-2bh}{a_1} = a_2$ u. s. w. setzt. Man darf aber darum nicht diese zwei Kettenbrüche, wie z. B. bei Euler (a. a. O.) geschehen ist, unbedingt einander gleich setzen. Setzt man z. B. $f=2$, $a=1$, $b=4$, $h=1$, so verwandelt sich der erste Kettenbruch in

$$1+\cfrac{2}{5+\cfrac{6}{9+\cfrac{10}{13\,\text{etc.}}}},$$

dagegen der zweite in

$$-\cfrac{2}{3-\cfrac{6}{7-\cfrac{10}{11\,\text{etc.}}}}$$

Der erste Kettenbruch hat also einen positiven irrationalen Werth (§. 64. II.) und ist gröfser als 1; dagegen hat der zweite Kettenbruch einen negativen irrationalen Werth, und ist kleiner als 1, da $3-\cfrac{6}{7-\cfrac{10}{11\,\text{etc.}}}$ gröfser als 2 ist (§. 55.).

68.

Ist in dem Kettenbruche (1.) die Zahl m negativ, so kann n jeden beliebigen Werth in ganzen Zahlen haben. Setzt man $m = -t$, so dafs t positiv ist, so giebt die Formel (2.):

$$\cfrac{n-1}{1+t+\cfrac{n-2}{2+t+\cfrac{n-3}{3+t\,\text{etc.}}}}$$

Setzt man $t = r+1-n$, so erhält man dieselbe Form wie in §. 66., nemlich:

$$\cfrac{n-1}{r+2-n+\cfrac{n-2}{r+3-n+}}\text{ etc.}$$

Man kann daher die Formel (4.) ohne Weiteres auf diesen Fall anwenden, indem man in derselben statt m nun t, d. h. $-m$ setzt. Ist z. B. $n=2$, so erhält man, vermöge dieser Formel:

$$-m+\cfrac{2}{1-m+\cfrac{3}{2-m}\text{ etc.}} = \frac{1}{1+m},$$

wie schon Trembley (a. a. O. pag. 110.) durch Induction gefunden hat.

69.

Es bleibt nun noch der Fall übrig, wenn in dem Kettenbruche $f(m,n)$ die Zahl $n<m+2$ ist (und n, m positive Zahlen sind). Um alsdann die Summe des Kettenbruchs zu finden, sind allgemeinere Untersuchungen erforderlich.

Es sei der Kettenbruch *)

$$S = \beta+b+\cfrac{(\gamma+c)(2\alpha+a)}{2\beta+b+\cfrac{(2\gamma+c)(3\alpha+a)}{3\beta+b+\cfrac{(3\gamma+c)(4\alpha+a)}{4\beta+b}\text{ etc.}}}$$

gegeben, und es soll dessen Summe (wenn überhaupt eine solche möglich ist) gefunden werden. Man denke sich eine Reihe von Gröfsen A, A_1, A_2, A_3, ..., die so beschaffen sind, dafs

$$\begin{aligned}(\alpha+a)A &= (\beta+b)A_1+(\gamma+c)A_2,\\ (2\alpha+a)A_1 &= (2\beta+b)A_2+(2\gamma+c)A_3,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \text{allgemein}\quad (r\alpha+a)A_{r-1} &= (r\beta+b)A_r+(r\gamma+c)A_{r+1},\end{aligned}$$

so hat man

$$(\alpha+a)\frac{A}{A_1} = \beta+b+\frac{\gamma+c}{A_1:A_2} = \beta+b+\cfrac{(\gamma+c)(2\alpha+a)}{2\beta+b+\cfrac{(2\gamma+c)(3\alpha+a)}{A_2:A_3}}$$

u. s. w. Es wird daher $(\alpha+a)\frac{A}{A_1}$ die Summe des unendlichen Kettenbruchs oder nur dessen erzeugende Function sein, je nachdem die Ausdrücke $\frac{A_1}{A_2}$, $\frac{A_2}{A_3}$ u. s. w., wenigstens von einer gewissen Gränze an, vernachlässigt werden dürfen oder nicht. Es kommt nun darauf an, die

*) Man vergl. *Comm. ac. Petr. T. XI. p.* 59 ff. Euleri *Opusc. anal. T. II. p.* 198 ff.

Werthe der Gröfsen A_{r-1}, A_r, A_{r+1} zu finden, die der Gleichung

$$(r\alpha+a)A_{r-1} = (r\beta+b)A_r + (r\gamma+c)A_{r+1}$$

Genüge leisten. Die Form dieser Gröfsen ist noch völlig unbestimmt. Die bequemste Voraussetzung, die man aber machen kann, ist die, dafs sie durch bestimmte Integrale ausgedrückt sind. Man setze daher

$$A_{r-1} = \int x^{r-1}\partial y, \quad A_r = \int x^r \partial y, \quad A_{r+1} = \int x^{r+1}\partial y,$$

mit der Beschränkung, dafs diese Integrale zwischen den Gränzen $x = f$ und $x = 0$ genommen werden sollen, und suche den Werth von y, der der Gleichung

$$(r\alpha+a)\int_0^f x^{r-1}\partial y = (r\beta+b)\int_0^f x^r\partial y + (r\gamma+c)\int_0^f x^{r+1}\partial y$$

genügt. Statt dieser Gleichung nehme man aber die allgemeinere:

$$(K.)\quad (r\alpha+a)\int x^{r-1}\partial y = (r\beta+b)\int x^r\partial y + (r\gamma+c)\int x^{r+1}\partial y + x^r Q,$$

wo Q eine Gröfse bedeuten soll, die für den Werth $x = f$ Null wird, so dafs der Ausdruck $x^r Q$ sowohl für den Werth $x = 0$, als auch für den Werth $x = f$ verschwindet.

Differenziirt man die letzte Gleichung, so erhält man

$$(r\alpha+a)\partial y = (r\beta+b)x\,\partial y + (r\gamma+c)x^2\partial y + x\,\partial Q + rQ\,\partial x.$$

Da aber r unbestimmt bleiben soll, so theilt sich diese Gleichung in zwei andere, nemlich:

$$\alpha\,\partial y = \beta x\,\partial y + \gamma x^2\partial y + Q\,\partial x,$$
$$a\,\partial y = b\,x\,\partial y + c\,x^2\partial y + x\,\partial Q.$$

Hieraus erhält man

$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x}{x}\cdot\frac{a-bx-cx^2}{\alpha-\beta x-\gamma x^2}$$

und

$$\partial y = \frac{Q\,\partial x}{\alpha-\beta x-\gamma x^2} = \frac{x\,\partial Q}{a-bx-cx^2},$$

also

$$A = \int_0^f \frac{Q\,\partial x}{\alpha-\beta x-\gamma x^2}, \qquad A_1 = \int_0^f \frac{Qx\,\partial x}{\alpha-\beta x-\gamma x^2}.$$

Der Kettenbruch S geht in den Kettenbruch (1.) des §. 66. über, wenn man $\beta = 1$, $b = m-1$, $\gamma = 0$, $c = 1$, $\alpha = 1$, $a = n-2$ setzt. In diesem besonderen Falle hat man:

$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x}{x}\cdot\frac{n-2-(m-1)x-x^2}{1-x}.$$

Hieraus folgt:

$$\log Q = x + (n-2)\log x + (m+2-n)\log(1-x) + C$$

oder

$$Q = C.e^x.x^{n-2}(1-x)^{m+2-n}.$$

Q soll für einen bestimmten Werth von x Null werden. Sind daher m, n beide positiv, so mufs man zwei Fälle unterscheiden. Ist

$m+2-n$ positiv, also $n<m+2$, so wird Q für den Werth $x=1$ Null. Ist dagegen $m+2-n$ Null oder negativ, so kann Q durch keinen bestimmten Werth von x auf Null reducirt werden. Dies beweist, dafs die Form, welche hier den Gröfsen A, A_1, A_2 u. s. w. gegeben wurde, nicht auf diesen Fall pafst, und eben so verhält es sich, wenn m negativ ist. In diesen Fällen ist aber der Kettenbruch rational, und seine Summe ist schon früher gefunden worden. Ist $n<m+2$, so hat man:

$$A=\int_0^1 e^x.x^{n-2}(1-x)^{m+1-n}\,\partial x, \qquad A_1=\int_0^1 e^x.x^{n-1}(1-x)^{m+1-n}\,\partial x,$$

und es ist

$$(L.)\quad f(m,n)=(n-1)\frac{\int_0^1 e^x.x^{n-2}(1-x)^{m+1-n}\,\partial x}{\int_0^1 e^x.x^{n-1}(1-x)^{m+1-n}\,\partial x},$$

vorausgesetzt, dafs der irgendwo vernachläfsigte Ausdruck $\frac{A_{m-1}}{A_m}$ keinen nachtheiligen Einflufs auf das Resultat ausüben kann. Die allgemeine Form dieses vernachlässigten Ausdrucks ist:

$$\frac{\int_0^1 e^x.x^s\ \ (1-x)^{m+1-n}\,\partial x}{\int_0^1 e^x.x^{s+1}(1-x)^{m+1-n}\,\partial x},$$

wo s desto gröfser wird, je weiter man in der Entwickelung fortgeht. Man setze $x^s=z$, so ist

$$e^x.x^s\ \ (1-x)^{m+1-n}\,\partial x=\frac{1}{s}.e^x.z^{\frac{1}{s}}(1-x)^{m+1-n}\,\partial z,$$

$$e^x.x^{s+1}(1-x)^{m+1-n}\,\partial x=\frac{1}{s}.e^x.z^{\frac{2}{s}}(1-x)^{m+1-n}\,\partial z.$$

Das Verhältnifs dieser Differenziale ist $\frac{1}{z^{\frac{1}{s}}}$. Setzt man $s=\infty$, so ist $\frac{1}{z^{\frac{1}{s}}}=1$, das Verhältnifs dieser Differenziale nähert sich also dem Werthe 1, und dies wird daher auch bei den Integralen der Fall sein, da sie zwischen denselben Gränzen genommen werden. Daher kann man unbedenklich den unendlichen Kettenbruch als Werth von $f(m, n)$ ansehen.

Es ist zuweilen nicht möglich, aus der Formel $(L.)$ den Werth von $f(m, n)$ unmittelbar zu finden. Wäre z. B. $m=1$, $n=1$, so dafs

$$f(m,n)=F(1+1:2+2:3+\text{ etc.})$$

wäre, so hätte man $n-1=0$, und die Formel $(L.)$ wäre daher unbrauchbar. Man suche aber den Werth von $F(2+2:3+3:4$ etc.), alsdann ist $m=2$, $n=2$, daher wird

$$f(m,n) = \frac{\int_0^1 e^x\,(1-x)\,\partial x}{\int_0^1 e^x . x(1-x)\,\partial x} = \frac{e-2}{3-e},$$

und

$$F(1+1:2+2:3\ldots.) = 1 + \frac{1}{\frac{e-2}{3-e}} = \frac{1}{e-2};$$

oder hätte man $f(m,n) = F(1+1:1+2:2+3:3$ etc.), so suche man zuerst den Werth von $F(1+2:2+3:3$ etc.). Man setze also $m=1$, $n=2$, so ist

$$f(m,n) = \frac{\int_0^1 e^x\,\partial x}{\int_0^1 e^x . x\,\partial x} = \frac{e-1}{1},$$

und

$$F(1+1:1+2:2 \text{ etc.}) = 1 + \frac{1}{e-1} = \frac{e}{e-1}.$$

Setzt man $\beta=1$, $b=m-2$, $\gamma=0$, $c=1$, $\alpha=1$, $a=n-2$, so geht S in $f(m-1,n)$ über, und man kann daher den Werth dieses Kettenbruchs, ebenso wie den von $f(m,n)$ finden. Es ist

$$f(m-1,n) = \frac{(n-1)\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n}\,\partial x}{\int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n}\,\partial x}.$$

Man kann aber auch zwischen $f(m-1,n)$ und $f(m,n)$ einen Zusammenhang finden, so dafs es möglich ist, den Werth eines dieser Kettenbrüche aus dem des anderen abzuleiten, und zwar ist dieser Zusammenhang derselbe, wie der früher (§. 67., Form. 6.) gefundene. Man setze:

$$(n-1)\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n}\,\partial x = p', \quad \int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n}\,\partial x = q',$$

$$(n-1)\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n+1}\,\partial x = p, \quad \int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n+1}\,\partial x = q,$$

so ist $p'-(n-1)q' = (n-1)\left[\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n}\,\partial x - \int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n}\,\partial x\right]$

$= (n-1)\left[\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n+1}\,\partial x\right] = p$, ferner folgt aus ($K.$), wenn man $r=1$, $\beta=1$, $b=m-2$, $\gamma=0$, $c=1$, $\alpha=1$, $a=n-2$ setzt:

$$(n-1)\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n}\,\partial x = (m-1)\int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n}\,\partial x + \int_0^1 e^x . x^n\,(1-x)^{m-n},$$

oder

$$m\int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m-n}\,\partial x - (n-1)\int_0^1 e^x . x^{n-2}(1-x)^{m-n}\,\partial x = \int_0^1 e^x . x^{n-1}(1-x)^{m+1-n},$$

d. h.,

$$mq' - p' = q,$$

also $$\frac{p}{q} = \frac{p' - (n-1)q'}{mq' - p'},$$

d. h. $$(M.) \quad f(m,n) = \frac{f(m-1,n) - (n-1)}{m - f(m-1,n)}.$$

Da $f(m, n-1) = m + \cfrac{n-1}{m+1+\cfrac{n}{m+2}\text{ etc.}} = m + \frac{n-1}{f(m+1,n)}$ ist, $f(m+1, n)$ aber nach $(M.)$ aus $f(m, n)$ gefunden werden kann, so ist es auch leicht, den Zusammenhang zwischen $f(m, n)$ und $f(m, n-1)$ anzugeben.

70.

Der Kettenbruch $S = m - \cfrac{n}{m+1-\cfrac{(n+1)}{m+2-\cfrac{(n+2)}{m+3}\text{ etc.}}} = \varphi(m, n)$ (wo m, n wie-

der ganze positive Zahlen sind) kann ebenfalls nach der in den früheren §. §. angewandten Methode summirt werden. Man mufs wieder zwei Fälle unterscheiden. Ist $n < m$, so ist der Kettenbruch irrational, ist aber $n \geqq m$, so setze man $m - 1 - \frac{(n-1)}{S} = a_1$, $m - 2 - \frac{(n-2)}{a_1} = a_2$, u. s. w. Alsdann ist

$$S = \cfrac{n-1}{m-1-\cfrac{(n-2)}{m-2-\cfrac{(n-3)}{m-3}\text{ etc.}}}$$

Dieser Bruch bricht ab und ist endlich; hierdurch ist also die Summe von S gefunden.

Setzt man $m = n$, so hat man

$$m - \cfrac{m}{m+1-\cfrac{(m+1)}{m+2-\cfrac{(m+2)}{m+3}\text{ etc.}}} = \cfrac{m-1}{m-1-\cfrac{(m-2)}{m-2-\cfrac{(m-2)}{m-3}\text{ etc.}}},$$

folglich $$\cfrac{m-1}{m-1-\cfrac{(m-2)}{m-2-\cfrac{(m-3)}{m-3}\text{ etc.}}} = m-1 \text{ (vergl. §. 62.).}$$

Dieses Resultat hätte man auch direct finden können, denn es ist

$$1 = m - 1 - \cfrac{(m-2)}{m-2-\cfrac{(m-3)}{1}}, \quad 1 = m - 3 - \cfrac{(m-4)}{m-4-\cfrac{(m-5)}{1}} \text{ u. s. w.,}$$

folglich

$$1 = m - 1 - \cfrac{(m-2)}{m-2-\cfrac{(m-3)}{m-3-\cfrac{(m-4)}{m-4}\text{ etc.}}}$$

Ist $n < m$, so findet man den Werth des Kettenbruchs nach §. 69. Setzt man nemlich in der Formel (*K.*):

$$r = 1,\ \beta = 1,\ b = m-1,\ \gamma = 0,\ c = -1,\ \alpha = 1,\ a = n-2,$$

so hat man

$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{n-2-(m-1)x+x^2}{1-x},$$

$$Q = e^{-x} \cdot x^{n-2}(1-x)^{m-n}.$$

Dieser Ausdruck wird für den Werth $x = 1$ Null, sobald $n < m$ ist, also ist

$$S = \frac{(n-1)\int_0^1 e^{-x} \cdot x^{n-2}(1-x)^{m-n-1}\,\partial x}{\int_0^1 e^{-x} \cdot x^{n-1}(1-x)^{m-n-1}\,\partial x} = \varphi(m, n).$$

Dafs der Rest vernachlässigt werden kann, läfst sich hier wieder wie in §. 69. zeigen. Ist z. B. $n = 2$, $m = 3$, so hat man

$$3 - \cfrac{2}{4 - \cfrac{3}{5\ \text{etc.}}} = \frac{\int_0^1 e^{-x}\,\partial x}{\int_0^1 e^{-x} \cdot x\,\partial x} = \frac{e-1}{e-2}.$$

Aus dem Werthe von $\varphi(m, n)$ folgt

$$\varphi(m+1, n) = \frac{(n-1)\int_0^1 e^{-x} \cdot x^{n-2}(1-x)^{m-n}\,\partial x}{\int_0^1 e^{-x} \cdot x^{n-1}(1-x)^{m-n}\,\partial x}.$$

Setzt man

$$(n-1)\int_0^1 e^{-x} \cdot x^{n-2}(1-x)^{m-n-1}\,\partial x = p,$$

$$\int_0^1 e^{-x} \cdot x^{n-1}(1-x)^{m-n-1}\,\partial x = q,$$

$$(n-1)\int_0^1 e^{-x} \cdot x^{n-2}(1-x)^{m-n}\,\partial x = p',$$

$$\int_0^1 e^{-x} \cdot x^{n-1}(1-x)^{m-n}\,\partial x = q',$$

so ist

$$p-(n-1)q = p',$$

Ferner folgt aus (*K.*):

$$(n-1)\int e^{-x} \cdot x^{n-2}(1-x)^{m-n-1}\,\partial x = m\int e^{-x} \cdot x^{n-1}(1-x)^{m-n-1}\,\partial x - \int e^{-x} \cdot x^{n}(1-x)^{m-n-1}\,\partial x,$$

oder

$$(n-1)\int e^{-x} \cdot x^{n-2}(1-x)^{m-n-1}\,\partial x - (m-1)\int e^{-x} \cdot x^{n-1}(1-x)^{m-n-1}\,\partial x$$

$$= \int e^{-x} \cdot x^{n-1}(1-x)^{m-n-1}\,\partial x - \int e^{-x} \cdot x^{n}(1-x)^{m-n-1}\,\partial x = \int e^{-x} \cdot x^{n-1}(1-x)^{m-n}\,\partial x,$$

d. h.

$$p-(m-1)q = q',$$

also

$$\frac{p'}{q'} = \frac{p-(n-1)q}{p-(m-1)q} \quad \text{oder} \quad \varphi(m+1, n) = \frac{\varphi(m, n)-(n-1)}{\varphi(m, n)-(m-1)}.$$

Dasselbe Verhältnifs findet aber auch Statt, wenn $n > m$ ist. Ist z. B. $m = 0$, $n = 4$, so ist $S = \frac{15}{1}$; ist $m = 1$, $n = 4$, so ist $S = \frac{3}{4}$; ist $m = 2$, $n = 4$, so ist $S = \frac{3}{-1}$; ist $m = 3$, $n = 4$, so ist $S = \frac{3}{2}$, und man hat $\frac{3}{4} = \frac{15-3}{15+1}$, $\frac{-3}{1} = \frac{\frac{3}{4}-3}{\frac{3}{4}}$, $\frac{3}{2} = \frac{-3-3}{-3-1}$. Jedoch ist es hier nicht so leicht, wie bei einem früheren Falle (§. 66.), einen elementaren Beweis dieses Verhältnisses zu geben.

Es ist hier auch wieder leicht, einen Zusammenhang zwischen $\varphi(m, n-1)$ und $\varphi(m, n)$ zu finden, denn es ist

$$\varphi(m, n-1) =$$

$$m - \frac{n-1}{\varphi(m+1, n)} = m - \frac{(n-1)[\varphi(m,n)-(m-1)]}{\varphi(m,n)-(n-1)} = \frac{(m-n+1)\varphi(m,n)-(n-1)}{\varphi(m,n)-(n-1)}.$$

Der Kettenbruch

$$m - \cfrac{n}{m+\Delta - \cfrac{(n+\Delta)}{m+2\Delta - \cfrac{(n+2\Delta)}{m+3\Delta \text{ etc.}}}}$$

würde sich unter der Voraussetzung, dafs $n \gtreqless m + \Delta - 1$ ist, und m, n, Δ ganze Zahlen sind, in den endlichen Kettenbruch

$$\cfrac{n-\Delta}{m-\Delta - \cfrac{(n-2\Delta)}{m-2\Delta - \cfrac{(n-3\Delta)}{m-3\Delta \text{ etc.}}}}$$

verwandeln, sobald Δ ein Factor von n ist. In diesem Falle ist daher der Kettenbruch rational.

71.

Aus dem Kettenbruche S (§. 69.) läfst sich die Summe einer unzähligen Menge von Kettenbrüchen ableiten. Hier sollen nur einige hervorgehoben werden, die schon früher auf anderem Wege gefunden wurden. Es sei der Ausdruck $n + \cfrac{m^2}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n \text{ etc.}}}}$ gegeben. Man setze

$\gamma + c = m$, $2\alpha + a = m$, $\gamma = n$, $\alpha = n$, $\beta = 0$, $b = n$, so ist

$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x}{x} \cdot \frac{m - 2n - nx - (m-n)x^2}{n(1-x^2)};$$

ist $n = 2$, $m = 3$, so hat man

$$\frac{\partial Q}{Q} = -\frac{\partial x(1+2x+x^2)}{2x(1-x^2)} = -\frac{\partial x(1+x)}{2x(1-x)} \quad \text{und} \quad Q = \frac{1-x}{\sqrt{x}},$$

also ist für den Werth $x=1$, $Q=0$, folglich

$$A = \int_0^1 \frac{(1-x)\partial x}{2(1-x^2)\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} = \text{arc tang } 1 = \frac{\pi}{4},$$

$$A_1 = \int_0^1 \frac{x(1-x)\partial x}{2(1-x^2)\sqrt{x}} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}.\partial x}{1+x} = 1 - \text{arc tang } 1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

und

$$2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 \text{ etc.}}} = \frac{A}{A_1} = \frac{\pi}{4-\pi},$$

folglich

$$2 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \text{etc.}}} = 1 + \frac{4}{\pi} \quad \text{(vergl. §. 33.).}$$

Ist $n=1$, $m=2$, so hat man $\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x}{x}.\frac{-(x+x^2)}{1-x^2} = \frac{-\partial x}{1-x}$, also $Q = 1-x$. Dieser Werth wird wieder Null für den Werth $x=1$, daher ist

$$A = \int_0^1 \frac{(1-x)\partial x}{1-x^2} = \int_0^1 \frac{\partial x}{1+x} = \log 2,$$

$$A_1 = \int_0^1 \frac{x\,\partial x}{1+x} = 1 - \log 2,$$

folglich

$$1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{3^2}{1 \text{ etc.}}} = \frac{\log 2}{1-\log 2} \quad \text{und} \quad \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2^2}{1 + \cfrac{3^2}{1 \text{ etc.}}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{\log 2}{1-\log 2}}} = \log 2$$

(vergl. §. 28.).

Setzt man $\beta=2$, $b=1$, $\alpha=1$, $\gamma=1$, $a=0$, $c=1$, so erhält man den Kettenbruch $3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 \text{ etc.}}}}$. Hier ist $\frac{\partial Q}{Q} = \frac{-\partial x(1+x)}{2-(1+x)^2}$ und $Q = [2-(1+x)^2]^{\frac{1}{2}}$. Soll Q Null werden, so muſs $2 = 1+x^2$ sein, oder $x = -1 \pm \sqrt{2}$, also $A = \int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{[2-(1+x)^2]^{\frac{1}{2}}\partial x}{2-(1+x)^2} = \frac{\partial x}{\sqrt{(2-(1+x)^2)}}$. Nun ist $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(2-(1+x)^2)}} = \text{arc tang}\sqrt{\left(\frac{(1+x)^2}{2-(1+x)^2}\right)}$, folglich $A = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$. Eben so findet man $A_1 = \int_0^{-1+\sqrt{2}} \frac{x\partial x}{\sqrt{(2-(1+x)^2)}} = 1 - \frac{\pi}{4}$, also $\frac{A}{A_1} = \frac{\pi}{4-\pi}$ und

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2^2}{5 \text{ etc.}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{4-\pi}{\pi}} = \frac{\pi}{4} \quad \text{(§. 47.).}$$

72.

Um nun auch ein Beispiel zu geben, wo $(\alpha+a)\frac{A}{A_x}$ nicht die Summe, sondern nur die erzeugende Function ist, möge die Summe des Kettenbruchs

$$(F.) \qquad n+\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{5n \text{ etc.}}}$$

gesucht werden. Setzt man in dem Ausdrucke

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5} \text{ etc.}}} \qquad (\S.\ 63.)$$

statt x den Werth $\frac{1}{n}$, so hat man:

$$\frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{e^{\frac{2}{n}}+1} = \cfrac{\frac{1}{n}}{1+\cfrac{\frac{1}{n^2}}{3+\cfrac{\frac{1}{n^2}}{5 \text{ etc.}}}} = \cfrac{1}{n+\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{5n \text{ etc.}}}}$$

oder

$$\frac{e^{\frac{2}{n}}+1}{e^{\frac{2}{n}}-1} = n+\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{5n \text{ etc.}}} = (F);$$

sucht man dagegen den Werth von $(F.)$ aus §. 69., so ist $\beta+b=n$, $\beta=2n$, $\gamma=0$, $c=1$, $\alpha=0$, $a=1$, folglich

$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial x}{x}\cdot\frac{1+nx-x^2}{-2nx},$$

$$Q = e^{\frac{1+x^2}{2nx}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Dieser Ausdruck kann für keinen Werth von x Null werden, so lange n positiv ist. Ist dagegen n negativ, so wird $Q=e^{-\frac{1+x^2}{2nx}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$, für den Werth $x=\infty$, Null. In diesem Falle ist

$$A = \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1+x^2}{2nx}}},$$

$$A_1 = \frac{1}{2n}\int_0^\infty \frac{\partial x}{x^{\frac{3}{2}}\cdot e^{\frac{1+x^2}{2nx}}},$$

also wäre

$$\frac{A}{A_1} = -n+\cfrac{1}{-3n+\cfrac{1}{-5n \text{ etc.}}} = -n-\cfrac{1}{3n+\cfrac{1}{5n \text{ etc.}}}$$

oder $$-\frac{A}{A_1} = n + \cfrac{1}{3n + \cfrac{1}{5n \text{ etc.}}} = (F).$$

Nach **Legendre's** Untersuchungen *) ist aber $\frac{A}{A_1} = 1+n$, also wäre

$$-(1+n) = n + \cfrac{1}{3n + \cfrac{1}{5n \text{ etc.}}}$$

d. h. es wäre eine positive Zahl einer negativen gleich; man hätte auch $-\frac{A}{A_1} = \frac{e^{\frac{2}{n}}+1}{e^{\frac{2}{n}}-1}$ **), d. h. $-(1+n) = \frac{e^{\frac{2}{n}}+1}{e^{\frac{2}{n}}-1}$, was eben so wenig angeht.

Der Grund dieses Widerspruchs liegt in dem Umstande, dafs hier $-\frac{A}{A_1}$ wirklich nicht die Summe von $(F.)$ ist, und dafs der irgendwo vernachlässigte Ausdruck $\frac{A_{m-1}}{A_m}$ das ganze Resultat vom Positiven zum Negativen ändert.

73.

Das Vorhergehende zeigt, dafs die Summe des Kettenbruches $F(n+1:3n+1:5n....)$ nicht durch die in §. 69. gezeigte Methode gefunden werden kann, und man würde auf dieselbe Schwierigkeit stofsen, wenn man irgend einen anderen Kettenbruch, dessen Theilzähler sämmtlich einander gleich sind, nach dieser Methode summiren wollte. Es giebt aber einen anderen Weg, zur unmittelbaren Summation einer gewissen, hierher gehörenden Klasse von Kettenbrüchen zu gelangen ***).

Es seien die zwei Reihen

$$\varphi(b) = 1 + \frac{x}{b.\beta} + \frac{x^2}{1.2.b(b+\beta).\beta^2} + \frac{x^3}{1.2.3.b(b+\beta)(b+2\beta).\beta^3} \cdots\cdot$$

$$\varphi(b+\beta) = 1 + \frac{x}{(b+\beta).\beta} + \frac{x^2}{1.2(b+\beta)(b+2\beta).\beta^2} + \frac{x^3}{1.2.3(b+\beta)(b+2\beta)(b+3\beta).\beta^3} \cdots\cdot$$

gegeben. Zieht man diese von einander ab, so erhält man

1. $$\varphi(b) - \varphi(b+\beta) = \frac{x}{b(b+\beta)} + \frac{x^2}{b(b+\beta)(b+2\beta).\beta} + \frac{x^3}{1.2.b(b+\beta)(b+2\beta)(b+3\beta).\beta^2} \cdots\cdot$$
$$= \frac{x}{b(b+\beta)}\varphi(b+2\beta).$$

---

*) *Exercices du calc. intégr. T. I. pag.* 367.

**) Wie Euler, der den wahren Werth von $\frac{A}{A_1}$ noch nicht kannte (*Opusc. anal. T. II. pag.* 216), wirklich glaubt.

***) Man vergleiche Euleri *Opusc. anal. T. II. p.* 217 ff., *Mém. de l'acad. de Pétersb. T. VI. p.* 12 ff.

Hieraus folgt

$$\frac{\varphi(b)}{\varphi(b+\beta)} = 1 + \frac{x}{b(b+\beta)\frac{\varphi(b+\beta)}{\varphi(b+2\beta)}},$$

also

$$\frac{\varphi(b+\beta)}{\varphi(b+2\beta)} = 1 + \frac{x}{(b+\beta)(b+2\beta)\frac{\varphi(b+2\beta)}{\varphi(b+3\beta)}},$$

und eben so kann man wieder den Werth von $\frac{\varphi(b+2\beta)}{\varphi(b+3\beta)}$ finden. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man

$$\frac{\varphi(b)}{\varphi(b+\beta)} = 1 + \cfrac{x}{b(b+\beta)+\cfrac{bx}{b+2\beta+\cfrac{x}{b+3\beta+\cfrac{x}{b+4\beta \text{ etc.}}}}}$$

oder

$$\frac{b\varphi(b)}{\varphi(b+\beta)} = F[b+x:(b+\beta)+x:(b+2\beta)+x:(b+3\beta)+....].... = S,$$

vorausgesetzt, dafs man den weggelassenen Factor $\frac{\varphi(b+m\beta)}{\varphi(b+(m+1)\beta)}$ ohne Nachtheil für das Resultat vernachlässigen darf.

Sobald man also den Werth der zwei Reihen $\varphi(b)$, $\varphi(b+\beta)$ kennt, so ist dadurch mittelbar der Werth des Kettenbruchs S gefunden. Zur unmittelbaren Summation führen folgende Betrachtungen. Es ist

$$\frac{\partial\varphi(b)}{\partial x} = \frac{1}{b.\beta} + \frac{x}{b(b+\beta)\beta^2} + \frac{x^2}{2b(b+\beta)(b+2\beta)\beta^3} + ...$$

$$\frac{x.\partial^2\varphi(b)}{\partial x^2} = \frac{x}{b(b+\beta)\beta^2} + \frac{x^2}{b(b+\beta)(b+2\beta)\beta^3} + ...$$

Hieraus folgt

$$2.\quad \varphi(b) = \frac{\beta^2.x\,\partial^2\varphi(b)}{\partial x^2} + \frac{b.\beta\,\partial\varphi(b)}{\partial x}$$

und

$$\varphi(b+\beta) = \frac{b.\beta\,\partial\varphi(b)}{\partial x},$$

also

$$S = \frac{b\varphi b}{\varphi(b+\beta)} = \frac{b.\varphi(b)\,\partial x}{b.\beta\,\partial\varphi(b)} = \frac{\varphi(b)\,\partial x}{\beta.\partial\varphi(b)}$$

und

$$3.\quad \frac{\partial\varphi(b)}{\partial x} = \frac{\varphi(b)}{\beta.S},$$

also

$$4.\quad \frac{\partial^2\varphi(b)}{\partial x^2} = \frac{\partial\varphi(b)}{\beta.\partial x.S} - \frac{\varphi(b)\,\partial S}{\beta.\partial x.S^2}.$$

Substituirt man die Werthe (3.) und (4.) in (2.), so hat man

$$\varphi(b) = \frac{\beta.x\partial\varphi(b)}{\partial x.S} - \frac{\beta.x\varphi(b)\partial S}{S^2\,\partial x} + \frac{b.\varphi(b)}{S} = \frac{x.\varphi(b)}{S^2} - \frac{\beta.x\varphi(b)\partial S}{S^2\,\partial x} + \frac{b.\varphi(b)}{S},$$

$$1 = \frac{x}{S^2} - \frac{\beta.x\,\partial S}{S^2\,\partial x} + \frac{b}{S},$$

oder $$5. \quad S^2\partial x - x\partial x + \beta x\partial S - bS\partial x = 0.$$

Integrirt man diese Gleichung, so findet man den Werth von S oder des Kettenbruches, und zwar mufs man das Integral so einrichten, dafs für den Werth $x=0$; $S=b$ wird, weil, wenn $x=0$ wird, $\varphi(b)=1$, $\varphi(b+\beta)=1$, folglich $S=b$ wird.

Betrachtet man die Gleichung (5.) als gegeben, so kann man den Kettenbruch S unmittelbar aus derselben ableiten. Denn setzt man $S=b+\frac{x}{S'}$ und substituirt diesen Werth in der Gleichung (5.), so hat man

$$S'^2\partial x - x\partial x + \beta x\partial S' - (b+\beta)S'\partial x = 0.$$

Diese Gleichung ist der Gleichung (5.) durchaus ähnlich, nur dafs $b+\beta$ statt b gesetzt ist. Es ist daher S' dieselbe Function von $b+\beta$, wie S von b; man hat daher $S'=b+\beta+\frac{x}{S''}$, $S''=b+2\beta+\frac{x}{S'''}$ etc., und so erhält man den ganzen Kettenbruch.

Man kann die Gleichung (5.) leicht auf die bekannte Riccatische Gleichung zurückführen. Denn man setze:

$$S = x^{\frac{b}{\beta}}.z, \quad \text{so ist} \quad \partial S = x^{\frac{b}{\beta}}\partial z + \frac{b}{\beta}x^{\frac{b}{\beta}-1}z\partial x,$$

und man erhält durch Substitution dieses Werthes die Gleichung

$$x^{\frac{2b}{\beta}}.z^2\partial x - x\partial x + \beta.x^{\frac{b}{\beta}+1}\partial z = 0,$$

oder

$$6. \quad \partial z - \frac{\partial x}{\beta.x^{\frac{b}{\beta}}} + \frac{x^{\frac{b}{\beta}-1}}{\beta}z^2\partial x = 0.$$

Setzt man nun $x^{\frac{b}{\beta}}=t$, oder $x=t^{\frac{\beta}{b}}$, so hat man $\partial x = \frac{\partial t}{x^{\frac{b}{\beta}-1}}.\frac{\beta}{b}$, und substituirt man diesen Werth in (6.), so hat man:

$$7. \quad \partial z - \frac{1}{b}.\frac{\partial t}{x^{\frac{2b}{\beta}-1}} + \frac{1}{b}.z^2\partial t = \partial z - \frac{1}{b}\partial t.t^{\frac{\beta}{b}-2} + \frac{1}{b}z^2\partial t = 0.$$

Die letzte Form ist die, unter welcher die Riccatische Gleichung gewöhnlich dargestellt wird.

Die Möglichkeit, die unmittelbare Summe des Kettenbruchs S zu finden, hängt also von der Möglichkeit der Integration der Gleichung (7.) ab. Diese kann aber bekanntlich nur in dem Falle geleistet werden, wenn $\frac{\beta}{b}-2$ entweder $=2$, oder in der Form $\frac{4i}{2i\pm1}$ enthalten ist. Es mufs also $\frac{\beta-2b}{b}=\frac{-4i}{2i\pm1}$ oder $\beta=\frac{\pm2b}{2i\pm1}$ sein. Setzt man $\frac{b}{2i\pm1}=\alpha$, so ist

$\beta = \pm 2\alpha$, $b = (2i \pm 1)\alpha$, und daher die allgemeine Form des Kettenbruchs, dessen Summe möglicher Weise durch die Riccatische Gleichung gefunden werden kann:

$$(A.) \qquad (2i \pm 1)\alpha + \cfrac{x}{(2i \pm 3)\alpha + \cfrac{x}{(2i \pm 5)\alpha \text{ etc.}}}$$

Der Kettenbruch $F(n+x : 3n+x : 5n \ldots.)$ ist in dieser Form enthalten. Man hat in diesem Falle $b = n$, $\beta = 2n$, und es mufs daher die Gleichung $\partial z - \frac{1}{n}\partial t + \frac{1}{n}z^2 \partial t = 0$ aufgelöst werden. Hieraus folgt:

$$\partial t = \frac{\partial z}{\frac{1}{n}(1-z^2)}, \quad \frac{t}{n} = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + C, \quad e^{\frac{2t}{n}} = \frac{C(1+z)}{1-z}, \quad z = \frac{e^{\frac{2t}{n}} - C}{e^{\frac{2t}{n}} + C}.$$

Setzt man statt t seinen Werth $x^{\frac{1}{2}}$, statt z seinen Werth $\frac{S}{x^{\frac{1}{2}}}$, so hat man

$$S = \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n}} - C\right)}{e^{\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n}} + C}.$$

Für den Werth $x = 0$ mufs in diesem Falle $S = n$ werden; da aber der Zähler im Werthe von S von selbst Null wird, so mufs auch der Nenner von selbst Null werden, d. h. es mufs $C = -1$ sein, also ist $S = \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(e^{\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n}} - 1\right)}{e^{\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{n}} + 1}$. Dafs der weggelassene Rest hier keinen schädlichen Einfluſs auf das Resultat ausüben kann, läfst sich aus denselben Gründen wie in §. 63. zeigen.

Ist $x = 1$, so hat man $S = \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{e^{\frac{2}{n}} + 1}$, wie schon früher gefunden wurde.

Hat man den Kettenbruch $F(n-x : 3n-x : 5n \ldots.)$, so ist

$$S = \frac{\sqrt{-x}\left(e^{\frac{2\sqrt{-x}}{n}} - 1\right)}{e^{\frac{2\sqrt{-x}}{n}} + 1} = \sqrt{x}.\tang\frac{\sqrt{x}}{n},$$

oder wenn man statt x den Werth x^2 substituirt, so hat man:

$$F[n-x^2 : 3n-x^2 : 5n \ldots.] = x.\tang\frac{x}{n},$$

und wenn $n = 1$ ist:

$$\tang x = F[x : 1-x^2 : 3-x^2 : 5 \text{ etc.}]$$

wie schon früher gefunden wurde.

Kann der Kettenbruch nicht unter die Form (*A.*) gebracht werden, so ist es nach dem jetzigen Standpuncte der Wissenschaft nicht möglich, vermöge der Riccatischen Gleichung, den Werth desselben in einem geschlossenen Ausdrucke zu erhalten. Es bleibt alsdann noch das Mittel übrig, diesen Werth mittelbar durch Summation der Reihen, die durch $\varphi(b)$ und $\varphi(b+\beta)$ bezeichnet wurden, zu finden. Diese Summation gehört aber nicht mehr in das Gebiet der Kettenbrüche, sondern zur Theorie der Reihen. Andeutungen zur Auffindung dieser Summen vermittelst bestimmter Integrale findet man in Fourier's *Théorie de la chaleur* §. 310 ff.

74.

Im Vorhergehenden sind einige ziemlich allgemeine Formen von Kettenbrüchen auf eine directe Weise summirt worden. Alle Formen aufzuzählen, ist hier eben so wenig möglich, wie bei den Reihen, und noch weniger kann die Summation eines jeden gegebenen Kettenbruchs direct geleistet werden. Zu den Kettenbrüchen, deren directe Summation noch nicht geleistet ist, und von besonderem Interesse wäre, gehören erstens: die Kettenbrüche, bei welchen dieselben Theilnenner periodisch wiederkehren, während die Theilzähler nach einem gewissen Gesetze fortschreiten, wie solche z. B. in §. 49. gefunden wurden; ferner diejenigen, in welchen gewisse Theilbrüche immer wiederkehren, wohin z. B. der früher §. 59. gefundene Kettenbruch $e^t = F(1:1-t:1+t:2-t:3+t:2\ldots.)$ gehört, in welchem der Theilbruch $\frac{t}{2}$ immer wiederkehrt.

Überhaupt sind die Kettenbrüche, bei welchen die Zeichen abwechselnd positiv und negativ sind, noch am wenigsten bearbeitet, und man sieht leicht, dafs ihre Summation in keinem Falle aus den Betrachtungen des §. 69. abgeleitet werden kann, weil sie nicht unter die Form des dort aufgestellten Kettenbruchs S gebracht werden können. Besondere Aufmerksamkeit verdient wohl die, den in §. 66. und §. 70. summirten Kettenbrüchen ähnliche Form, nemlich:

$$1. \quad S = m - \cfrac{n}{m+1+\cfrac{(n+1)}{m+2-\cfrac{(n+2)}{m+3+\cfrac{(n+3)}{m+4}}}} \text{ etc.}$$

Ist $n \leqq m$, so convergirt der Kettenbruch (§. 55.) und ist irrational (§. 64.); ist aber $n > m$, so könnte man hier wieder den Kettenbruch in einen

endlichen verwandeln. Man setze nemlich:

$$m-1+\frac{n-1}{S}=a_1,\quad m-2-\frac{(n-2)}{a_1}=a_2,\quad m-3+\frac{n-3}{a}=a_3,\quad m-4-\frac{(n-4)}{a_3}=a_4,$$

so ist

$$S=\frac{-(n-1)}{m-1-a_1},\quad a_1=\frac{n-2}{m-2-a_2},\quad a_2=\frac{-(n-3)}{m-3-a_3},\quad a_3=\frac{n-4}{m-4-a_4},\ \ldots,$$

also

$$2.\qquad S=\cfrac{-(n-1)}{m-1-\cfrac{(n-2)}{m-2+\cfrac{(n-3)}{m-3-\cfrac{(n-4)}{m-4\text{ etc.}}}}}$$

Man würde indessen sehr irren, wenn man hier die beiden Kettenbrüche (1.) und (2.) als identisch ansehen wollte. Ist z. B. $n=3$, $m=1$, so verwandelt sich der Kettenbruch (2.) in

$$\cfrac{-2}{0-\cfrac{1}{-1+\cfrac{0}{-2-\cfrac{-1}{-3+\cfrac{-2}{-4-\cfrac{-3}{-5\text{ etc.}}}}}}}=\cfrac{-2}{0+\cfrac{1}{1+\cfrac{0}{2+\cfrac{1}{3-\cfrac{2}{4+\cfrac{3}{5-\cfrac{4}{6\text{ etc.}}}}}}}}$$

Da nun der Kettenbruch $2+\cfrac{1}{3-\cfrac{2}{4\text{ etc.}}}$ convergirt und gröfser wie Null ist, so wäre der Werth von $S=-2$. Man überzeugt sich aber leicht, dafs der Werth von $1-\cfrac{3}{2+\cfrac{4}{3-\cfrac{5}{4\text{ etc.}}}}$ positiv und kleiner wie 1 ist, weil allgemein der Kettenbruch $m-\cfrac{m+2}{m+1+\cfrac{m+3}{m+2-\cfrac{(m+4)}{m+3\text{ etc.}}}}$ positiv und $\begin{matrix}<m\\>m-1\end{matrix}$ ist. Denn bleibt man bei irgend einem Theilbruche $\frac{m+r}{m+r-1}$ stehen, so hat man $\frac{m+r}{m+r-1}>1$, folglich $\cfrac{m+r-1}{m+r-2+\cfrac{m+r}{m+r-1}}\begin{matrix}<1\\>0\end{matrix}$, $\cfrac{m+r-2}{m+r-3-\cfrac{(m+r-1)}{m+r-2+\cfrac{m+r}{m+r-1}}}>1$, $\cfrac{m+r-3}{m+r-4+\cfrac{m+r-2}{m+r-3\text{ etc.}}}\begin{matrix}<1\\>0\end{matrix}$. Fährt man auf diese Weise fort, so findet sich,

dafs der Kettenbruch $m-\cfrac{m+2}{m+1+\ddots+\cfrac{m+r}{m+r-1}}$ $\begin{matrix}>m-1\\<m\end{matrix}$ ist, und da r unbestimmt geblieben ist, so gilt dasselbe auch von dem ins Unendliche fortlaufenden Kettenbruch.

Die Summation einiger besonderen Formen findet man in Laplace *Méc. cél. T. IV. p.* 254. und Legendre *Tr. de fonct. ellipt. T. II. p.* 508. Die Summation einer besonderen Gattung von Kettenbrüchen wird noch später (Kap. 6.) vorkommen.

(Die Fortsetzung folgt.)

5.

Beweis der Lehrsätze No. 40. und 41. im Anhange zum geometrischen Werke des Herrn Steiner*).

(Vom Herrn *Leithold*, Zögling der Berliner Gewerbschule.)

[40.] „Legt man an je zwei von drei Kreisen, α, β, γ (Taf. I. „Fig. 2.), welche irgend einem Dreiseit xyz eingeschrieben „sind, eine (vierte) gemeinschaftliche Tangente A, A_1, A_2, „so bilden diese ein Dreiseit AA_1A_2, in welches sich un„zählige Dreiecke aa_1a_2 so beschreiben lassen, dafs ihre „Seiten jene Kreise berühren; nemlich: legt man aus einem „beliebigen Punct a, in A, eine Tangente aa_1 an den Kreis „γ, aus dem dadurch bestimmten Puncte a_1, in A_1, ferner „eine Tangente a_1a_2 an den Kreis α, so berührt allemal die „Gerade aa_2 den Kreis β." — Dieser Satz ist jedoch nur ein specieller Fall des folgenden allgemeinen Satzes (links):

[41.] „Werden einem gege„benen Dreiseit xyz belie„bige n Kegelschnitte einge„schrieben, und man legt an „je zwei, nach der Reihe un„mittelbar auf einander fol„gende Kegelschnitte, eine „(vierte) gemeinschaftliche „Tangente A_1, A_2, A_3, ... A_n, „so lassen sich unzählige „nEcke so beschreiben, dafs „ihre Ecken, nach der Reihe „in jenen Tangenten liegen, „und dafs ihre Seiten, nach „der Ordnung, jene Kegel„schnitte berühren.

[41.] „Werden einem gege„benen Dreieck $\xi\eta\zeta$ beliebige „n Kegelschnitte umschrie„ben, und man berücksichtigt „die n Puncte B_1, B_2, B_3, ..., „B_n, in welchen je zwei, nach „der Reihe unmittelbar auf „einander folgende Kegel„schnitte sich schneiden, so „lassen sich unzählige nEcke „so beschreiben, dafs ihre Sei„ten, nach der Reihe, durch „jene Puncte gehen, und dafs „ihre Ecken, nach der Ord„nung in jenen Kegelschnit„ten liegen."

---

*) Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Von J. Steiner. Erster Theil pag. 306.

Zum allgemeinen Verständnifs wird es zweckmäfsig sein, die zum Beweise nöthigen, im Werke des Herrn Steiner vorangehenden Sätze, und die darin vorkommenden, hierauf Bezug habenden geometrischen Grundgebilde, nebst deren Eigenschaften, hier kurz anzuführen.

1. Wenn in der Ebene zwei Gerade, A und A_1, (Fig. 2.) und ein Punct B aufserhalb derselben, der Lage nach gegeben sind, so trifft jeder Strahl, wie a, b, c, d, e, der durch den Punct B geht, jede der Geraden A und A_1 in einem Puncte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$; je zwei solche Puncte, wie $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, die durch denselben Strahl a bestimmt werden, heifsen „entsprechende Puncte," und die Geraden A und A_1 heifsen in Ansehung aller dieser entsprechenden Puncte „projectivisch." Nun kann man die gegenseitige Lage sämmtlicher Puncte in jeder der Geraden A und A_1 festhalten, während man die Geraden selbst in eine beliebige andere („schiefe") Lage zu einander bringt (Fig. 3.). In jeder Lage aber heifsen diejenigen Geraden, wie a, b, c, d, e, welche durch entsprechende Puncte gehen, „Projectionsstrahlen."

(1. *a*.) Wenn in der Ebene zwei Puncte, B und B_1 (Fig. 2. *a*.) und eine Grade A aufserhalb derselben der Lage nach gegeben sind, so geht durch jeden Punct, wie $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, in der Geraden A, sowohl ein Strahl aufserdem durch B, wie a, b, c, d, e, als durch B_1, wie a_1, b_1, c_1, d_1, e_1; die Totalität aller der Strahlen, a, $b, c, d, e, \ldots$ oder $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, \ldots$, welche durch denselben Punct, B oder B_1 gehen, heifst ein „ebener Strahlbüschel," der Punct B oder B_1 dessen „Mittelpunct," und die Geraden a, b, c, ..., oder a_1, b_1, c_1, ..., „Strahlen" desselben; je zwei solche Strahlen, wie a und a_1, die durch denselben Punct $\mathfrak{a}$ bestimmt werden, heifsen „entsprechende Puncte," und die ebenen Strahlbüschel, B und B_1, heifsen in Ansehung aller dieser entsprechenden Strahlen „projectivisch." Nun kann man die gegenseitige Lage der sämmtlichen Strahlen in jedem der Strahlbüschel B und B_1 festhalten, während man diese selbst in eine beliebige andere („schiefe") Lage gegeneinander bringt (Fig. 3. *a*.).

2. Jede zwei, in einer Ebene schiefliegende, projectivische Gerade, wie A und A_1 (Fig. 3.), erzeugen nun, nach [§. 38. IV. links] des Steinerschen Werkes, einen Kegelschnitt, nemlich, die Geraden A und A_1 selbst, nebst allen ihren Projectionsstrahlen, sind die gesammten Tangenten eines bestimmten Kegelschnitts.

(2. *a.*) Jede zwei, in einer Ebene schiefliegende, projectivische (ebene) Strahlbüschel, wie B und B_1 (Fig. 3. *a.*), erzeugen nun, nach [§. 38. IV. rechts] des Steinerschen Werkes, einen Kegelschnitt, der durch ihre Mittelpuncte geht, nämlich, diese und die Durchschnitte aller entsprechenden Strahlenpaare sind die gesammten Puncte eines bestimmten Kegelschnitts.

Die ferner nöthigen Sätze aus dem Steinerschen Werke sind folgende:

[§. 38. III.]

3. Jede zwei Tangenten eines Kegelschnitts sind in Ansehung der Punctenpaare, in welchen sie von den übrigen Tangenten desselben geschnitten werden, projectivisch, und zwar befinden sie sich in schiefer Lage.

(3. *a.*) Jede zwei Puncte eines Kegelschnitts sind die Mittelpuncte zweier projectivischen ebenen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen Puncten des Kegelschnitts schneiden, und die sich also in schiefer Lage befinden.

[§. 10. β.]

4. Das ganze System der einander entsprechenden Punctenpaare zweier projectivischen Geraden ist bestimmt, sobald irgend drei Paare gegeben sind, d. h. wenn irgend drei entsprechende Punctenpaare gegeben sind, so kann zu jedem gegebnen vierten Punct der einen Geraden, der

(4. *a.*) Das ganze System der einander entsprechenden Strahlenpaare zweier projectivischen ebenen Strahlbüschel ist bestimmt, sobald irgend drei Paare gegeben sind, d. h. wenn irgend drei entsprechende Strahlenpaare gegeben sind, so kann zu jedem gegebenen vierten Strahle des

entsprechende Punct der andern Geraden gefunden werden.

einen Strahlbüschels, der entsprechende Strahl des andern Strahlbüschels gefunden werden.

[§. 12. III.]

5. Ist bei irgend einer Anzahl n Geraden, in irgend einer bestimmten Ordnung genommen, jede mit der darauf folgenden projectivisch, so ist jede mit jeder, also namentlich auch die erste mit der letzten, projectivisch.

(5. *a.*) Ist bei irgend einer Anzahl n ebener Strahlbüschel, in irgend einer bestimmten Ordnung genommen, jeder mit dem darauf folgenden projectivisch, so ist jeder mit jedem, also namentlich auch der erste mit dem letzten, projectivisch.

Und: [§. 41. I.]

6. Durch irgend fünf Tangenten, wie A, A_1, a, b, c (Fig. 3.), ist ein Kegelschnitt bestimmt, d. h. fünf beliebige Gerade in einer Ebene können allemal von einem, aber nur von einem einzigen Kegelschnitt berührt werden; indem man immer zwei der Geraden (A, A_1), als projectivische Gerade, und die drei übrigen (a, b, c) als Projectionsstrahlen derselben ansehen kann, so dafs die projectivische Beziehung vollständig bestimmt ist.

(6. *a.*) Durch irgend fünf Puncte, wie B, B_1, a, b, c (Fig. 3. *a.*), ist ein Kegelschnitt bestimmt, d. h. fünf Puncte in einer Ebene liegen allemal in einem, aber nur in einem einzigen Kegelschnitt; indem man immer zwei der Puncte (B, B_1), als Mittelpuncte zweier projectivischen ebenen Strahlbüschel, und die drei übrigen (a, b, c), als Durchschnitte entsprechender Strahlenpaare ansehen kann, so dafs die projectivische Beziehung vollständig bestimmt ist.

Nach diesen Voranschickungen lassen sich die vorgelegten Sätze folgendermaafsen beweisen:

Beweis des Lehrsatzes unter [Nr. 40.].

Da die Geraden A und A_1 den Kreis (Kegelschnitt) γ berühren, so sind sie (3.) in Ansehung der Puncte, in welchen sie von den übrigen Tangenten, wie x, y, z, a_2, geschnitten werden, projectivisch, folglich sind

$\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{z}_1$, und namentlich auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ entsprechende Puncte der projectivischen Geraden A und A_1. Da eben so die Geraden A_1 und A_2 den Kreis (Kegelschnitt) α berühren, so sind sie (3.) ebenfalls in Ansehung der Puncte, in welchen sie von den übrigen Tangenten desselben, wie x, y, z, a, geschnitten werden, projectivisch, so dafs $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$, und namentlich auch $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ entsprechende Puncte der projectivischen Geraden A_1 und A_2 sind. Da nun A mit A_1, und A_1 auch mit A_2 projectivisch ist, so mufs auch (5.) A_2 mit A projectivisch sein, und zwar sind, dem Vorigen zufolge, $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}_2$ und $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{z}$, drei entsprechende Punctenpaare, wodurch (4.) die projectivische Beziehung der Geraden A_2 und A vollständig, und also (6.) auch der durch sie erzeugte Kegelschnitt bestimmt ist; es ist nemlich derjenige, welcher die Geraden A_2, A und deren Projectionsstrahlen x, y, z berührt; dies ist aber kein anderer als der Kreis β. Folglich (2.) müssen auch alle übrigen Projectionsstrahlen der Geraden A_2 und A den Kreis (Kegelschnitt) β berühren. Nun waren in den Geraden A und A_1, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ entsprechende Puncte; dem Puncte $\mathfrak{a}_1$ in der Geraden A_1 entsprach ferner in der Geraden A_2 der Punct $\mathfrak{a}_2$, folglich mufs der Punct $\mathfrak{a}_2$ in der Geraden A_2 dem Puncte $\mathfrak{a}$ in der Geraden A entsprechen; demnach (1.) ist a_1 (oder $\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}$) ein Projectionsstrahl der projectivischen Geraden A_2 und A, und mufs also (2.) den durch dieselben bestimmten Kreis (Kegelschnitt) β berühren.

Da nun der Punct $\mathfrak{a}$ in der Geraden A ganz willkürlich angenommen worden ist, so mufs allemal die, durch die Construction von $\mathfrak{a}$ aus bestimmte Gerade a_1 (oder $\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}$) den Kreis (Kegelschnitt) β berühren, folglich kann man unzählige Dreiecke so beschreiben, dafs ihre Ecken in den Geraden A, A_1, A_2, liegen und ihre Seiten die Kreise (Kegelschnitte) γ, α, β berühren, was zu beweisen war.

Da die vorher angeführten Sätze nicht auf den Kreis insbesondere Bezug haben, sondern allgemein für Kegelschnitte gelten, so wird auch der bewiesene Satz nicht auf den Kreis beschränkt sein, sondern mufs für jede Art von Kegelschnitten gelten. Da aber an drei Gerade, A, A_1, A_2, unendlich viele berührende Kegelschnitte möglich sind, so wird sich der Satz hiernach modificiren. Demnach ist auch der Beweis für den obigen allgemeinen Satz (links) ganz analog geführt.

Beweis der Lehrsätze unter [No. 41.].

Es seien B_1, B_2, B_3, ... B_n beliebige Kegelschnitte, die einem gegebenen Dreiseit $x\,y\,z$ eingeschrieben sind, und man habe, der Reihe nach, an B_1, B_2, B_2 und B_3, B_3 und B_4, ..., B_n und B_1 immer die vierte gemeinschaftliche Tangente A_1, A_2, A_3, ..., A_n gelegt. Die Puncte, in welchen die Geraden x, y, z, die Geraden A_1, A_2, A_3, ..., A_n schneiden, mögen respective ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3; ....; ξ_n, η_n, ζ_n heifsen. Man nehme nun in der Geraden A_1 einen ganz beliebigen Punct a_1 an, ziehe aus demselben die zweite Tangente a_1 an den Kegelschnitt B_2 (die andre Tangente ist die Gerade A_1 selbst), so wird jene die Gerade A_2 in irgend einem Puncte a_2 schneiden; aus diesem lege man wieder eine Tangente a_2 an den Kegelschnitt B_3, und fahre so fort, bis man aus dem Puncte a_{n-1} in der Geraden A_{n-1} eine Tangente a_{n-1} an den Kegelschnitt B_n gelegt hat; nun wird a_{n-1} die Gerade A_n in irgend einem Puncte a_n schneiden, und es ist dann zu beweisen, dafs die Gerade $a_n\,a_1$ (oder a_n) den Kegelschnitt B_1 berührt, was ganz auf dieselbe Weise geschieht, wie beim vorigen Satz. Denn, da die Geraden A_1 und A_2 den Kegelschnitt B_2 berühren, so sind sie (3.) in Ansehung der Puncte, in welchen sie von den übrigen Tan-

Es seien A_1, A_2, A_3, ... A_n beliebige n Kegelschnitte, die einem gegebenen Dreieck $\xi\,\eta\,\zeta$ umschrieben sind, und man habe die Puncte B_1, B_2, B_3, ... B_n fixirt, in welchen sich die Kegelschnitte A_1 und A_2, A_2 und A_3, A_3 und A_4, ..., A_n und A_1 (aufser in den drei Puncten ξ, η, ζ) zum viertenmale schneiden. Die Strahlen, welche von den Puncten B_1, B_2, B_3, ..., B_n nach den Puncten ξ, η, ζ gehen, mögen respective x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; ....; x_n, y_n, z_n heifsen. Nun ziehe man durch B_1 eine ganz beliebige Gerade b_1, diese wird den Kegelschnitt A_2 zum zweitenmale in irgend einem Puncte b_2 schneiden; aus b_2 ziehe man dann wieder durch B_2 eine Gerade b_2, welche den Kegelschnitt A_3 zum zweitenmale in irgend einem Puncte b_3 schneiden wird, und fahre so fort, bis man aus dem Puncte b_{n-1} im Kegelschnitt A_{n-1} eine Gerade b_{n-1} durch B_{n-1} gezogen hat; diese wird den Kegelschnitt A_n in irgend einem Puncte b_n schneiden. Zieht man nun aus diesem durch B_n eine Gerade b_n, so schneidet letztere die Gerade b_1 in irgend einem Puncte b_1, und es ist dann zu beweisen, dafs b_1 ein Punct des Kegelschnitts A_1 ist. Da nun die Puncte B_1 und B_2 im Kegelschnitt A_2 liegen, so sind sie (3. *a.*) die Mittelpuncte zweier

genten desselben, wie x, y, z, a_1, geschnitten werden, projectivisch, folglich sind ξ_1 und ξ_2, η_1 und η_2, ζ_1 und ζ_2, und namentlich auch a_1 und a_2 entsprechende Puncte; eben so sind die Geraden A_2 und A_3, A_3 und A_4, ..., A_{n-1} und A_n projectivisch, und zwar berühren ihre Projectionsstrahlen respective die Kegelschnitte B_3, B_4, ..., B_n; demnach entsprechen sich in ihnen der Reihe nach die Puncte: ξ_2, η_2, ζ_2, a_2 und ξ_3, η_3, ζ_3, a_3; ξ_3, η_3, ζ_3, a_3 und ξ_4, η_4, ζ_4, a_4; ....; ξ_{n-1}, η_{n-1}, ζ_{n-1}, a_{n-1} und ξ_n, η_n, ζ_n, a_n; folglich (5.) sind auch A_n und A_1 projectivisch, und zwar ist ihre projectivische Beziehung bestimmt, da (4.) drei entsprechende Punctenpaare: ξ_n und ξ_1, η_n und η_1, ζ_n und ζ_1 gegeben sind. Folglich (6.) ist auch der durch ihre Projectivität erzeugte Kegelschnitt bestimmt; es ist nemlich derjenige, welcher sie (A_n und A_1) selbst, und die Projectionsstrahlen x, y, z berührt. Dies ist aber der Kegelschnitt B_1, folglich (2.) müssen alle andere Projectionsstrahlen der projectivischen Geraden A_n und A_1 ebenfalls den Kegelschnitt B_1 berühren. Aus dem Obigen geht aber hervor, dafs in den Geraden A_n und A_1, a_n und a_1 entsprechende Puncte sind, also (1.) ist a_n ein Projectionsstrahl dieser Geraden, und mufs demnach den Kegelschnitt B_1 berühren.

projectivischen ebenen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen Puncten des Kegelschnitts, wie ξ, η, ζ, b_2 schneiden; folglich sind x_1 und x_2, y_1 und y_2, z_1 und z_2, und namentlich auch b_1 und b_2 entsprechende Strahlen der projectivischen ebenen Strahlbüschel B_1 und B_2; eben so sind auch die Puncte B_2, B_3, B_4, ..., B_n die Mittelpuncte ebener Strahlbüschel, deren jeder mit dem folgenden projectivisch ist, und deren entsprechende Strahlen sich respective in den Kegelschnitten A_3, A_4, ..., A_n schneiden. Demnach entsprechen sich in ihnen der Reihe nach die Strahlen: x_2, y_2, z_2, b_2 und x_3, y_3, z_3, b_3; diese und x_4, y_4, z_4, b_4; ....; x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, b_{n-1} und x_n, y_n, z_n, b_n. Folglich (5. a.) sind auch B_n und B_1 die Mittelpuncte zweier projectivischen ebenen Strahlbüschel, und zwar ist ihre projectivische Beziehung bestimmt, da (4. a.) drei entsprechende Strahlenpaare: x_n und x_1, y_n und y_1, z_n und z_1 gegeben sind; daher (6. a.) ist auch der durch ihre Projectivität erzeugte Kegelschnitt bestimmt; es ist nemlich derjenige, welcher durch B_n, B_1, ξ, η und ζ geht; dies ist aber der Kegelschnitt A_1, folglich (2. a.) müssen alle übrigen Durchschnitte entsprechender Strahlenpaare von B_n und B_1, im Kegelschnitt A_1 liegen. Aus dem Obigen geht aber hervor, dafs b_n und b_1 zwei ent-

Da nun der Punct a_1 in der Geraden A_1 ganz willkürlich angenommen worden, der Beweis also für jeden andern in A_1 angenommenen Punct ebenfalls gültig ist, so folgt, dafs man unzählige n Ecke so beschreiben kann, dafs ihre Ecken, nach der Reihe in den Geraden A_1, A_2, A_3, ..., A_n liegen, und ihre Seiten, nach der Ordnung, die Kegelschnitte B_1, B_2, B_3, ..., B_n berühren, was zu beweisen war.

sprechende Strahlen von B_n und B sind, folglich mufs auch ihr Durchschnittspunct b_1 im Kegelschnitt A_1 liegen.

Da nun der Strahl b_1 durch B ganz willkürlich gezogen worden ist, der Beweis also für jeden andern, durch B_1 gezogenen Strahl ebenfalls gilt, so folgt, dafs man unzählige n Ecke so beschreiben kann, dafs ihre Seiten, nach der Reihe, durch die Puncte B_1, B_2, B_3, ..., B_n gehen, und ihre Ecken, nach der Ordnung, in den Kegelschnitten A_1, A_2, A_3, ..., A_n liegen, was zu beweisen war.

6.

Aufstufungen der einfachen Functionen.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Heidelberg.)

§. 1.

Eine Reihe von Functionen, die unter einander unabhängig sein oder auch in einem Zusammenhange stehen können, werden auf die bekannte Weise bezeichnet:

$$\ldots. X_{-3}, X_{-2}, X_{-1}, X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots.$$

Die Function X_0, deren Stellenzahl 0 ist, heifse das Mittelglied. Die Glieder auf seiner Rechten unterscheiden sich von denen auf der Linken dadurch, dafs jene positive, diese negative Stellenzahlen haben. Diese Eigenschaft bestimmt für den Fall, wo ein gemeinschaftliches Bildungsgesetz unter den Gliedern der Reihe angenommen wird, die Verschiedenheit der Ableitungsweise. Die vorgelegte Reihe ist der Annahme nach unbeschränkt oder unendlich; sie kann aber nach Willkür beschränkt oder endlich angenommen werden.

Die Differenzen-Rechnung hat die Glieder dieser Grundreihe weiter untersucht, und gezeigt, welche wichtige Folgerungen sich an eine leitende Grundidee knüpfen lassen. Die Idee, welche dieser Rechnung zu Grunde liegt, ist einfach und besteht darin: dafs sie zwei Nachbarglieder mit einander vergleicht, das frühere von dem spätern abzieht, und den Überschufs beider näher untersucht.

An diese Idee wollen wir folgende ähnliche knüpfen, und von einem vorhergehenden Gliede auf das nachfolgende übergehen und beide zusammen zählen, und ferner das nachfolgende vom vorhergehenden abziehen.

Das zuerst angedeutete Geschäft wollen wir durch das Wort Aufstufung, das zuletzt angedeutete durch Abstufung bezeichnen.

Die Differenzen-Rechnung hat das Grundgeschäft, worauf sie beruht, mit dem griechischen Buchstaben Δ bezeichnet; nach dieser Analogie soll das Geschäft des Aufstufens durch einen andern griechischen Buchstaben ζ und das des Abstufens durch ψ angedeutet werden.

Nach diesen Bemerkungen ergeben sich für die genannten drei Geschäfte, die wir an den Functionen der vorliegenden Reihe vornehmen

können, folgende Gleichungen:

1. für das Geschäft des Aufstufens:

$$\zeta X_n = X_n + X_{n+1},$$

2. für das Geschäft des Unterschied-Nehmens:

$$\Delta X_n = X_{n+1} - X_n,$$

3. für das Geschäft des Abstufens:

$$\psi X_n = X_n - X_{n+1}.$$

Die Functionen nun, die auf die genannte Art behandelt werden sollen, sollen mit dem allgemeinen Namen **aufsteigende Functionen** genannt werden.

Nachdem nun die Principien des Calculs festgestellt sind, so wenden wir uns zuerst zu der Betrachtung der aufstufenden Functionen, und suchen ihre Bildungs- und Ableitungs-Gesetze auf.

§. 2.

Aus dem unter 1. angegebenen Grundgesetze ergeben sich leicht folgende, die Ableitungsweise verdeutlichende Fälle:

$$\begin{array}{llll} \zeta X_0 = X_0 + X_1 & \text{und} & \zeta X_{-1} = X_{-1} + X_0, \\ \zeta X_1 = X_1 + X_2 & - & \zeta X_{-2} = X_{-2} + X_{-1}, \\ \zeta X_2 = X_2 + X_3 & - & \zeta X_{-3} = X_{-3} + X_{-2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

u. s. w. u. s. w.

Diese Darstellungsweise führt auf eine zweite Reihe von folgender Form:

$$\ldots\ \zeta X_{-3},\ \zeta X_{-2},\ \zeta X_{-1},\ \zeta X_0,\ \zeta X_1,\ \zeta X_2,\ \zeta X_3,\ \ldots$$

die man die **erste Aufstufungs-Reihe**, oder schlechthin **Aufstufungs-Reihe** nennen kann. Nimmt man nun weiter Aufstufungen von den ersten Aufstufungen, so werden die Glieder der ersten Aufstufungs-Reihe als Glieder der Grundreihe betrachtet, und man wird von den Gliedern der ersten Aufstufungs-Reihe auf die der zu findenden Reihe, auf dieselbe Weise übergehen, wie man von denen der Grundreihe, auf die der ersten Aufstufungsreihe übergegangen ist. Daraus werden folgende Gleichungen entspringen:

$$\begin{array}{llll} \zeta^2 X_0 = \zeta X_0 + \zeta X_1 & \text{und} & \zeta^2 X_{-1} = \zeta X_{-1} + \zeta X_0, \\ \zeta^2 X_1 = \zeta X_1 + \zeta X_2 & - & \zeta^2 X_{-2} = \zeta X_{-2} + \zeta X_{-1}, \\ \zeta^2 X_2 = \zeta X_2 + \zeta X_3 & - & \zeta^2 X_{-3} = \zeta X_{-3} + \zeta X_{-2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

u. s. w. u. s. w.

Hierin wird unter $\zeta^2 = \zeta\zeta$ die Aufstufung von der Aufstufung, oder die zweite Aufstufung verstanden. Alle, auf die genannte Art gefundenen Glieder vereinigen sich zu folgender Reihe:

$$.... \; \zeta^2 X_{-3}, \; \zeta^2 X_{-2}, \; \zeta^2 X_{-1}, \; \zeta^2 X_0, \; \zeta^2 X_1, \; \zeta^2 X_2, \; \zeta^2 X_3, \; ....$$

die füglich zweite Aufstufungs-Reihe genannt werden mag. Setzen wir diese Ableitung weiter fort, so gelangen wir zur dritten, vierten u. s. w. Aufstufungs-Reihe, und dadurch zu folgender Darstellung:

$$4. \quad \begin{cases} .... \; X_{-2}, & X_{-1}, & X_0, & X_1, & X_2, ... \\ .... \; \zeta X_{-2}, & \zeta X_{-1}, & \zeta X_0, & \zeta X_1, & \zeta X_2, ... \\ .... \; \zeta^2 X_{-2}, & \zeta^2 X_{-1}, & \zeta^2 X_0, & \zeta^2 X_1, & \zeta^2 X_2, ... \\ .... \; \zeta^3 X_{-2}, & \zeta^3 X_{-1}, & \zeta^3 X_0, & \zeta^3 X_1, & \zeta^3 X_2, ... \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{cases}$$

Man kann nun auch den umgekehrten Weg betreten, und von der 3ten auf die 2te, von dieser auf die erste Aufstufungsreihe, dann auf die Grundreihe übergehen, und es läfst sich leicht erkennen, dafs man dadurch auf Reihen kömmt, die vor der Grundreihe liegen, bei denen die Stellenzahlen der Glieder, wie hier, unverändert bleiben, die Exponenten von ζ aber negativ werden und fallen. Die zunächst vor der Grundreihe liegende wird folgende Gestalt haben:

$$.... \; \zeta^{-1} X_{-2}, \; \zeta^{-1} X_{-1}, \; \zeta^{-1} X_0, \; \zeta^{-1} X_1, \; \zeta^{-1} X_2, ...$$

die dieser vorhergehende, folgende:

$$.... \; \zeta^{-2} X_{-2}, \; \zeta^{-2} X_{-1}, \; \zeta^{-2} X_0, \; \zeta^{-2} X_1, \; \zeta^{-2} X_2, ...$$

Die Fortsetzung dieser Ableitung führt zur folgender Zusammenstellung:

$$5. \quad \begin{cases} . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ .... \; \zeta^{-3} X_{-2}, & \zeta^{-3} X_{-1}, & \zeta^{-3} X_0, & \zeta^{-3} X_1, & \zeta^{-3} X_2, ... \\ .... \; \zeta^{-2} X_{-2}, & \zeta^{-2} X_{-1}, & \zeta^{-2} X_0, & \zeta^{-2} X_1, & \zeta^{-2} X_2, ... \\ .... \; \zeta^{-1} X_{-2}, & \zeta^{-1} X_{-1}, & \zeta^{-1} X_0, & \zeta^{-1} X_1, & \zeta^{-1} X_2, ... \\ X_{-2}, & X_{-1}, & X_0, & X_1, & X_2, ... \end{cases}$$

Das Gesetz für die Aufstufungen, welches beiden Darstellungen 4. und 5. zu Grunde liegt, stellt sich durch folgende Gleichungen allgemein dar:

$$6. \quad \zeta^m X_{\pm n} = \zeta^{m-1} X_{\pm n} + \zeta^{m-1} X_{\pm n+1}.$$

$$7. \quad \zeta^{-m} X_{\pm n} = \zeta^{-m-1} X_{\pm n} + \zeta^{-m-1} X_{\pm n+1}.$$

§. 3.

Wir gehen nun, nach der Feststellung der allgemeinen Grundzüge unseres Calculs, zu weiteren Folgerungen über, und stellen zuerst das Ge-

setz, wonach irgend ein Glied einer spätern Aufstufungs-Reihe aus den Gliedern der Grundreihe dargestellt wird, dar.

Setzt man zu dem Ende in (7.) $m=2$ und $+n=0$, so entsteht:

$$\zeta^2 X_0 = \zeta X_0 + \zeta X_1.$$

Stellt man ferner die ersten Aufstufungen ζX_0 und ζX_1 nach den Gleichungen des vorhergehenden §. durch die Glieder der Grundreihe dar, und ordnet sie nach den Stellenzahlen, so erhält man:

$$\begin{aligned}\zeta^2 X_0 = X_0 + X_1 \\ X_1 + X_2,\end{aligned}$$

und hieraus durch Vereinigung:

$$8. \quad \zeta^2 X_0 = X_0 + 2X_1 + X_2.$$

Auf gleiche Weise stellt sich ein Glied der dritten Aufstufungsreihe aus denen der Grundreihe dar, denn wird in (6.) $m=3$ und $+n=0$ gesetzt, so wird

$$\zeta^3 X_0 = \zeta^2 X_0 + \zeta^2 X_1.$$

Entwickelt man den Ausdruck $\zeta^2 X_0$ und $\zeta^2 X_1$ nach der Gleichung (8.), letzteren dadurch, dafs man die Stellenzahlen erhöht, und ordnet die erhaltenen Glieder nach den Stellenzahlen von X, so zieht man hieraus:

$$\begin{aligned}\zeta^3 X_0 = X_0 + 2X_1 + \ X_2 \\ + \ X_1 + 2X_2 + X_3.\end{aligned}$$

Die Vereinigung dieser Glieder erzeugt:

$$9. \quad \zeta^3 X_0 = X_0 + 3X_1 + 3X_2 + X_3.$$

Eben so findet sich folgende Darstellung:

$$\zeta^4 X_0 = X_0 + 4X_1 + 6X_2 + 4X_3 + X_4 \text{ u. s. w.}$$

Man erkennt aus den behandelten Fällen leicht, dafs das Übergangs-Gesetz bei allen Reihen gleich ist, und es wird daher allen Reihen, die gleich weit von einander entfernt liegen, ein gleiches Ableitungsgesetz zu Grunde liegen. Eben so erkennt man leicht, dafs die Glieder der entwickelten Reihe mit Vorzahlen verbunden sind, die mit denen des Binomiums übereinstimmen müssen, da sie auf dieselbe Weise erzeugt werden. Das allgemeine Ableitungsgesetz läfst sich also so vorstellen:

$$10. \quad \zeta^m X_0 = X_0 + \frac{m}{1} X_1 + \frac{m(m-1)}{1.2} X_2 + \ldots + \frac{m}{1} X_{m-1} + X_m.$$

Die Identität der entwickelten Reihe mit der Darstellung des Binomiums wäre vollkommen, wenn die Stellenzahlen von X als Exponenten erschienen. Zeigen wir diese Übertragung der Exponenten auf Stellenzahlen, um eine Übereinstimmung mit dem Binomium herbeizuführen, durch den

griechischen Buchstaben Θ an (cf. Differenzial-Calcul, Mainz bei S. Müller, Pag. 200 u. ff.), wonach also $\Theta^{m-r} X_0$ für X_{m-r} zu setzen ist, so geht die vorstehende Gleichung in folgende über:

$$11. \quad \zeta^m X_0 = X_0 + \frac{m}{1}\Theta^1 X_0 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Theta^2 X_0 + \ldots + \Theta^m X_0,$$

und diese, wenn X_0, das mit jedem Gliede verbunden ist, ausgeschieden wird, in folgende:

$$\zeta^m X_0 = \left(1 + \frac{m}{1}\Theta_1 + \frac{m(m-1)}{1.2}\Theta^2 + \ldots + \Theta^m\right) X_0.$$

Hieraus geht eine ganz kurze Darstellung hervor, und es ist:

$$12. \quad \zeta^m X_0 = (1+\Theta)^m X_0.$$

Berücksichtigen wir, dafs die gemachten Schlüsse nicht allein von dem Mittelgliede der Reihen, X_0, sondern von jedem andern Gliede gelten, so reihen sich hieran folgende Gleichungen:

$$13. \quad \zeta^m X_p = (1+\Theta)^m X_p = X_p + \frac{m}{1} X_{p+1} + \frac{m(m-1)}{1.2} X_{p+2} \ldots.$$

und

$$14. \quad \zeta^m X_{-p} = (1+\Theta)^m X_{-p} = X_{-p} + \frac{m}{1} X_{-p+1} + \frac{m(m-1)}{1.2} X_{-p+2} \ldots.$$

§. 4.

Auf das Zusammenfallen der so eben gewonnenen Entwicklungen mit den Gesetzen des Binomiums gründet sich der weitere Schlufs, dafs die Binomial-Gesetze mit ihren Veränderungen auch auf die Aufstufungen übergetragen werden können. Soll daher ein Glied einer Reihe, die vor der Grundreihe liegt, durch Glieder der Grundreihe dargestellt werden, so ergiebt sich diese Darstellung unmittelbar, wenn wir in der Gleichung (12.) $-m$ statt m setzen, und $\Theta+1$ der Anordnung $1+\Theta$ vorziehen. Hiedurch gewinnen wir

$$15. \quad \zeta^{-m} X_0 = (1+\Theta)^{-m} X_0 = (\Theta+1)^{-m} X_0$$
$$= X_{-m} - \frac{m}{1} X_{-m-1} + \frac{m(m+1)}{1.2} X_{-m-2} - \ldots.$$

Eben so folgt aus (13.) und (14.):

$$16. \quad \zeta^{-m} X_p = (\Theta+1)^{-m} X_p = X_{p-m} - \frac{m}{1} X_{p-m-1} + \ldots.$$

$$17. \quad \zeta^{-m} X_{-p} = (\Theta+1)^{-m} X_{-p} = X_{-p-m} - \frac{m}{1} X_{-p-m-1} + \ldots.$$

Diese Darstellungen lassen jedoch keine Einsicht in die Entwicklung selbst zu, daher theilen wir noch folgende andere mit, die uns Veranlassung zu mancherlei Anwendungen geben wird.

Setzt man nemlich in der Gleichung (6.) $m = 0$, und statt n allmählig die Werthe $-1, -2, -3, \ldots$, so hat man vorerst:

$$X_{-1} = \zeta^{-1} X_{-1} + \zeta^{-1} X_0,$$

und durch Umstellung und gleiche Behandlung folgende:

$$\begin{aligned}
\zeta^{-1} X_0 &= X_{-1} - \zeta^{-1} X_0, \\
-\zeta^{-1} X_{-1} &= -X_{-2} + \zeta^{-1} X_2, \\
\zeta^{-1} X_{-2} &= X_{-3} - \zeta^{-1} X_3, \\
-\zeta^{-1} X_{-3} &= -X_{-4} + \zeta^{-1} X_{-4}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die Substituirung der gefundenen Werthe verschafft die Möglichkeit, die Function $\zeta^{-1} X_0$ durch zwei, drei, vier u. s. w. Glieder der Grundreihe darzustellen, und man hat für die Darstellung durch zwei Glieder:

$$\zeta^{-1} X_0 = X_{-1} - X_2 + \zeta^{-1} X_{-3},$$

durch drei Glieder:

$$\zeta^{-1} X_0 = X_{-1} - X_{-2} + X_{-3} - \zeta^{-1} X_{-3},$$

durch vier Glieder:

$$\zeta^{-1} X_0 = X_{-1} - X_{-2} + X_{-3} - X_{-4} + \zeta^{-1} X_{-4},$$

und allgemein durch $(n+1)$ Glieder:

18. $\zeta^{-1} X_0 = X_{-1} - X_{-2} + X_{-3} - X_{-4} + \ldots . (-)^n X_{-n-1} (-)^{n+1} \zeta^{-1} X_{-n-1}.$

Nehmen wir aber eine Substitution bis ins Unendliche an, so wird auch die Gliederanzahl unbeschränkt sein, und wir erhalten alsdann folgende Gleichung:

19. $\zeta^{-1} X_0 = X_{-1} - X_{-2} + X_{-3} - X_{-4} + \ldots .$

Wir haben demnach zwei Darstellungsweisen für die Glieder der Reihe, welche der Grundreihe vorhergeht, gefunden, und zwar durch eine endliche und unendliche Gliederanzahl. Diese Eigenthümlichkeit der aufstufenden Functionen halten wir fest, und legen sie für weitere Entwickelungen zu Grund. Der Kürze wegen wollen wir die Functionen $\zeta^{-1} X_0$, $\zeta^{-1} X_1$, ... $\zeta^{-2} X_0$ u. s. w., zur Unterscheidung von ζX_0, $\zeta^2 X_0$, ..., durch den Namen negative Aufstufungen bezeichnen.

Die entwickelte Darstellung der zweiten negativen Aufstufung gewinnt sich dadurch, dafs man die Aufstufung von der ersten Aufstufung nimmt, oder, was diesem gleichkömmt, die Gleichungen (18.) und (19.) mit ζ^{-1} vervielfacht, und dann die einzelnen Glieder der Gleichung nach den in (18.) und (19.) gefundenen Vorschriften entwickelt. Suchen wir daher zuerst die Darstellung für eine endliche Glieder-Anzahl, so gewinnen wir

dadurch, dafs wir die Glieder der Gleichung (18.) mit ζ^{-1} vervielfachen:
$\zeta^{-2}X_0 = \zeta^{-1}X_{-1} - \zeta^{-1}X_{-2} + \zeta^{-1}X_{-3} - \ldots (-)^n \zeta^{-1}X_{-n-1}(-)^{n+1}\zeta^{-2}X_{-n-1}$.
Die Gleichung (18.) gilt für $(n+1)$ Glieder der Grundreihe. Damit nun auch hier eine Reihe von $(n+1)$ Gliedern der Grundreihe gewonnen werde, so mufs das erste Glied auf der rechten Seite des Gleichheits-Zeichens $\zeta^{-1}X_{-1}$ nach (18.) so entwickelt werden, dafs $(n+1)$ Glieder der Grundreihe vorkommen. Seine Stellenzahl aber ist um 1 niedriger als die von $\zeta^{-1}X_0$, daher müssen bei der Entwickelung von $\zeta^{-1}X_{-1}$ die Stellenzahlen sämmtlich um 1 erniedrigt werden. Demzufolge erhalten wir:

$$\zeta^{-1}X_{-1} = X_{-1} - X_{-2} + X_{-3} - \ldots (-)^n X_{-n-2}(-)^{n+1}\zeta^{-1}X_{-n-2}.$$

Wird das zweite Glied $-\zeta^{-1}X_{-2}$ auf gleiche Art entwickelt, so müssen die Stellenzahlen der Glieder in der entwickelten Reihe, der Übereinstimmung wegen, so weit herunter geführt werden, dafs das letzte Glied unter folgender Gestalt X_{-n-2} erscheine. Hierzu werden nur n Glieder der Grundreihe nöthig sein, denn es ist

$$-\zeta^{-1}X_{-2} = -X_{-3} + X_{-4} - X_{-5} + \ldots (-)^n X_{-n-2}(-)^{n+1}\zeta^{-1}X_{-n-2}.$$

Behalten wir die angegebene Entwickelungsweise bei, und berücksichtigen wir, dafs die Entwickelung jedes spätern Gliedes ein Glied der Grundreihe weniger liefern wird, so entsteht durch Einführung der entwickelten Reihen und Ordnen nach den Stellenzahlen der Functionen:

$$\begin{aligned}
\zeta^{-2}X_0 = {} & X_{-2} - X_{-3} + X_{-4} - X_{-5} \ldots (-)^n X_{-n-2}(-)^{n+1}\zeta^{-1}X_{-n-2}(-)^{n+1}\zeta^{-2}X_{-n-1} \\
& - X_{-3} + X_{-4} - X_{-5} \ldots (-)^n X_{-n-2}(-)^{n+1}\zeta^{-1}X_{-n-2} \\
& + X_{-4} - X_{-5} \ldots (-)^n X_{-n-2}(-)^{n+1}\zeta^{-1}X_{-n-2} \\
& - X_{-5} \ldots (-)^n X_{-n-2}(-)^{n+1}\zeta^{-1}X_{-n-2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (-)^n X_{-n-2}(-)^{n+1}\zeta^{-1}X_{-n-2}.
\end{aligned}$$

Die Übereinstimmung der Glieder der entwickelten Reihen in verticaler Richtung macht ihre Vereinigung in eine einzige möglich. Berücksichtigt man, dafs das erste Glied einmal, das zweite zweimal, das dritte dreimal u. s. w., das $(n+1)$te $(n+1)$mal vorkommt, so hat man:

$$20. \quad \zeta^{-2}X_0 = X_{-2} - 2X_{-3} + 3X_{-4} - \ldots (-)^n (n+1) X_{-n-2} (-)^{n+1}(n+1)\zeta^{-1}X_{-n-2}(-)^{n+1}\zeta^{-2}X_{-n-1}.$$

Leichter gewinnt man die Darstellung der zweiten negativen Aufstufung, durch eine unendliche Glieder-Anzahl der Grundreihe; denn die Grenzglieder, die bei der vorstehenden Ableitungsweise nöthig werden, fallen weg. Diese Bemerkung führt unmittelbar zu folgender Darstellung:

21. $\zeta^{-2} X_0 = X_{-2} - 2X_{-3} + 3X_{-4} - 4X_{-5} + \ldots.$

Zur dritten negativen Aufstufung führt das Vervielfachen der zweiten mit ζ^{-1}. Es ist also

$$\zeta^{-3} X_0 = \zeta^{-1} X_{-2} - 2\zeta^{-1} X_{-3} + 3\zeta^{-1} X_{-4} \ldots. (-)^n (n+1) \zeta^{-1} X_{-n-2}$$
$$(-)^{n+1} (n+1) \zeta^{-2} X_{-n-2} (-)^{n+1} \zeta^{-3} X_{-n-1}.$$

Werden nun die Ausdrücke $\zeta^{-1} X_{-2}$, $2\zeta^{-1} X_{-3}$, ... in entwickelten Darstellungen, nach Vorschrift der Gleichung (18.), so eingeführt, dafs $(n+1)$ Glieder der Grundreihe erscheinen, so fällt die Stellenzahl des letzten Gliedes der Grundreihe auf $-(n+3)$, und es entsteht folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
\zeta^{-3} X_0 = {} & X_{-3} - X_{-4} + X_{-5} - X_{-6} + \ldots. (-)^n X_{-n-3} (-)^{n+1} \zeta^{-1} X_{-n-3} \\
& - 2X_{-4} + 2X_{-5} - 2X_{-6} + \ldots. (-)^n 2X_{-n-3} (-)^{n+1} 2\zeta^{-1} X_{-n-3} \\
& + 3X_{-5} - 3X_{-6} + \ldots. (-)^n 3X_{-n-3} (-)^{n+1} 3\zeta^{-1} X_{-n-3} \\
& - 4X_{-6} + \ldots. (-)^n 4X_{-n-3} (-)^{n+1} 4\zeta^{-1} X_{-n-3} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (-)^n (n+1) X_{-n-3} (-)^{n+1} (n+1) \zeta^{-1} X_{-n-3} \\
& (-)^{n+1} \left(\frac{n+1}{1} \zeta^{-2} X_{-n-2} + \zeta^{-3} X_{-n-1} \right).
\end{aligned}$$

Auch hier lassen sich die Glieder der Vertical-Reihen vereinigen, wenn man berücksichtigt, dafs

$$1 = \frac{1.2}{1.2},$$
$$1+2 = \frac{2.3}{1.2},$$
$$1+2+3 = \frac{3.4}{1.2},$$
$$1+2+3+4 = \frac{4.5}{1.2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1+2+3+4+5+\ldots.+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}$$

ist. Hieraus entsteht folgende Darstellung der dritten negativen Aufstufung einer Function durch $(n+1)$ Glieder der Grundreihe:

$$\zeta^{-3} X_0 = X_{-3} - \frac{2.3}{1.2} X_{-4} + \frac{3.4}{1.2} X_{-5} - \ldots. (-)^n \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_{-n-3}$$
$$(-)^{n+1} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \zeta^{-1} X_{-n-3} + \frac{n+1}{1} \zeta^{-2} X_{-n-2} + \zeta^{-3} X_{-n-1} \right].$$

Einfacher gewinnt sich die Darstellung der dritten negativen Aufstufung einer Function durch eine unendliche Anzahl von Gliedern der Grundreihe, denn es fallen die beschränkenden Glieder aus dem Calcul weg, und wir

erhalten unmittelbar:

$$\zeta^{-3} X_0 = X_{-3} - \frac{2.3}{1.2} X_{-4} + \frac{3.4}{1.2} X_{-5} - \frac{4.5}{1.2} X_{-6} + \ldots,$$

Der Gang für die Ableitung der höhern negativen Aufstufungen bewegt sich in denselben Grenzen, und bleibt für alle Fälle gleich. Das Bildungsgesetz, welches einer endlichen und unendlichen Gliederanzahl zu Grunde liegt, läfst sich in seiner Allgemeinheit aus den behandelten Fällen erkennen. In Worten es deutlich machen zu wollen, wäre zu weitläufig, daher mag es in folgender Gleichung vorgelegt werden:

22. $$\zeta^{-m} X_0 = X_{-m} - \frac{2.3\ldots.m}{1.2\ldots.(m-1)} X_{-m-1} + \frac{3.4\ldots.(m+1)}{1.2\ldots.(m-1)} X_{-m-2} \ldots.$$
$$(-)^{n-1} \frac{n(n+1)\ldots.(n+m-2)}{1.2\ldots.(m-1)} X_{-m-n+1} (-)^n \frac{n(n+1)\ldots.(n+m-1)}{1.2\ldots.(m-1)} X_{-m-n}$$
$$(-)^{n+1} \left[\frac{(n+1)(n+2)\ldots.(n+m-1)}{1.2\ldots.(m-1)} \zeta^{-1} X_{-m-n} + \frac{(n+1)(n+2)\ldots.(n+m-2)}{1.2\ldots.(m-2)} \zeta^{-2} X_{-m-n+1} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots. + \frac{n+1}{1} \zeta^{-m+1} X_{-n-2} + \zeta^{-m} X_{-n-1} \right],$$

oder in Zeichen:

23. $$\zeta^{-m} X_0 = X_{-m} - \frac{2^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} X_{-m-1} + \frac{3^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} X_{-m-2} \ldots. (-)^n \frac{(n+1)^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} X_{-m-n}$$
$$(-)^{n+1} \left[\frac{(n+1)^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} \zeta^{-1} X_{-n-m} + \frac{(n+1)^{m-2|1}}{1^{m-1|1}} \zeta^{-2} X_{-n-m+1} \ldots. + \frac{n+1}{1} \zeta^{-m+1} X_{-n-2} + \zeta^{-m} X_{-n-1} \right].$$

Für eine unendliche Gliederanzahl gilt folgende Darstellung:

24. $$\zeta^{-m} X_0 = X_{-m} - \frac{2.3\ldots.m}{1.2\ldots.(m-1)} X_{-m-1} + \frac{3.4\ldots.(m+1)}{1.2\ldots.(m-1)} X_{-m-2} - \ldots.,$$

oder

25. $$\zeta^{-m} X_0 = X_{-m} - \frac{2^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} X_{-m-1} + \frac{3^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} X_{-m-2} - \ldots.$$

Die Entwicklungen (24.) und (25.) fallen mit (15.) vollkommen zusammen, wenn man berücksichtigt, dafs

$$\frac{m}{1} = \frac{2^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} = \frac{2.3.4\ldots.(m-1).m}{1.2.3\ldots.(m-1)},$$
$$\frac{m(m+1)}{1.2} = \frac{3^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} = \frac{3.4.5\ldots.(m-1).m(m+1)}{1.2.3\ldots.(m-1)},$$
$$\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3} = \frac{4^{m-1|1}}{1^{m-1|1}} = \frac{4.5.6\ldots.(m-1).m(m+1)(m+2)}{1.2.3\ldots.(m-1)}$$

u. s. w. ist.

§. 5.

Wir wenden uns von der so eben beantworteten Frage zu der umgekehrten: Wie wird ein Glied der Grundreihe aus den Gliedern der Auf-

stufungs-Reihen abgeleitet? Zu dem Ende setzen wir in der Grundgleichung (6.) $m=1$ und $n=0$, und erhalten durch Umstellung

$$26. \quad X_1 = \zeta X_0 - X_0.$$

Diese Gleichung wird uns als Vorschrift für die Ableitungen dienen. Die Stellenzahlen dieser Gleichung können, wie oben gezeigt wurde, nach Willkür erhöht werden. Erhöhen wir sie um 1, so ist

$$X_2 = \zeta X_1 - X_1.$$

Setzt man nun statt des ersten Gliedes ζX_1 auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens den Werth, den man durch Vervielfachen der Gleichung (26.) mit ζ erhält, also $\zeta X_1 = \zeta^2 X_0 - \zeta X_0$, und statt des zweiten Gliedes X_1 den Werth nach (26.) unmittelbar, so erhalten wir

$$\begin{aligned} X_2 = \zeta^2 X_0 &- \zeta X_0 \\ &- \zeta X_0 + X_0, \end{aligned}$$

also

$$27. \quad X_2 = \zeta^2 X_0 - 2\zeta X_0 + X_0.$$

Erhöhen wir hierin die Stellenzahlen, so entsteht:

$$X_3 = \zeta^2 X_1 - 2\zeta X_1 + X_1.$$

Behandeln wir nun die Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auf die eben angegebene Weise nach (26.), so ist

$\zeta^2 X_1 = \zeta^3 X_0 - \zeta^2 X_0$, $\zeta X_1 = \zeta^2 X_0 - \zeta X_0$, und $X_1 = \zeta^{-1} X_0 - X_0$,

also

$$\begin{aligned} X_3 = \zeta^3 X_0 &- \zeta^2 X_0 \\ &- 2\zeta^2 X_0 + 2\zeta X_0 \\ &+ \zeta X_0 - X_0. \end{aligned}$$

Die Vereinigung dieser Glieder erzeugt:

$$X_3 = \zeta^3 X_0 - 3\zeta^2 X_0 + 3\zeta X_0 - X_0.$$

Das Ableitungsgesetz zeigt einen unveränderlichen Gang. Vorzahlen und Exponenten von ζ stimmen mit denen des Binomiums; es wird also allgemein:

$$28. \quad X_n = \zeta^n X_0 - \frac{n}{1}\zeta^{n-1} X_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\zeta^{n-2} X_0 - \ldots . (-)^n X_0$$

oder, wenn X_0 ausgeschieden wird:

$$29. \quad X_n = (\zeta - 1)^n X_0.$$

Auch hier gilt das nemliche Ableitungsgesetz für die Reihen, welche vor der Grundreihe liegen; eben so bei erhöhten oder erniedrigten Stellenzahlen, und es wird

$$30. \quad X_{-n} = (\zeta - 1)^{-n} X_0 = \zeta^{-n} X_0 + \frac{n}{1}\zeta^{-n-1} X_0 + \frac{n(n+1)}{1.2}\zeta^{-n-2} X_0 + \ldots .$$

§. 6.

Wir haben bisher die Untersuchung der aufstufenden Functionen ganz im Allgemeinen gehalten und ihre Eigenthümlichkeiten weiter erforscht. Das Allgemeine gehört dem Gebiete der Speculation an. Das Concrete giebt Leben und Anschauung. Um nun Anwendungen machen zu können, müssen wir diese allgemeine Betrachtungsweise verlassen, und uns auf das Specielle beschränken. Wir nehmen deswegen an: die Glieder der Grundreihe in (4.) und (5.) stehen in einem solchen Zusammenhange, dafs jedes nachfolgende Glied aus dem vorhergehenden auf gleiche Weise mittelst einer veränderlichen Gröfse abgeleitet werde. Bezeichnet man nun das Mittelglied, als die Function, aus der alle Glieder erwachsen, durch fx, die Zunahme der veränderlichen Gröfse mit Δx, so ziehen wir hieraus folgende Darstellung:

31. $f(x-2\Delta x),\ f(x-\Delta x),\ fx,\ f(x+\Delta x),\ f(x+2\Delta x)\ldots.$

Die vorzüglichsten Functionen, welche die Analysis aufgefunden hat, sind: x^p, $x^{p|\Delta x}$, a^x, $\log x$, $\sin x$, $\cos x$. **Wenden wir nun das Gesagte auf die genannten Functionen an, so führen sie zu folgenden eigenthümlichen Grundreihen, und zwar:**

für die Potenzialgröfsen:

32. $x^p,\ (x+\Delta x)^p,\ (x+2\Delta x)^p,\ (x+3\Delta x)^p,\ \ldots.$

für die Facultäten:

33. $x^{p|\Delta x},\ (x+\Delta x)^{p|\Delta x},\ (x+2\Delta x)^{p|\Delta x},\ \ldots.$

für die Exponentialgröfsen:

34. $a^x,\ a^{x+\Delta x},\ a^{x+2\Delta x},\ a^{x+3\Delta x},\ \ldots.$

für die Logarithmen:

35. $\log x,\ \log(x+\Delta x),\ \log(x+2\Delta x),\ \ldots.$

für die Sinus:

36. $\sin x,\ \sin(x+\Delta x),\ \sin(x+2\Delta x),\ \ldots.$

für die Cosinus:

37. $\cos x,\ \cos(x+\Delta x),\ \cos(x+2\Delta x),\ \ldots.$

Einfachere Darstellungen ergeben sich noch, wenn $\Delta x = 1$ gesetzt wird.

Wir gehen nun zu den Darstellungen der Aufstufungen der Functionen selbst über. Sie zerfallen, ihrer Natur nach, in die positiven und negativen Aufstufungen. Die Grundgleichung, welche für die Darstellung der ersten positiven Aufstufung jeder einfachen Function gilt, ist:

38. $\zeta fx = fx + f(x+\Delta x).$

Sie führt zu der allgemeinen Vorschrift: **Man lasse, um die erste Aufstufung einer Function zu erhalten, die veränderliche Gröfse einer Function um Δx wachsen, und zähle die ursprüngliche Function zu.**

I. Darstellung der Aufstufungen der einfachen Functionen, wenn die Zunahme Δx eine endliche Gröfse ist.

A. Darstellung der positiven Aufstufungen der einfachen Functionen.

§. 7.

Darstellung der Aufstufungen der Potenzialfunctionen $\zeta^m x^p$.

Die erste Aufstufung der Potenzialfunction x^p wird sich nach (38.), wenn $fx = x^p$ gesetzt wird, durch folgende Gleichung bilden:

$$fx^p = x^p + (x+\Delta x)^p.$$

Wird das Binomium $(x+\Delta x)^p$ in eine Reihe entwickelt, und die gleichen Glieder vereinigt, so entsteht folgende entwickelte Darstellung:

$$39.\quad \zeta x^p = 2x^p + \frac{p}{1}x^{p-1}\Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^p.$$

Ist aber $fx = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$, so wird

$$\zeta\frac{1}{x^p} = \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+\Delta x)^p} = \frac{x^p + (x+\Delta x)^p}{x^p(x+\Delta x)^p}.$$

Berücksichtigt man, dafs der Zähler in dieser Darstellung, $x^p + (x+\Delta x)^p = \zeta x^p$ ist, so gewinnt man

$$40.\quad \zeta\frac{1}{x^p} = \frac{\zeta x^p}{x^p(x+\Delta x)^p} = \frac{\zeta x^p}{(x^2+\Delta x)^p}.$$

Die entwickelte Darstellung giebt folgende Gleichung:

$$41.\quad \zeta\frac{1}{x^p} = \frac{2}{x^p} - \frac{p\Delta x}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{1.2.x^{p+2}} - \ldots.$$

Die nemliche Entwickelung gilt auch für Functionen mit gebrochenen Exponenten, $x^{\frac{q}{r}}$, $x^{-\frac{q}{r}}$.

Die höhern Aufstufungen von x^p ergeben sich unmittelbar aus der Gleichung (10.), wenn $X_0 = fx = x^p$, $X_1 = f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^p$ u. s. w. gesetzt wird. Es ist

$$42.\quad \zeta^m x^p = x^p + \frac{m}{1}(x+\Delta x)^p + \frac{m(m-1)}{1.2}(x+\Delta x)^p + \ldots.$$
$$\ldots. + \frac{m}{1}(x+(m-1)\Delta x)^p + (x+m\Delta x)^p.$$

Werden die Binomien der entwickelten Reihe in Reihen dargestellt, so entsteht:

$$\begin{aligned}
\zeta^m x^p &= x^p \\
&+ m\left(x^p + \frac{p}{1}x^{p-1}\Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 + \ldots. + (\Delta x)^p\right) \\
&+ \frac{m(m-1)}{1.2}\left(x^p + \frac{p}{1}x^{p-1}2\Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}2^2(\Delta x)^2 + \ldots. + 2^p(\Delta x)^p\right) \\
&+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\left(x^p + \frac{p}{1}x^{p-1}3\Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}3^2(\Delta x)^2 + \ldots. + 3^p(\Delta x)^p\right) \\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad x^p + \frac{p}{1}x^{p-1}m\Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}m^2(\Delta x)^2 + \ldots. + n^p(\Delta x)^p\Big).
\end{aligned}$$

Eine Zusammenstellung der Glieder dieser Reihen nach den steigenden Potenzen der Zunahme führt zu Folgendem:

$$\begin{aligned}
43.\quad \zeta^m x^p &= \left(1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{m}{1} + 1\right)x^p \\
&+ \frac{p}{1}\left(m + 2\,\frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots. + (m-1)\frac{m}{1} + m\right)x^{p-1}\Delta x \\
&+ \frac{p(p-1)}{1.2}\left(m + 2^2\frac{m(m-1)}{1.2} + \ldots. + (m-1)^2\frac{m}{1} + m^2\right)x^{p-2}(\Delta x)^2 \\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad\left(m + 2^p\frac{m(m-1)}{1.2} + 3^p\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots. + (m-1)^p\frac{m}{1} + m^p\right)(\Delta x)^p.
\end{aligned}$$

Eine andere Darstellung wird durch die Gleichung (39.) gewonnen, wenn man sie als Vorschrift betrachtet, von ihr auf die zweite Aufstufung, und von dieser auf die dritte nach gleicher Methode u. s. w. fort geht. Diese Ableitungsweise ist die zurücklaufende, und wird demungeachtet zu einer unabhängigen Bildungsweise führen. Vervielfacht man nemlich die Gleichung (39.) mit ζ, so entsteht:

$$\zeta^2 x^p = 2\zeta x^p + \frac{p}{1}\Delta x\,\zeta x^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}(\Delta x)^2\zeta x^{p-2} + \ldots.,$$

und die Entwickelung der zweiten Aufstufung verlangt, dafs alle Glieder auf der rechten Seite nach Vorschrift der Gleichung (39.) dargestellt wer-

den, was leicht dadurch erzweckt wird, dafs allmälig p, $p-1$, $p-2$, ... statt p in (39.) gesetzt werden. Ordnet man dann nach den Potenzen von Δx, so fliefst hieraus:

$$\zeta^2 x^p = 2^2 x^p + 2\frac{p}{1}\Big|x^{p-1}\Delta x + 2\frac{p(p-1)}{1.2}\Big|x^{p-2}(\Delta x)^2 + 2\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Big|x^{p-3}(\Delta x)^3 + ...$$
$$+2\frac{p}{1}\Big| \quad + p(p-1)\Big| \quad p\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\Big|$$
$$+2\frac{p(p-1)}{1.2}\Big| \quad \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)\Big|$$
$$2\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Big|$$

Die Vorzahlen der einzelnen Glieder bestehen in Facultäten, deren Zähler harmoniren, deren Nenner aber verschieden sind. Bringt man Harmonie in diese durch Vervollständigen, so folgert sich hieraus leicht die Darstellung:

$$\zeta^2 x^p = 2^2 x^p + 2^2\frac{p}{1}x^{p-1}\Delta x + 2.1\Big|\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 + 2.1\Big|\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}(\Delta x)^3.$$
$$+\frac{2}{1}\Big| \quad + 3\Big|$$
$$+2.1\Big| \quad + 3\Big|$$
$$+2.1\Big|$$

Nennt man nun die Vorzahlen der Glieder dieser Reihen, der Kürze wegen, A_1, A_2, A_3, ..., so stellt sich die vorstehende Reihe so dar:

$$\zeta^2 x^p = A_1 x^p + A_2\frac{p}{1}x^{p-1}\Delta x + A_3\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 + ...$$

Aus dieser Reihe leitet sich die dritte Aufstufung durch Vervielfachen aller Glieder mit ζ ab. Daher ist:

$$\zeta^3 x^p = A_1\zeta x^p + A_2\frac{p}{1}\Delta x\zeta x^{p-1} + A_3\frac{p(p-1)}{1.2}(\Delta x)^2\zeta x^{p-2} + ...$$

Werden die Ausdrücke ζx^p, ζx^{p-1}, ζx^{p-2}, nach Vorschrift der Gleichung (39.), in Reihen entwickelt, so führen sie zu folgender Darstellung:

$$\zeta^3 x^p = 2A_1 x^p + A_1\frac{p}{1}x^{p-1}\Delta x + A_1\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 + ...$$
$$+2A_2\frac{p}{1}x^{p-1}\Delta x + A_2 p.\frac{(p-1)}{1}x^{p-2}(\Delta x)^2 + ...$$
$$+2A_3\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 + ...$$

Die nemliche Bemerkung, wie vorhin, über die Facultäten der Vorzahlen, rechtfertigt folgende Darstellung:

$$\zeta^3 x^p = 2A_1 x^p + \begin{vmatrix} A_1 \\ +2A_2 \end{vmatrix} \frac{p}{1} x^{p-1}\Delta x + \begin{vmatrix} A_1 \\ +2A_2 \\ +2A_3 \end{vmatrix} \frac{p(p-1)}{1.2} x^{p-2}(\Delta x)^2 + \begin{vmatrix} A_1 \\ +3A_2 \\ +3A_3 \\ +2A_4 \end{vmatrix} \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} x^{p-3}\Delta x + \ldots.$$

Das Bildungsgesetz, welches den Vorzahlen dieser Reihe zu Grunde liegt, tritt deutlich hervor. Nennt man die Vorzahl des $(n+1)$ten Gliedes dieser Reihe B_{n+1}, so hat man:

$$44. \quad B_{n+1} = A_1 + \frac{n}{1}A_2 + \frac{n(n-1)}{1.2}A_3 + \ldots. + \frac{n}{1}A_n + 2A_{n+1}.$$

Da nun der Übergang von einer Aufstufung zu der folgenden unverändert derselbe bleibt, so ist auch das vorliegende Bildungsgesetz allgemein. Sind die Vorzahlen der vorhergehenden Aufstufung bekannt, so können aus ihnen nach (44.) die Vorzahlen der nachfolgenden gebildet werden. Wendet man dieses Bildungsgesetz an, so führt es zu folgenden Entwickelungen:

$$45. \quad \zeta^2 x^p = 4x^p + 4px^{p-1}\Delta x + 6\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 + 10\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}(\Delta x)^3 + \ldots.$$
$$+ (2^n+2)\frac{p\ldots.(p-n+1)}{1.2\ldots.n}x^{p-n}(\Delta x)^n + \ldots.$$

$$\zeta^3 x^p = 8x^p + 12px^{p-1}\Delta x + 24\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 + 54\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}(\Delta x)^3 + \ldots.$$

$$\zeta^4 x^p = 16x^p + 32px^{p-1}\Delta x + 80\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 + 224\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}(\Delta x)^3 + \ldots.$$

$$\zeta^5 x^p = 32x^p + 80px^{p-1}\Delta x + 240\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 + 800\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}(\Delta x)^3 + \ldots.$$

u. s. w.

Auf gleiche Weise lassen sich die Aufstufungen für x^{-p} bestimmen.

§. 8.

Anwendungen der Gleichungen des vorigen §.

Bezeichnen wir nun die $m$te Aufstufung von x im Einklange mit den Darstellungen (45.) durch folgende Reihe:

$$46. \quad \zeta^m x^p = m_1 x^p + m_2 p x^{p-1}\Delta x + m_3\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2 \ldots.,$$

worin m_1, m_2, m_3, ... die Vorzahlen bezeichnen, wie sie nach der Gleichung (44.) gewonnen werden, und berücksichtigen wir, dafs die Gleichungen (46.), (42.) und (43.) Darstellungen für eine und dieselbe Sache sind, so ergiebt sich aus der Vereinigung von (42.) und (44.) folgende neue:

$$47.\quad x^p+\frac{m}{1}(x+\Delta x)^p+\frac{m(m-1)}{1.2}(x+2\Delta x)^p+\ldots.+(x+m\Delta x)^p$$
$$=m_1x^p+m_2px^{p-1}\Delta x+m_3\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}(\Delta x)^2+\ldots.,$$

worin die Reihe auf der linken Seite als Summenreihe, und die auf der rechten als ihr Summen-Ausdruck, oder nach Umständen auch umgekehrt genommen werden kann. Die Glieder-Anzahl der ersten Reihe hängt von m, die der andern von p ab. Ist m gröfser als p, so wird die zweite als Summen-Ausdruck der ersten, ist m kleiner als p, die erste als Summen-Ausdruck der zweiten betrachtet werden können.

An der ersten Reihe zeigt sich zugleich ein bestimmtes Bildungsgesetz, denn in ihr erscheinen die gleichen Potenzen der um gleiche Gröfsen wachsenden Function, die mit bestimmten Facultäten verbunden sind. Nehmen wir für einen speciellen Fall $\Delta x=1$, so bildet diese Reihe die Potenzen der natürlichen Zahlen, und es entsteht, wenn wir die Summenreihe durch $\zeta^m x^p$ oder durch $S_r\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}x^p$ andeuten, wobei für den letzten Fall zu berücksichtigen ist, dafs r alle Werthe von 0, 1, 2, ... m bezeichnet, folgende Darstellung:

$$48.\quad S_r\frac{m^{r|-1}}{1^{r|1}}x^p=x^p+\frac{m}{1}(x+1)^p+\frac{m(m-1)}{1.2}(x+2)^p+\ldots.+\frac{m(m-1)\ldots.2.1}{1.2\ldots.m}(x+m)^p$$
$$=m_1x^p+m_2x^{p-1}+\ldots.+m_{m+1}x^0.$$

Setzen wir hierin $x=1$, $p=3$ und $m=5$, so wird

$$S_r\frac{5^{r|-1}}{1^{r|1}}1^3=1^3+\frac{5}{1}2^3+\frac{5.4}{1.2}3^3+\frac{5.4.3}{1.2.3}4^3+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}5^3+\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}6^3$$
$$=32+80.3+240.3+800=1792.$$

Die Gleichung (48.) wird dann besonders brauchbar, wenn p im Verhältnisse zu m eine kleine Zahl ist. Die Coefficienten m_1, m_2, m_3, ... in (46.) können auch nach (43.) berechnet werden.

§. 9.

Darstellung von $\zeta^m\frac{x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots.(x+(p-1)\Delta x)}{1.2.3\ldots.p}$.

Die erste Aufstufung der Function $\frac{x^{p|\Delta x}}{1^{p|1}}$ wird nach (38.) durch folgende Gleichung:

$$\zeta\frac{x^{p|\Delta x}}{1^{p|\Delta x}}=\frac{x(x+\Delta x)\ldots.(x+(p-1)\Delta x)}{1.2\ldots.p}+\frac{(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots.(x+p\Delta x)}{1.2\ldots.p}$$

dargestellt. Die höhern Aufstufungen sind nach (10.) in folgender Glei-

chung enthalten:

$$49.\quad \zeta^m \frac{x^{p|\Delta x}}{1^{p|1}} = \frac{x^{p|\Delta x}}{1^{p|1}} + \frac{m}{1}\frac{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}{1^{p|1}} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}{1^{p|1}} + \ldots + \frac{(x+m\Delta x)^{p|\Delta x}}{1^{p|1}}.$$

Eine zurücklaufende Bildungsweise, wie in §. 7., die uns eine andere Darstellung der höhern Aufstufungen der Facultäten gäbe, und dadurch weitere Anwendungen gestattete, läfst sich nicht gewinnen. Man kann jedoch die Facultäten in Potenzialgröfsen auflösen, und dann lassen sich auf sie die in §. 7. gewonnenen Entwickelungen anwenden. Da diese Anwendung uns nichts Neues bieten würde, so beschränken wir uns auf folgenden einzelnen Fall, worin statt einer einzelnen Facultät die Reihe der natürlichen Zahlen, welche ein Aggregat einfacher Facultäten sind, vorkommt. Die Reihe der natürlichen Zahlen mit ihrem Summen-Ausdrucke ist bekanntlich:

$$50.\quad Sx = 1+2+3+4+5+\ldots+x = \frac{x(x+1)}{1.2}.$$

Hierin ist die Zunahme $\Delta x = 1$. Läfst man in Sx nach (38.) die Function x um die Zunahme 1 wachsen, und zählt die ursprüngliche Function zu, so ist

$$\zeta Sx = 1+2+3+4+\ldots+x$$
$$+2+3+4+\ldots+x+(x+1).$$

Werden die beiden Reihen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in ihren Summen-Ausdrücken vereinigt, so gewinnt man:

$$51.\quad \zeta Sx = \frac{2x(x+2)}{1.2}.$$

Bestimmt man gleichfalls die Summenfunction für die zweite Aufstufung, so ist:

$$\zeta^2 Sx = \frac{4x(x+3)}{1.2} = \frac{2^2 x(x+3)}{1.2} = 2\,x(x+3).$$

Eben so erhält man:

$$\zeta^3 Sx = \frac{8x(x+4)}{1.2} = \frac{2^3 x(x+4)}{1.2} = 2^2 x(x+4),$$

$$\zeta^4 Sx = \frac{16x(x+5)}{1.2} = \frac{2^4 x(x+5)}{1.2} = 2^3 x(x+5),$$

und hieraus allgemein:

$$52.\quad \zeta^m Sx = 2^{m-1} x(x+m+1).$$

Die speciellen Fälle führen zu folgenden merkwürdigen Reihen mit ihren Summen-Ausdrücken:

$$53.\quad \begin{cases} 1+2.2+2.3+\ldots\ldots+2.x+(x+1) = x(x+2) \\ 1+3.2+4.3+\ldots\ldots+4.x+3(x+1)+(x+2) = 2x(x+3) \\ 1+4.2+7.3+8.4+\ldots+8.x+7(x+1)+4(x+2)+(x+3) = 2^2 x(x+4), \end{cases}$$

u. s. w. u. s. w.

Hierher gehört auch noch folgende zusammengesetzte Reihe, deren Glieder die ungeraden Zahlen sind, verbunden mit den Vorzahlen des Binomiums, und die einen sehr einfachen Summen-Ausdruck erzeugen:

$$54.\quad 1+\frac{m}{1}.3+\frac{m(m-1)}{1.2}.5+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.7+\ldots+2m+1=2^m(m+1).$$

Der Summen-Ausdruck erscheint als eine Function von der Zahl 2, und der Glieder-Anzahl m.

Die Gleichung (54.) führt zu dem Resultate: **Jede gerade Zahl von der Form $2^m(m+1)$ läfst sich in die m ersten ungeraden Zahlen, die mit den Vorzahlen des Binomiums der $m$ten Potenz verbunden sind, zerlegen.**

Die Gleichung (52.) führt zu folgendem: **Jede Zahl von der Form $2^{m-1}(x+m+1)$ läfst sich in die $(x+m)$ ersten Zahlen zerlegen, die mit Vorzahlen besonderer Natur nach Angabe der Gleichungen (53.) verbunden sind.**

§. 10.

Darstellung der Aufstufungen der Exponentialgröfsen.

Die Aufstufungen der Exponentialgröfsen führen auf sehr einfache Darstellungen. Die Gleichung (38.) führt zu der ersten Aufstufung, und es ist:

$$55.\quad \zeta a^x = a^x + a^{x+\Delta x} = (1+a^{\Delta x})a^x.$$

Aus der Gleichung (10.) folgt unmittelbar:

$$56.\quad \zeta^m a^x = a^x + \frac{m}{1}a^{x+\Delta x} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{x+2\Delta x} + \ldots. + a^{x+m\Delta x}.$$

Um auch hier weitere Vergleichungen anstellen zu können, suchen wir eine zurücklaufende Bildungsweise auf. Sie folgt unmittelbar aus (54.), wenn wir von der ersten Abstufung auf die zweite dadurch übergehen, dafs wir die Abstufung von der Abstufung nehmen, und also die Gleichung

$$\zeta a^x = (1+a^{\Delta x})a^x$$

mit ζ vervielfachen. Daraus ergiebt sich:

$$\zeta^2 a^x = (1+a^{\Delta x})\,\zeta a^x = (1+a^{\Delta x})\,(1+a^{\Delta x})a^{\Delta x} = (1+a^{\Delta x})^2 a^x.$$

Vervielfachen wir diese Gleichung mit ζ, so erhalten wir:

$$\zeta^3 a^x = (1+a^{\Delta x})^2\,\zeta a^x = (1+a^{\Delta x})^2(1+a^{\Delta x})a^x = (1+a^{\Delta x})^3 a^x.$$

Der angezeigte Ableitungsgang bleibt für alle Fälle gleich, und es ist hieraus das allgemeine Bildungsgesetz leicht erkennbar:

$$57.\quad \zeta^m a^x = (1+a^{\Delta x})^m a^x.$$

Die Gleichungen (56.) und (57.) sind Darstellungen für eine und dieselbe Sache, also einander gleich. Ihre Vereinigung führt zu der Summirung einer geometrischen Reihe, deren Glieder mit den Vorzahlen des Binomiums verbunden sind, und es ist:

$$58. \quad a^x + \frac{m}{1}a^{x+\Delta x} + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{x+\Delta x} + \ldots + a^{x+m\Delta x} = (1+a^{\Delta x})^m a^x.$$

Da a, x und Δx unabhängig von einander sind, so lassen sich hieraus mancherlei Ableitungen gewinnen.

Es mögen ferner noch die Aufstufungen der Function $\frac{1}{a^x}$ hier stehen. Nach (38.) ist

$$\zeta\frac{1}{a^x} = \frac{1}{a^x} + \frac{1}{a^{x+\Delta x}}.$$

Werden die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in einen vereinigt, so führt dies zu folgender Darstellung:

$$\zeta\frac{1}{a^x} = \frac{1}{a^{x+\Delta x}} + \frac{a^{\Delta x}}{a^{x+\Delta x}} = \frac{1+a^{\Delta x}}{a^{x+\Delta x}} = \frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \cdot \frac{1}{a^{\Delta x}}.$$

Von der ersten Aufstufung, die wir so eben erhalten haben, nehmen wir abermals die Aufstufung, um die zweite zu gewinnen. Daher ist

$$\zeta^2\frac{1}{a^x} = \frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\zeta\frac{1}{a^x} = \frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \cdot \frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \cdot \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\right)^2 \cdot \frac{1}{a^x}.$$

Die Aufstufung von der zweiten Aufstufung giebt die dritte, und es ist:

$$\zeta^3\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\right)^2\zeta\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\right)^2 \cdot \frac{(1+a^{\Delta x})}{a^{\Delta x}} \cdot \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\right)^3 \cdot \frac{1}{a^x}.$$

Das allgemeine Gesetz erkennt sich hieraus leicht, und ist:

$$59. \quad \zeta^m\frac{1}{a^x} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\right)^m \cdot \frac{1}{a^x}.$$

Berücksichtigen wir ferner, dafs nach (10.)

$$\zeta^m\frac{1}{a^x} = \frac{1}{a^x} + \frac{m}{a^{x+\Delta x}} + \frac{m(m-1)}{a^{x+2\Delta x}} + \ldots + \frac{1}{a^{x+m\Delta x}}$$

ist, so zieht man leicht hieraus folgende Gleichung:

$$60. \quad \frac{1}{a^x} + \frac{m}{a^{x+\Delta x}} + \frac{m(m-1)}{a^{x+2\Delta x}} + \ldots + \frac{1}{a^{x+m\Delta x}} = \left(\frac{1+a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}}\right)^m \cdot \frac{1}{a^x}.$$

§. 11.

Darstellung der Aufstufungen von $\sin x$.

Da die Logarithmen keine andere kurze Darstellung der Aufstufungen liefern, als die allgemeine unter (10.) angegebene, so gehen wir zu

den Aufstufungen der Sinus über. Die Gleichung (10.) führt zu folgender Darstellung:

$$61.\quad \zeta^m \sin x = \sin x + \frac{m}{1}\sin(x+\Delta x) + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(x+2\Delta x) \ldots + \sin(x+m\Delta x).$$

Auch hier suchen wir zu weitern Anwendungen eine zurücklaufende Bildungsweise auf. Sie läfst sich mittelst folgender Gleichung, die wir aus der Trigonometrie entlehnen, gewinnen:

$$62.\quad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2},$$

welche die Summe zweier Sinus durch den Sinus der Summe und den Cosinus des Unterschiedes beider Winkel darstellt.

Die erste Aufstufung des Sinus ist nach (38.):

$$\zeta \sin x = \sin x + \sin(x+\Delta x).$$

Wird in (62.) $p = x+\Delta x$ und $q = x$ gesetzt, so entsteht

$$63.\quad \zeta \sin x = \sin x + \sin(x+\Delta x) = 2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\frac{\Delta x}{2}.$$

Diese Gleichung ist Resultat und Vorschrift für die Bildung der Aufstufungen des Sinus. Die Vorschrift, die sie enthält, ist: Um die Aufstufung von $\sin x$ zu erhalten, lasse man den Sinus um die halbe Zunahme wachsen, und vervielfache den so erhaltenen Sinus mit dem zweifachen Cosinus der halben Zunahme.

Die zweite Aufstufung ist Aufstufung von der ersten Aufstufung, also

$$\zeta^2 \sin x = 2\cos\frac{\Delta x}{2}\,\zeta \sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Wird nun $\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$ nach der eben gefundenen Vorschrift behandelt, so entsteht:

$$\zeta^2 \sin x = 2^2 \sin(x+\Delta x)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2.$$

Eben so wird:

$$\zeta^3 \sin x = 2^2\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \zeta \sin(x+\Delta x) = 2^2\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2.2\sin\left(x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\cos\frac{\Delta x}{2}$$

$$= 2^3 \sin\left(x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^3$$

u. s. w. Diese Ableitungsweise führt zu folgendem allgemeinen Bildungsgesetz:

$$64.\quad \zeta^m \sin x = 2^m \sin\left(x+\frac{m\Delta x}{2}\right)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^m.$$

Die Gleichungen (61.) und (64.) erzeugen durch ihre Vereinigung eine Reihe, die einem bestimmten Bildungsgesetz unterliegt und ihren Summen-Ausdruck:

$$65.\quad \sin x + \frac{m}{1}\sin(x+\Delta x) + \frac{m(m-1)}{1.2}\sin(x+2\Delta x) + \ldots + \sin(x+m\Delta x)$$
$$= 2^m \sin\left(x+\frac{m\Delta x}{2}\right)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^m.$$

Ordnen wir die Substitutionen statt p und q in der Gleichung (62.) anders, und setzen $p=x$ und $q=x+\Delta x$, so erhalten wir für die erste Aufstufung des Sinus:

$$\zeta \sin x = \sin(x+\Delta x)+\sin x = 2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(-\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Berücksichtigen wir, dafs $\cos\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) = -\cos\frac{\Delta x}{2}$, so folgt hieraus:

$$66.\quad \zeta \sin x = -2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\frac{\Delta x}{2}.$$

Diese Darstellung ist von der Darstellung (63.) nicht durch die Bildungsweise, sondern nur durch das Zeichen verschieden. Leiten wir daher nach ihr die spätern Aufstufungen ab, so wird sie auf abwechselnde Zeichen führen, und es wird entstehen:

$$\zeta^2 \sin x = \quad 2^2 \sin(x+\Delta x)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2,$$
$$\zeta^3 \sin x = -2^3 \sin\left(x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2,$$

und demnach:

$$67.\quad \zeta^m \sin x = (-)^m 2^m \sin\left(x+\frac{m\Delta x}{2}\right)\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^m.$$

Diese Verschiedenheit der Resultate darf nicht befremden; sie kommt häufig vor, wie diefs aus der Lehre der Wurzelgröfsen und quadratischen Gleichungen u. s. w. bekannt ist. Wir sehen, dafs der Calcul, als allgemeine Form, auf unbestimmte Resultate führen kann. Im einzelnen Fall mufs sich entscheiden, welche Darstellung die richtige ist.

§. 12.

Darstellung der Aufstufungen für $\cos x$.

Die $m$te Aufstufung des Cosinus bestimmt sich nach (10.) im Allgemeinen durch:

$$68.\quad \zeta^m \cos x = \cos x + \frac{m}{1}\cos(x+\Delta x) + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(x+2\Delta x) + \ldots + \cos(x+m\Delta x).$$

Wir suchen nun eine zurücklaufende Bildungsweise. Die Gleichung aus der Trigonometrie:

$$69. \quad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$

wird uns die Ableitungen vorbereiten. Setzt man nemlich hierin $p = x + \Delta x$ und $q = x$, so entsteht:

$$70. \quad \zeta\cos x = \cos x + \cos(x+\Delta x) = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\frac{\Delta x}{2}.$$

Die Vorschrift, die wir hieraus für die Ableitung der Aufstufungen entnehmen, ist: Man lasse die veränderliche Gröfse um die halbe Zunahme wachsen, und vervielfache den so erhaltenen Cosinus mit dem doppelten Cosinus der halben Zunahme.

Hiernach leitet sich die zweite Aufstufung aus der ersten leicht ab. Es ist:

$$\zeta^2\cos x = 2\cos\frac{\Delta x}{2}\zeta\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 2\cos\frac{\Delta x}{2}2\cos\frac{\Delta x}{2}.\cos(x+\Delta x)$$
$$= 2^2\cos(x+\Delta x)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2.$$

Eben so erhält man:

$$\zeta^3\cos x = 2^2\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2\zeta\cos(x+\Delta x) = 2^3\cos\left(x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^3,$$

und hieraus allgemein:

$$71. \quad \zeta^m\cos x = 2^m\cos\left(x+\frac{m\Delta x}{2}\right)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^m.$$

Die Verbindung von (68.) und (71.) führt zu folgender Gleichung zwischen einer Reihe und ihrem Summen-Ausdrucke:

$$72. \quad \cos x + \frac{m}{1}\cos(x+\Delta x) + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(x+2\Delta x) + \ldots + \cos(x+m\Delta x)$$
$$= 2^m\cos\left(x+\frac{m\Delta x}{2}\right)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^m.$$

Auch hier lassen sich bei anderer Anordnung der Substitution in (69.) andere Resultate gewinnen. Wird nemlich $p = x$ und $q = x + \Delta x$ gesetzt, so erhält die erste Aufstufung für $\cos x$ folgende Gestalt:

$$\zeta\cos x = \cos x + \cos(x+\Delta x) = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(-\frac{\Delta x}{2}\right),$$

oder, da $\cos\left(-\frac{\Delta x}{2}\right) = -\cos\frac{\Delta x}{2}$ ist:

$$73. \quad \zeta\cos x = -2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\frac{\Delta x}{2}.$$

Die höhern Aufstufungen von $\cos x$ erhalten dann folgende Formen:

$$\zeta^2 \cos x = 2^2 \cos(x+\Delta x)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2,$$

$$\zeta^3 \cos x = -2^3 \cos\left(x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^3,$$

und allgemein:

74. $$\zeta^m \cos x = (-)^m 2^m \cos\left(x+\frac{m\Delta x}{2}\right)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^m.$$

Hieraus ergiebt sich auch folgende veränderte Darstellung der Gleichung (72.):

75. $$\cos x + \frac{m}{1}\cos(x+\Delta x) + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(x+2\Delta x) + \ldots + \cos(x+m\Delta x)$$
$$= (-)^m 2^m \cos\left(x+\frac{m\Delta x}{2}\right)\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^m.$$

(Die Fortsetzung folgt.)

7.

Einfacher Beweis des Gesetzes der gleichförmig beschleunigten Bewegung.

(Von Herrn Dr. *A. Müller*, in Heidelberg.)

Die Gröfse des Weges zu bestimmen, den ein Körper in einer bestimmten Zeit mit gleichförmig beschleunigter Bewegung zurücklegt, giebt es bis jetzt drei wesentlich verschiedene Methoden. Die erste Methode führt durch Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung zum Ziele, wobei das Differential, wenigstens formell, als unendlich kleine Gröfse betrachtet wird. Die zweite Methode besteht darin, dafs man die Zeit der Bewegung durch eine Linie, und die Zeittheile durch Theile dieser Linie ausdrückt, ferner in den Endpuncten der Linientheile senkrechte Linien errichtet, welche den in den Zeittheilchen durchlaufenen Wegen gleich sind. Die Summe dieser Ordinaten zu finden, welche dem in der bestimmten Zeit durchlaufenen Wege gleich ist, nimmt man die Zeittheilchen sehr klein, so dafs die Ordinaten sich sehr nahe kommen, und als den Flächenraum eines rechtwinkligen Dreiecks constituirend angesehen werden können. Dieser Flächenraum ist alsdann die Gröfse des durchlaufenen Weges. Die dritte Methode theilt die Zeit der Bewegung in unendlich kleine Theile, so dafs ihre Anzahl unendlich grofs wird, und, wenn man diese Anzahl n nennt, $n+1=n$ gesetzt werden kann.

Dafs die beiden letzten Methoden nicht jene Schärfe in den Schlüssen zulassen, welche bei der Deduction mathematischer Wahrheiten gefordert werden mufs, ist anerkannt, und es wird in den meisten Compendien, wo eine dieser Methoden vorgetragen wird, in einer Anmerkung hinzugefügt, dafs der Beweis des Gesetzes, durch Differential- und Integral-Rechnung geführt, weit strenger als der andere sei. Der Erfolg ist, dafs der Lernende, dem die Kenntnifs der Differential-Rechnung abgeht, das erwähnte Gesetz auf Treu und Glauben annehmen mufs. Schon aus diesem Grunde möchte die Mittheilung eines Beweises, der weder die Kenntnifs der Differential-Rechnung voraussetzt, noch den Lernenden zur Anerkennung von Sätzen zwingt, die nicht wahr sind, nicht überflüssig sein.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Die Ableitung des Gesetzes, nach welchem ein Körper mit gleichförmig beschleunigter Bewegung fortgeht, besteht in der Beantwortung folgender zwei Fragen:

a) Wenn eine Kraft während irgend einer Zeit auf einen Körper gewirkt hat, in welchen Zustand ist der Körper am Ende des Einwirkens der Kraft gebracht?

und

b) welchen Weg hat der Körper vermöge des Einwirkens der Kraft durchlaufen?

Diese Fragen zu beantworten, nehme man an, die wirkende Kraft und der Körper seien so beschaffen, dafs der Körper, vermöge des Einwirkens der Kraft, im ersten Zeittheile den Weg c zurücklegen würde, und am Ende dieses Zeittheils in einen solchen Zustand versetzt sei, dafs er, ohne Einwirken der Kraft, im zweiten und in jedem folgenden Zeittheile den Weg α durchlaufen würde.

Unter dieser Voraussetzung ergiebt sich zunächst der Zustand, in welchen der Körper durch das Einwirken der Kraft versetzt ist, ganz leicht. Das Bestreben, welches der Körper am Ende des ersten Zeittheils hat, ist ihm am Ende des zweiten Zeittheils noch eigen, und er würde, ohne das Einwirken der Kraft im zweiten Zeittheile, im dritten den Weg α durchlaufen. Wirkt die Kraft noch während des zweiten Zeittheils, so erhält der Körper dadurch, vom vorigen unabhängig, das neue Bestreben, im dritten Zeittheile den Weg α zurückzulegen. Durch das Einwirken der Kraft während der zwei ersten Zeittheile ist also der Körper in den Zustand versetzt, dafs er im dritten und in jedem folgenden Zeittheile, ohne Einwirken der Kraft, den Weg $2.\alpha$ zu durchlaufen das Bestreben hat. Allgemein folgt aus der obigen Voraussetzung, dafs der Weg v, den der Körper im $(t+1)$ten und in jedem folgenden Zeittheile, ohne Einwirken der Kraft, zurücklegen würde, wenn diese während der t ersten Zeittheile auf den Körper gewirkt hat, sein mufs:

$$1. \quad v = t.\alpha.$$

Für die Bestimmung des Wegs, den der Körper in t Zeittheilen zurücklegen mufs, wenn die Kraft während dieser Zeit auf ihn gewirkt hat, hat man vermöge der obigen Voraussetzung die Wahrheit, dafs der Körper in irgend einem Zeittheile, während dessen die Kraft auf ihn wirkt, den Weg c, und aufserdem noch jenen Weg durchläuft, den er wegen des, im An-

fange des Zeittheils gehabten Bestrebens, ohne Einwirken der Kraft, zurücklegen würde. Demnach ist der Weg s, den der Körper in t Zeittheilen zurücklegt:

$$s = c + (c+\alpha) + (c+2\alpha) + \ldots + (c+(t-1).\alpha),$$

oder

$$2. \quad s = t.c + \frac{t.(t-1)}{2}.\alpha.$$

Zur Vollständigkeit dieser Bestimmung gehört aber noch die Kenntnifs des Zusammenhangs zwischen c und α. Diesen auszumitteln, nehme man zuerst an, die Kraft habe, während $(t+t')$ Zeittheilen auf den Körper gewirkt; der Weg s' des Körpers ist alsdann nach (2.):

$$s' = (t+t').c + \frac{(t+t')(t+t'-1)}{2}.\alpha$$

oder

$$(i.) \quad s' = s + t'c + t.t'.\alpha + \frac{t'(t'-1)}{2}.\alpha.$$

Nun nehme man an, die Kraft habe nur während t Zeittheilen auf den Körper gewirkt, dieser aber sei aufserdem noch während t' Zeittheilen, ohne Einwirken der Kraft, fortgegangen. Der Weg des Körpers in der Zeit t ist alsdann s, und weil er am Ende der Zeit t das Bestreben hat, in jedem folgenden Zeittheile den Weg $v = t.\alpha$ zurückzulegen, so ist der Weg während der t' Zeittheile $= t'.v = t'.t.\alpha$; mithin ist der Weg s'' des Körpers während der Zeit $t+t'$:

$$(k.) \quad s'' = s + t'.t.\alpha.$$

Die Wege s' und s'' sind verschieden. Nimmt man aber an, dafs $s' = s''$ sei, so folgt aus $(i.)$ und $(k.)$, dafs

$$(p.) \quad c = \frac{\alpha}{2} - \frac{t'.\alpha}{2}.$$

Weil die Voraussetzung, $s' = s''$, aus welcher dieser Satz $(p.)$ abgeleitet worden, nicht allgemein wahr ist, so ist der Satz $(p.)$ ebenfalls nicht unbedingt, und nur unter der Bedingung wahr, unter welcher wirklich $s' = s''$ ist. Es ist aber in der That $s' = s''$ nur dann, wenn $t' = 0$; also ist der Satz $(p.)$ nur wahr, wenn $t'' = 0$ ist. Hieraus folgt, dafs

$$3. \quad c = \frac{\alpha}{2}, \text{ oder } \alpha = 2c$$

sein mufs. Macht man nun hiervon bei den Sätzen (1.) und (2.) Gebrauch, so hat man:

$$4. \quad v = 2c.t,$$
$$s = t^2.c.$$

8.

Über die allgemeine Entwickelung der ganzen Potenzen des Bogens in Reihen, die nach den aufsteigenden Potenzen des Sinus fortschreiten.

(Vom Herrn Prof. *H. F. Scherk* in Halle.)

Die einfache Reihe, welche die Entwickelung des Bogens nach den ungeraden Potenzen des Sinus enthält, ist allbekannt. Eine ganz eben so einfache Reihe hat Herr v. Stainville in den *Mélanges d'analyse* für das Quadrat des Bogens angegeben. Um sie zu finden, wandte er die bei Kreisfunctionen so häufig mit Erfolg versuchte Methode an, nach welcher die zu entwickelnde Gröfse, also hier das Quadrat des Bogens, in eine Differentialgleichung des zweiten Grades gebracht wird, um vermittelst derselben die vor der Hand unbestimmt angenommenen Coefficienten der Reihen-Entwickelung zu bestimmen. Auf demselben Wege fortschreitend hat Herr Prof. Scholtz im dritten Bande pag. 70 ff. gegenwärtigen Journals auch die 3te, 4te, 5te und 6te Potenz des Bogens in die entsprechenden Reihen entwickelt; ein allgemeines Gesetz für eine beliebige Potenz hat sich aber aus jener Untersuchung nicht ergeben. Der Grund hiervon scheint folgender zu sein. Die Reihe für die $m$te Potenz des Bogens kann offenbar nur die Form

1. $\varphi^m = \sin\varphi^m [1 + f(m,1)\sin\varphi^2 + f(m,2)\sin\varphi^4 + \ldots + f(m,p)\sin\varphi^{2p} + \text{etc.}]$

haben, in welcher $f(m,1)$, $f(m,2)$, ... $f(m,p)$, ... die zu bestimmenden Coefficienten sind. Nimmt man ihren zweiten Differentialquotienten in Beziehung auf φ, so erhält man

$$m.m-1.\varphi^{m-2}$$
$$= (1-\sin\varphi^2)\sin\varphi^{m-2}[m.m-1+(m+2)(m+1)f(m,1)\sin\varphi^2+\ldots+(m+2p-2)(m+2p-3)f(m,p-1)\sin\varphi^{2p-2}$$
$$+(m+2p)(m+2p-1)f(m,p)\sin\varphi^{2p}+\ldots]$$
$$-\sin\varphi^m[m+(m+2)f(m,1)\sin\varphi^2+\ldots\ldots\ldots+(m+2p-2)f(m,p-1)\sin\varphi^{2p-2}+\ldots]$$

Der Coefficient von $\sin\varphi^{m+2p-2}$ ist folglich hierin =

$$(m+2p)(m+2p-1)f(m,p) - (m+2p-2)^2 f(m,p-1).$$

Setzt man aber in (1.) $m-2$ für m, so ist auch

$$m.m-1.\varphi^{m-2}$$
$$= m.m-1.\sin\varphi^{m-2}[1+f(m-2,1)\sin\varphi^2+f(m-2,2)\sin\varphi^4+\ldots+f(m-2,p)\sin\varphi^{2p}+\ldots].$$

und folglich

$$m.m-1f(m-2,p)=(m+2p)(m+2p-1)f(m,p)-(m+2p-2)^2f(m,p-1),$$

oder

$$2.\quad f(m,p)=\frac{m.(m-1)f(m-2,p)+(m+2p-2)^2f(m,p-1)}{(m+2p-1)(m+2p)}.$$

Dieselbe Gleichung für die angenommenen Coefficienten $f(m,p)$ ist a. a. O. pag. 73. durch die erwähnte Differentialgleichung des zweiten Grades gefunden *). Sollen sie also vermittelst derselben bestimmt werden, so mufs man entweder die Coefficienten der $(m-2)$ten Potenz bereits kennen, wenn die der $m$ten bestimmt werden sollen, und folglich wird man in diesem Falle zur Erkenntnifs des allgemeinen Gesetzes nur durch Induction gelangen, oder man mufs die Gleichung (2.) direct auflösen.

Ob wir nun gleich weiter unten eine directe Auflösung dieser Gleichung für alle positiven und für gewisse Coefficienten aller negativen Potenzen anzugeben im Stande sein werden, so glaube ich, eine andere Methode zur Auffindung des verlangten Gesetzes vorziehn zu dürfen, da sie auf den bekanntesten Entwickelungen beruht, und fast eine elementare genannt werden kann.

A. Reihen-Entwickelung für positive Potenzen.

Es ist bekanntlich

$$3.\quad \sin n\varphi=n\varphi-\frac{n^3\varphi^3}{1.2.3}+\frac{n^5\varphi^5}{1.2.3.4.5}-\ldots.+(-1)^m\frac{n^{2m+1}\varphi^{2m+1}}{1.2.3\ldots.2m+1}+\ldots.$$

und auch

$$4.\quad \sin n\varphi=n\sin\varphi-\frac{n(nn-1)}{2.3}\sin\varphi^3+\frac{n(nn-1)(nn-9)}{2.3.4}\sin\varphi^5-\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{(-1)^q n(nn-1)(nn-9)\ldots.(nn-(2q-1)^2)}{2.3.4\ldots.2q+1}\sin\varphi^{2q+1}+\ldots.$$

Entwickelt man also in dieser letzten Gleichung den Coefficienten von n^{2m+1}, so ist klar, dafs derselbe, da beide Reihen für jeden ganzen Werth von n gelten, $=\frac{(-1)^m\varphi^{2m+1}}{1.2.3\ldots.2m+1}$ ist, und somit ist die verlangte Entwickelung für jede ungerade positive Potenz gefunden.

Auf dieselbe Weise hat man

$$5.\quad \cos n\varphi=1-\frac{n^2\varphi^2}{1.2}+\frac{n^4\varphi^4}{1.2.3.4}-\ldots.+(-1)^p\frac{n^{2m}\varphi^{2m}}{1.2.3\ldots.2m}+\ldots.$$

---

*) Die hier durch $f(m,p)$, $f(m,p-1)$, $f(m-2,p)$ angedeuteten Coefficienten sind a. a. O. durch a_{m+2p}, a_{m+2p-2}, b_{m+2p-2} bezeichnet.

und auch

$$6.\quad \cos n\varphi = 1 - \frac{nn\sin\varphi^2}{1.2} + \frac{nn(nn-4)\sin\varphi^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^q \frac{nn(nn-4)(nn-16)\ldots.(nn-4(q-1)^2)\sin\varphi^{2q}}{1.2.3\ldots.2q} + \ldots.,$$

und durch die Entwickelung des Coefficienten von n^{2p} in dieser Gleichung erhält man die verlangten Reihen für jede gerade positive Potenz des Bogens. Suchen wir also zuerst die Auflösung für ungerade Potenzen.

Setzt man

$$7.\quad (nn-1)(nn-9)(nn-25)\ldots.(nn-(2q-1)^2) =$$
$$n^{2q} - A_q^1 n^{2q-2} + A_q^2 n^{2q-4} - \ldots. + (-1)^{q-m} A_q^{q-m} n^{2m} + \ldots. + (-1)^q A_q^q \ldots.,$$

so weifs Jedermann, dafs $A^1 q$, $A^2 q$, $A^3 q$, ... die Summen der Combinationen resp. zur ersten, zweiten, dritten, ... Classe ohne Wiederholungen aus den Zahlen 1^2, 3^2, 5^2, ... $(2q-1)^2$ sind, und es geht aus dieser Gleichung selbst hervor, dafs $A_q^k = 1$ zu setzen ist, wenn $k = 0$, hingegen $= 0$ angenommen werden mufs, wenn die ganze Zahl k entweder negativ oder gröfser als q ist. Es ist folglich das mit n^{2m+1} verbundene Glied in dem Coefficienten von $\sin\varphi^{2q+1}$ in der Gleichung (4.)

$$= \frac{(-1)^m A_q^{q-m} n^{2m+1}}{2.3.4\ldots.2q+1},$$

und in diesem Ausdrucke ist q mindestens $= m$ anzunehmen, wenn er nicht verschwinden soll. Demnach ist der Coefficient von n^{2m+1} in der Gleichung (4.)

$$= \frac{(-1)^m}{2.3\ldots.2m+1}\left(\sin\varphi^{2m+1} + \frac{A_{m+1}^1 \sin\varphi^{2m+3}}{2m+2.2m+3} + \frac{A_{m+2}^2 \sin\varphi^{2m+5}}{2m+2.2m+3.2m+4.2m+5} + \ldots.\right).$$

Dieselbe Quantität ist aber, wie wir bereits oben bemerkt haben, $= \frac{(-1)^m \varphi^{2m+1}}{1.2.3\ldots.2m+1}$, und daher hat man:

$$8.\quad \varphi^{2m+1} = \sin\varphi^{2m+1}\left(1 + A_{m+1}^1 \frac{\sin\varphi^2}{2m+2.2m+3} + A_{m+2}^2 \frac{\sin\varphi^4}{2m+2.2m+3.2m+4.2m+5} + \ldots.\right.$$
$$\left. \ldots. + A_{m+p}^p \frac{\sin\varphi^{2p}}{2m+2.2m+3\ldots.2m+2p+1} + \ldots.\right),$$

welche Gleichung die vollständige Auflösung unseres Problems für jede ungerade positive Potenz enthält. Setzt man auf gleiche Weise

$$9.\quad (nn-4)(nn-16)\ldots.(nn-4qq) =$$
$$n^{2q} - B^1 q\, n^{2q-2} + B^2 q\, n^{2q-4} - \ldots. + (-1)^{q-m} B_q^{q-m} n^{2m} + \ldots. + (-1)^q B_q^q,$$

so dafs die Quantitäten B auf dieselbe Weise aus den Quadraten der ge-

raden Zahlen gebildet werden, als die entsprechenden Quantitäten A aus den Quadraten der ungeraden Zahlen gebildet wurden, so erhält man auf demselben Wege aus (5.) und (6.) für gerade positive Potenzen:

$$10.\quad \varphi^{2m} = \sin\varphi^{2m}\left(1+B^1_m\frac{\sin\varphi^2}{2m+1\,.\,2m+2}+B^2_{m+1}\frac{\sin\varphi^4}{2m+1.2m+2.2m+3.2m+4}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots.+B^p_{m+p-1}\frac{\sin\varphi^{2p}}{2m+1\,.\,2m+2\ldots.2m+2p}+\ldots.\right).$$

Man bemerkt aber nunmehr sehr leicht, dafs die beiden Reihen (8.) und (10.) sich unter eine einzige Form bringen lassen, und dafs demnach die besten für einen geraden und einen ungeraden Werth von m getrennten Formen von einer und derselben Gleichung umfafst werden können. Man hat nemlich für jedes ganze positive m:

$$11.\quad \varphi^m = \sin\varphi^m\left(1+C^1_\mu\frac{\sin\varphi^2}{m+1.m+2}+C^2_{\mu+1}\frac{\sin\varphi^4}{m+1.\,m+2.\,m+3.\,m+4}+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+C^p_{\mu+p-1}\frac{\sin\varphi^{2p}}{m+1\,.\,m+2\ldots.m+2p}+\ldots.\right).$$

In dieser Gleichung ist $\mu = \frac{1}{2}m+\frac{1-(-1)^m}{4}$, d. h. μ ist $=\frac{m+1}{2}$ oder $\frac{m}{2}$, je nachdem m ungerade oder gerade ist. Ferner ist:

C^1_μ die Summe der μ Zahlen m^2, $(m-2)^2$, $(m-4)^2$, ...,

$C^2_{\mu+1}$ die Summe der Binionen aus den $\mu+1$ Zahlen $(m+2)^2$, m^2, $(m-2)^2$, ...,

$C^3_{\mu+2}$ die Summe der Ternionen aus den $\mu+2$ Gröfsen $(m+4)^2$, $(m+2)^2$, m^2, ...,

und im Allgemeinen ist

$C^p_{\mu+p-1}$ die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen aus den $\mu+p-1$ Gröfsen $(m+2p-2)^2$, $(m+2p-4)^2$, $(m+2p-6)^2$, ...

Setzt man z. B. $m=1$, so wird $\mu=1$, $C^1_\mu=1$, $C^2_{\mu+1}=1^2.3^2$, $C^3_{\mu+2}=1^2.3^2.5^2$ u. s. f., und folglich

$$12.\quad \varphi = \sin\varphi+\frac{1}{2}\frac{\sin\varphi^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\sin\varphi^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\sin\varphi^7}{7}+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{1.3.5\ldots.2p-1}{2.4.6\ldots.2p}\frac{\sin\varphi^{2p+1}}{2p+1}+\ldots.,$$

wie bekannt. Setzt man $m=2$, so wird $\mu=1$, $C^1\mu=2^2$, $C^2_{\mu+1}=2^2.4^2$, $C^3_{\mu+1}=2^2.4^2.6^2$, u. s. f., und folglich

$$13.\quad \varphi^2=\sin\varphi^2+\frac{2}{1}\cdot\frac{\sin\varphi^4}{3.2}+\frac{2.4}{1.3}\cdot\frac{\sin\varphi^6}{5.3}+\ldots.+\frac{2.4.6\ldots.2p}{1.3.5\ldots.2p-1}\cdot\frac{\sin\varphi^{2p+2}}{2p+1.p+1}+\ldots.,$$

welches die von Stainville gefundene Reihen-Entwickelung ist, die auch

Herr Clausen in dem dritten Bande pag. 91. des gegenw. Journals auf einem andern Wege erhalten hat.

Wird, um einige Potenzen zu übergehen, $m = 7, 8, 9, 10, \ldots$ gesetzt, so erhält man

$$\varphi^7 = \sin\varphi^7\left[1+(1^2+3^2+5^2+7^2)\frac{\sin\varphi^2}{8.9}+(1^2.3^2+1^2.5^2+\ldots+7^2.9^2)\frac{\sin\varphi^4}{8.9.10.11}\right.$$
$$\left.+(1^2.3^2.5^2+1^2.3^2.7^2+\ldots+7^2.9^2.11^2)\frac{\sin\varphi^6}{8.9\ldots.13}+\ldots.\right],$$

$$\varphi^8 = \sin\varphi^8\left[1+(2^2+4^2+6^2+8^2)\frac{\sin\varphi^2}{9.10}+(2^2.4^2+2^2.6^2+\ldots+8^2.10^2)\frac{\sin\varphi^4}{9.10.11.12}\right.$$
$$\left.+(2^2.4^2.6^2+2^2.4^2.8^2+\ldots+8^2.10^2.12^2)\frac{\sin\varphi^6}{9.10\ldots.14}+\ldots.\right],$$

$$\varphi^9 = \sin\varphi^9\left[1+(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2)\frac{\sin\varphi^2}{10.11}+(1^2.3^2+1^2.5^2+\ldots+9^2.11^2)\frac{\sin\varphi^4}{10.11.12.13}\right.$$
$$\left.+(1^2.3^2.5^2+1^2.3^2.7^2+\ldots+9^2.11^2.13^2)\frac{\sin\varphi^6}{10.11\ldots.15}+\ldots.\right]$$

$$\varphi^{10} = \sin\varphi^{10}\left[1+(2^2+4^2+6^2+8^2+10^2)\frac{\sin\varphi^2}{11.12}+(2^2.4^2+2^2.6^2+\ldots+10^2.12^2)\frac{\sin\varphi^4}{10.11.12.13}\right.$$
$$\left.+(2^2.4^2.6^2+2^2.4^2.8^2+\ldots+10^2.12^2.14^2)\frac{\sin\varphi^6}{11.12\ldots.16}+\ldots.\right],$$

u. s. f.

Hierdurch haben wir nun zu gleicher Zeit eine Auflösung der Coefficientengleichung (2.) für jeden positiven Werth von m gefunden. Es ist nemlich:

$$14.\quad f(m,p) = \frac{K}{m+1.m+2\ldots.m+2p}C^p_{\mu+p-1},$$

wo K eine beliebige, von m und p unabhängige Gröfse ist. Es ist aber in der That leicht, dieses Resultat auch auf einem directen Wege, und somit eine zweite Auflösung unserer Aufgabe zu finden. Giebt man nemlich jener Gleichung, indem man sie durch $m+1.m+2\ldots.m+2p-2$ multiplicirt, die Form

$$m+1.m+2\ldots.(m+2p)f(m,p) = m-1.m\ldots.(m+2p-2)f(m-2,p)$$
$$+(m+1)(m+2)\ldots.(m+2p-2).(m+2p-2)^2 f(m,p-1),$$

so übersieht man augenblicklich, dafs man

$$15.\quad m+1.m+2\ldots.(m+2p)f(m,p) = K.\varphi(m,p)$$

setzen müsse, damit sie die einfachere Gestalt

$$16.\quad \varphi(m,p) = \varphi(m-2,p)+(m+2p-2)^2\varphi(m,p-1)$$

annehme. Die Form dieser Gleichung, in welcher eine Function von 2 Gröfsen m, p in zwei ähnliche Functionen zerlegt ist, in denen abwech-

selnd das eine Element unverändert geblieben, und das andere verändert worden ist, erinnert aber an eine der Grundgleichungen für Combinationen ohne Wiederholungen, bei denen eine ähnliche Zerlegung vorkömmt. Bekanntlich läfst sich nemlich die Summe der als Producte betrachteten Combinationen ohne Wiederholungen aus den Zahlen $(m+2p-2)^2$, $(m+2p-4)^2$, $(m+2p-6)^2$, ..., deren letzte $=1$ oder 4, je nachdem man für m eine ungerade oder gerade Zahl annimmt, und deren Anzahl folglich $=\mu+p-1$ ist, zur $p$ten Classe in zwei Theile zerlegen, deren erster das gröfste Element $(m+2p-2)^2$ noch nicht enthält, und der folglich aus der Summe aller Combinationen ohne Wiederholungen aus den $\mu+p-2$ Zahlen $(m+2p-4)^2$, $(m+2p-6)^2$, ... besteht, und in deren zweitem, $(m+2p-2)^2$ Factor jeder einzelnen Form ist; die Summe aller in diesen Factor multiplicirten Formen ist demnach die Summe aller Combinationen ohne Wiederholungen zur $(p-1)$ten Classe aus den $\mu+p-2$ Zahlen $(m+2p-4)^2$, $(m+2p-6)^2$, ..., d. h. es ist

$$17.\quad C^p_{\mu+p-1} = C^p_{\mu+p-2} + (m+2p-2)^2\, C^{p-1}_{\mu+p-2}.$$

Diese Gleichung hat aber mit (16.) eine solche Conformität, dafs die Identität beider in die Augen springt; es erhellt nemlich, dafs, wenn man zeigen kann, es sei für die kleinsten Werthe von p und m,

$$18.\quad \varphi(m,p) = C^p_{\mu+p-1},$$

dieselbe Gleichung auch für jeden gröfseren Werth besteht. Sie giebt aber für $m=\mu=1$,

$$\varphi(1,p) = C^p_p = 1^2.3^2.5^2....(2p-1)^2,$$

und folglich

$$f(1,p) = \frac{K.\varphi(1,p)}{2.3.4....2p+1} = K.\frac{1.3.5....2p-1}{2.4.6....2p}\,\frac{1}{2p+1}.$$

Aus der Zusammenstellung von (1.) und der bekannten Reihen-Entwickelung (12.) hat man aber

$$f(1,p) = \frac{1.3.5....2p-1}{2.4.6....2p}.\frac{1}{2p+1}.$$

Folglich ist $K=1$ zu setzen, damit (18.) für jeden Werth von p bestehe, wenn $n=1$ angenommen wird. Aus (1.) hat man ferner:

$$f(m,0) = 1,$$

und wenn man (15.) die Form

$$\varphi(m,p) = \frac{1.2....(m+2p)}{1.2....m} f(m,p)$$

giebt, so erhellt, dafs

$$\varphi(m,0) = \frac{1.2....m}{1.2....m} f(m,0) = 1.$$

Da aber auch $C^{\circ}_{\mu-1} = 1$, so besteht die Gleichung (18.) auch für jeden Werth von m, und für $p = 0$; demnach ist sie richtig für den kleinsten Werth von m und jeden Werth von p, und umgekehrt für den kleinsten Werth von p und jeden Werth von m; und daher gilt sie allgemein. Hieraus folgt also, dafs die Gleichung (14.), wenn in derselben $K = 1$ angenommen wird, die zu unserm Problem gehörige Auflösung von (2.) ist, wie zu beweisen war.

Ehe wir nunmehr zur Reihen-Entwickelung der negativen Potenzen übergehen, möge vorher noch Einiges über die Berechnung der hier vorkommenden Combinationen aus den Quadraten der geraden oder der ungeraden Zahlen bemerkt werden. Zuerst ist klar, dafs man jede der Quantitäten C^{1}_{μ}, $C^{2}_{\mu+1}$ u. s. f. unabhängig von allen übrigen berechnen kann. Es ist aber in diesem Falle, da man es fast in allen analytischen Anwendungen nur mit den Combinationen aus den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... selbst zu thun, und für diese auch kleine Tafeln berechnet hat (s. z. B. Kramp in seiner „*Analyse des refractions astr. et terr.*" für Combb. ohne Wiederholungen §. 90., und mit Wiederh. §. 106., und etwas ausgedehntere in meiner Inaugural-Dissertation „*de evolv. funct. etc.*" am Ende), vortheilhafter, unsere Combinationen aus den Quadraten auf die aus den natürlichen Zahlen selbst zurückzuführen. Dies geschieht auf folgende Weise.

Sind a, b, c, ... beliebige Zahlen, und setzt man

$$(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots. = 1-Ax+Bx^2-Cx^3+\ldots.$$
$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)\ldots. = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots.$$

und

$$(1-a^2x^2)(1-b^2x^2)(1-c^2x^2)\ldots. = 1-Px^2+Qx^4-Rx^6+\ldots.,$$

so sind A, B, C, ..., wie bekannt, die Combinationen ohne Wiederholungen aus den ersten Potenzen, und P, Q, R, ... aus den Quadraten der Zahlen a, b, c, ... Da aber das Product der beiden ersten Gleichungen die dritte geben mufs, so hat man

$$P = A^2 - 2B,$$
$$Q = B^2 - 2AC + 2D,$$
$$R = C^2 - 2BD + 2AC - 2F,$$

u. s. f.,

welches die Formeln sind, die **Euler** in seinen „*Inst. calc. diff. T. II.* §. 327." mitgetheilt hat. Wird nun $a=1$, $b=2$, $c=3$, ... gesetzt, so erhält man hierdurch die Combinationen aus den Quadraten aller, und folglich auch aus den geraden Zahlen allein, wenn man mit einer entsprechenden Potenz von 2 multiplicirt. So ist z. B. nach der ersten Eulerschen Formel

$$1^2+2^2+3^2 = (1+2+3)^2-2(1.2+1.3+2.3),$$

also

$$B_3^1 = 2^2+2^4+2^6 = 2^2(1+2+3)^2-2^3(1.2+1.3+2.3).$$

Aus den Coefficienten B der Gleichung (9.) erhält man aber leicht die Coefficienten A der Gleichung (7.), weil das Product von (10.) und (12.) die Gleichung (8.) zum Resultate geben mufs. Hierdurch hat man z. B.

$$\frac{A_3^1}{6.7} = \frac{B_3^1}{7.8}-\frac{1}{2.3},$$

daher

$$A_3^1 = 1+3^2+5^2 = 3(1+2+3)^2-6(1.2+1.3+2.3)-7.$$

Dies gilt für Combinationen ohne Wiederholungen. Für Combinationen mit Wiederholungen hat man ganz ähnliche Bestimmungen, und da wir im Verfolg unserer Untersuchung auf solcherlei Combinationen kommen werden, so scheint es passend, das sie Betreffende hier gleich mitzunehmen. Setzt man nemlich:

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)....} = 1+{}'Ax+{}'Bx^2+{}'Cx^3+....,$$

$$\frac{1}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)....} = 1-{}'Ax+{}'Bx^2-{}'Cx^3+....$$

und

$$\frac{1}{(1-a^2x^2)(1-b^2x^2)(1-c^2x^2)....} = 1+{}'Px^2+{}'Qx^4+{}'Rx^6+....$$

so haben bekanntlich $'A$, $'B$, $'C$, ... $'P$, $'Q$, $'R$, ... ganz dieselben Bedeutungen als resp. A, B, C, ... P, Q, R, ..., mit dem einzigen Unterschiede, dafs gegenwärtig in den Combinations-Formen unbedingte Wiederholbarkeit der Elemente gestattet ist. Da aber auch gegenwärtig das Product der beiden ersten Gleichungen die dritte zum Resultat geben mufs, so folgt, dafs die Eulerschen Sätze für Combinationen ohne Wiederholungen ganz auf dieselbe Weise auch für Combinationen mit Wiederholungen gelten, wenn man nur den aus den Quadraten gebildeten Combinationen von ungerader Classe das negative Vorzeichen vorsetzt. Da wir ferner sehr bald sehen werden, dafs

für die negativen Potenzen der Bogen ähnliche Gleichungen als (8.) und (10.) gelten, so kann man auch hier die Quadrate der ungeraden aus denen der geraden Zahlen herleiten, und demnach vollständig wie vorher verfahren. So ist z. B.

$$2^2+4^2+6^2 = -2^2(1+2+3)^2+2^3(1.1+1.2+1.3+2.2+2.3+3.3) \text{ und}$$
$$1^2+3^2+5^2 = \tfrac{5}{7}[-2^2(1+2+3)^2+2^3(1.1+1.2+1.3+2.2+2.3+3.3)-7].$$

Zuletzt ist klar, dafs es, weil

$$(1-Px^2+Qx^3-Rx^4+....)(1+'Px^2+'Qx^4+'Rx^6+....) = 1,$$

nur nöthig ist, entweder die Combinationen ohne Wiederholungen, P, Q, R, ..., oder die mit Wiederholungen $'P$, $'Q$, $'R$, ... berechnet zu haben, weil vermittelst der so eben angegebenen Gleichung sich die einen aus den andern leicht berechnen lassen. Für die letzteren hat Herr Prof. Gudermann eine kleine Tafel berechnet (s. gegenw. Journal VI. Band pag. 319.), deren zweite Horizontalreihe die Combinationen zur ersten, die dritte Reihe zur zweiten Classe u. s. f. aus den Quadraten der natürlichen Zahlen enthält.

So einfach auch immer die Gesetze sind, nach welchen die hier in Betracht kommenden Zahlen von einander unabhängig berechnet werden können, so ist doch an die wirkliche Ausführung der Berechnung auf diesem Wege so gut wie gar nicht zu denken, da die einzelnen Coefficienten bald zu einer enormen Gröfse anwachsen. In der That sucht man auch nicht deswegen unabhängige Berechnungs- und Darstellungsweisen, um vermittelst derselben einzelne Fälle, also etwa bei unserer Aufgabe den Coefficienten von $\sin\varphi^{20}$ in der Entwickelung von φ^8 aus der Mitte heraus, und unabhängig von den niedrigeren Potenzen von φ und von $\sin\varphi$ zu berechnen, — eine Aufgabe, in welcher dies verlangt würde, kömmt wohl fast niemals vor, und sollte es doch der Fall sein, so wird gewifs im Allgemeinen jede, auch die schwierigste und langweiligste recurrirende Darstellungsweise leichter und schneller zum Ziele führen, als die leichteste independente, — sondern deswegen ist man häufig veranlafst, allgemeine Ausdrücke und unabhängige Darstellungsweisen zu suchen, weil aus ihnen allein das Entwickelungsgesetz klar hervorleuchtet, und man auf diesem Wege häufig Eigenschaften der entwickelten Gröfsen entdeckt, auf welche man durch recurrirende Formeln nicht, oder doch nicht leicht gekommen wäre.

Was nun die recurrirende Entwickelung der Coefficienten der Reihen (1.) oder (11.) betrifft, so kann diese, wenn man von den niedrigeren Potenzen zu den höheren aufsteigen will, vermittelst der gleichbedeutenden Gleichungen (2.) oder (17.) sehr leicht bewerkstelligt werden. Es giebt aber eine viel vortheilhaftere Art, die den dreifachen Vorzug hat, dafs man die Coefficienten der niedrigeren Potenzen von φ nicht zu kennen braucht, um die der höheren Potenzen zu finden, dafs sie uns die analytischen Ausdrücke für diese Coefficienten liefert, und dafs sie auf positive und negative Potenzen gleich anwendbar ist.

Setzt man nemlich in die Gleichung

$$\frac{\sin n\varphi}{n} = \cos\varphi\left[\sin\varphi - \frac{nn-4}{2.3}\sin\varphi^3 + \frac{nn-4.nn-16}{2.3.4.5}\sin\varphi^5 - \ldots. \right.$$
$$\left. \ldots. + (-1)^p \frac{nn-4.nn-16\ldots.nn-4pp}{2.3\ldots.2p+1}\sin\varphi^{2p+1} + \ldots.\right]$$

$n = 0$, und differentiirt man (13.), so erhält man einen nicht minder einfachen Ausdruck als (12.) ist, für φ, nemlich

19. $$\varphi = \cos\varphi\left[\sin\varphi + \frac{2}{1}\frac{\sin\varphi^3}{3} + \frac{2.4}{1.3}\frac{\sin\varphi^5}{5} + \ldots. + \frac{2.4.6\ldots.2p}{1.3.5\ldots.2p-1}\frac{\sin\varphi^{2p+1}}{2p+1} + \ldots.\right]$$ *).

Auf gleiche Weise erhält man durch die Differentiation von (1.) die allgemeinere Gleichung

20. $$\varphi^{m-1} = \sin\varphi^{m-1}\cos\varphi\left[1 + \frac{m+2}{m}f(m,1)\sin\varphi^2 + \frac{m+4}{m}f(m,2)\sin\varphi^4 + \ldots. \right.$$
$$\left. \ldots. + \frac{m+2p}{m}f(m,p)\sin\varphi^{2p} + \ldots.\right].$$

Multiplicirt man nun (19.) durch $\cos\varphi$, so ist

21. $$\varphi\cos\varphi = (1-\sin\varphi^2)\sin\varphi\left[1 + \frac{2}{1}\frac{\sin\varphi^3}{3} + \frac{2.4}{1.3}\frac{\sin\varphi^5}{5} + \ldots.\right]$$
$$= \sin\varphi\left[1 - \frac{\sin\varphi^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{\sin\varphi^4}{5} - \frac{2.4}{3.5}\frac{\sin\varphi^6}{7} - \ldots. - \frac{2.4.6\ldots.2p-2}{3.5.7\ldots.2p-1}\frac{\sin\varphi^{2p}}{2p+1} - \ldots.\right],$$

also, wenn diese Gleichung in (20.) multiplicirt, und $\frac{\varphi^m}{\sin\varphi^m}$ aus (1.) genommen wird:

---

*) Diese Reihenentwickelung des Bogens ist, wie es scheint, minder bekannt geworden, wird aber doch zuweilen gebraucht. S. z. B. Gaufs in den *Disq. gener. circa seriem infinit. etc.* §. 5. *XIV.* Vergl. auch dieses Journal VI. Bd. pag. 360., wo Herr Prof. Gudermann diese und einige andere Entwickelungen aus einem eleganten Theorem herleitet, das er für neu hält. Es findet sich aber bereits in Pfaff's *Disquis. analyt.* in der Abh.: *Nova disquisitio de integratione aequationis differentio-differentialis* §. *XXVIII.* 3. Der Beweis, den Herr Prof. Gudermann von demselben giebt, ist aber nicht blofs von dem Pfaff'schen sehr verschieden, sondern auch direct und kurz.

$$1+f(m,1)\sin\varphi^2+f(m,2)\sin\varphi^4+\ldots.+f(m,p)\sin\varphi^{2p}+\ldots. =$$
$$\left[1-\frac{\sin\varphi^2}{3}-\frac{2}{3}\,\frac{\sin\varphi^4}{5}-\ldots.-\frac{2.4.6\ldots.2p-2}{1.3.5\ldots.2p-1}\,\frac{\sin\varphi^{2p}}{2p+1}-\ldots.\right]$$
$$\left[1+\frac{m+2}{m}f(m,1)\sin\varphi^2+\frac{m+4}{m}f(m,2)\sin\varphi^4+\ldots.+\frac{m+2q}{m}f(m,p)\sin\varphi^{2p}+\ldots.\right].$$

Hieraus ergeben sich nun folgende recurrirende Bestimmungen für die Coefficienten der ursprünglichen Reihe, welche gelten, m mag positiv oder negativ sein:

$$22.\quad\begin{cases} f(m,1)=\frac{1}{6}m, \\ f(m,2)=\frac{1}{12}\left[(m+2)f(m,1)+\frac{2}{5}m\right], \\ f(m,3)=\frac{1}{18}\left[(m+4)f(m,2)+\frac{2}{5}(m+2)f(m,1)+\frac{2.4}{5.7}m\right], \\ f(m,4)=\frac{1}{24}\left[(m+6)f(m,3)+\frac{2}{5}(m+4)f(m,2)+\frac{2.4}{5.7}(m+2)f(m,1)+\frac{2.4.6}{5.7.9}\right], \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Die analytischen Bestimmungen für die Coefficienten $f(m,1)$, $f(m,2)$, ..., die man aus diesen Gleichungen herleiten kann, sind ganz dieselben, welche die Erhebung der Reihe (12.) auf die $m$te Potenz gegeben haben würde.

B. Reihen-Entwickelung für negative Potenzen.

Trennen wir auch hier zuerst die Entwickelung für die ungeraden Potenzen von der für die geraden. Setzt man in (1.) $-2m-1$ für m, so hat man

$$22.\quad\begin{cases} \frac{1}{\varphi^{2m+1}}=\frac{1}{\sin\varphi^{2m+1}}+\frac{f(-2m-1,1)}{\sin\varphi^{2m-1}}+\frac{f(-2m-1,2)}{\sin\varphi^{2m-3}}+\ldots.+\frac{f(-2m-1,m)}{\sin\varphi} \\ +f(-2m-1,m+1)\sin\varphi+f(-2m-1,m+2)\sin\varphi^3+\ldots.+f(-2m-1,m+r)\sin\varphi^{2r-1}+\ldots. \end{cases}$$

Die Potenzen von $\sin\varphi$ sind also hier theils negative, theils positive; die Coefficienten der ersteren werden erhalten, wenn in dem Ausdrucke $f(-2m-1,p)\ldots.\ 2p$ kleiner als $2m+1$, die der anderen, wenn $2p$ gröfser als $2m+1$ angenommen wird. Für ein positives m haben wir nun oben, in (8.), gefunden, dafs

$$f(2m+1,p)=\frac{A^p_{m+p}}{2m+2.2m+3\ldots.2m+2p+1}$$

war. Dort war uns die Bedeutung des Ausdrucks A^p_{m+p} bekannt. Setzen wir also hierin $-(m+1)$ für m, um

$$23.\quad f(-2m-1,p)=\frac{A^p_{p-m-1}}{2m.2m-1.2m-2\ldots.2m-2p+1}$$

zu erhalten, so müssen wir erst untersuchen, was der Zähler dieses Aus-

drucks im gegenwärtigen Falle bedeutet. Diese Untersuchung werden wir aber für die Coefficienten der negativen Potenzen von $\sin\varphi$ auf einem andern Wege anstellen müssen, als für die positiven. Ist nemlich erstlich $p < m+\frac{1}{2}$, und folglich $p-m-1$ eine negative Zahl, so folgt aus (7.), dafs, wenn q eine positive ganze Zahl, und

$$(1+x^2)(1+9x^2)(1+25x^2)\ldots.(1+(2q-1)^2x^2) = \psi(q)$$

gesetzt wird, man

24. $$\psi(-q) = 1+A^1_{(-q)}x^2+A^2_{(-q)}x^4+\ldots.+A^p_{(-q)}x^{2p}+\ldots.$$

haben wird. Nun ist aber offenbar

$$\psi(q-1) = \frac{\psi(q)}{1+(2q-1)^2x^2}.$$

Setzt man also hierin zuerst $q=1$, so ist

$$\psi(0) = \frac{\psi(1)}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1.$$

Ferner setze man nach einander $q=0, -1, -2, \ldots. -(q-1)$, so erhält man

$$\psi(-1) = \frac{\psi(0)}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2};\quad \psi(-2) = \frac{\psi(-1)}{1+9x^2} = \frac{1}{(1+x^2)(1+9x^2)};\quad \ldots.$$

$$\psi(-q) = \frac{1}{(1+x^2)(1+9x^2)\ldots.(1+(2q-1)^2x^2)},$$

folglich ist, nach dem bekannten Entwickelungsgesetz eines solchen Bruches:

25. $$\psi(-q) = 1-{}'A^1_q x^2+{}'A^2_q x^4-\ldots.+(-1)^p\,{}'A^p_q x^{2p}+\ldots.,$$

wo die Coefficienten ${}'A^1_q$, ${}'A^2_q$, ${}'A^3_q$, ... die Summen der Combinationen resp. zur ersten, zweiten, dritten, ... Classe mit Wiederholungen aus den Zahlen 1, 9, 25, ... $(2q-1)^2$ anzeigen. Aus der Vergleichung von (24.) und (25.) ergiebt sich aber, dafs

$$A^p_{(-q)} = (-1)^p\,{}'A^p_q,$$

oder, wenn die positive Zahl $m+1-p=q$ gesetzt wird, dafs für jeden Werth von p, der kleiner als $m+\frac{1}{2}$ ist:

26. $$A^p_{p-m-1} = (-1)^p\,{}'A^p_{m-p+1}$$

ist, woraus folglich, für eben dieselben Werthe von p,

27. $$f(-2m-1,p) = \frac{(-1)^p\,{}'A^p_{m-p+1}}{2m.2m-1.2m-2\ldots.2m-2p+1}$$

hervorgeht. Hierdurch sind also die Coefficienten der negativen Potenzen von $\sin\varphi$ in (22.) bestimmt.

Ist aber zweitens $p > m+\frac{1}{2}$, so ist zwar $p-m-1$ positiv, aber kleiner als p, und demnach $A^p_{p-m+1}=0$; aber in diesem Falle kömmt

auch im Nenner des Ausdrucks (22.) der Factor Null vor; der ganze Ausdruck wird folglich unbestimmt, und um seinen wahren Werth zu finden, müfste man zu den bekannten Mitteln seine Zuflucht nehmen, die aber, wie es scheint, hier alle auf grofse Weitläufigkeiten führen. Statt dessen verfahre man auf folgende Weise:

Bezeichnet man die Bernoullischen Zahlen nach einander, die erste durch $\overset{1}{\beta}$, die zweite durch $\overset{2}{\beta}$, die dritte durch $\overset{3}{\beta}$ u. s. f., so ist bekanntlich:

$$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\varphi} + \frac{2(2-1)}{1.2}\overset{1}{\beta}\varphi + \frac{2(2^3-1)}{1.2.3.4}\overset{2}{\beta}\varphi^3 + \ldots + \frac{2(2^{2p-1}-1)}{1.2.3\ldots.2p}\overset{p}{\beta}\varphi^{2p-1} + \ldots,$$

und daher

$$28.\quad \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi} - \frac{(2-1)}{1}\overset{1}{\beta}\varphi - \frac{(2^3-1)}{1.2.3}\overset{2}{\beta}\frac{\varphi^3}{2} - \ldots. - \frac{(2^{2p-1}-1)}{1.2.3\ldots.2p-1}\overset{p}{\beta}\frac{\varphi^{2p-1}}{p}.$$

Setzt man in diese Gleichung für φ, φ^3, φ^5, ... die aus (8.) sich ergebenden Entwickelungen nach den positiven Potenzen von $\sin\varphi$, so hat man die verlangte Reihe für $\frac{1}{\varphi}$. Differentiirt man ferner die Gleichung (28.) zwei Mal, und setzt in das Resultat, also in

$$\frac{1}{\varphi^3} = \frac{1}{1.2}\left[\frac{2}{\sin\varphi^2} - \frac{1}{\sin\varphi} - \frac{(2^3-1)}{1}\overset{2}{\beta}\frac{\varphi}{2} - \frac{(2^5-1)}{1.2.3}\overset{3}{\beta}\frac{\varphi^3}{3} - \ldots. - \frac{(2^{2p-1}-1)}{1.2.3\ldots.2p-3}\overset{p}{\beta}\frac{\varphi^{2p-3}}{p} - \ldots.\right]$$

ebendieselben Entwickelungen für φ, φ^3, φ^5, ..., so erhält man die verlangte Reihe für $\frac{1}{\varphi^3}$. Im Allgemeinen übersieht man leicht, dafs, da jeder gerade Differentialquotient von $\frac{1}{\sin\varphi}$ einer Reihe von Brüchen gleich ist, deren Zähler constante Zahlen, und deren Nenner die auf einander folgenden ungeraden Potenzen von $\sin\varphi$ sind, die verlangte Entwickelung von $\frac{1}{\varphi^{2m+1}}$ nach den steigenden Potenzen von φ durch eine $2m$fache Differentiation von (28.) erhalten werden wird; und zwar werden die negativen Potenzen von $\sin\varphi$ einzig durch die Differentiation von $\frac{1}{\sin\varphi}$, die positiven durch die Differentiation der übrigen Glieder des zweiten Theils der Gleichung (28.) entstehen. Aber auf die Coefficienten der negativen Potenzen von $\sin\varphi$ kömmt es uns hier gar nicht an, da wir deren allgemeinen Ausdruck schon oben, in (27.), gefunden haben, sondern es ergiebt sich hieraus vielmehr umgekehrt, dafs

29. $$\frac{\partial^{2m}.\operatorname{cosec}\varphi}{\partial\varphi^{2m}} = 1.2.3....2m\left[\frac{1}{\sin\varphi^{2m+1}}+\frac{f(-2m-1,1)}{\sin\varphi^{2m-1}}+\frac{f(-2m-1,2)}{\sin\varphi^{2m-3}}+....+\frac{f(-2m-1,m)}{\sin\varphi}\right]$$

$$= 1.2.3....2m\left[\frac{1}{\sin\varphi^{2m+1}}-\frac{'A^1_m}{2m.2m-1}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^{2m-1}}+....+\frac{(-1)^p\,'A^p_{m-p+1}}{2m.2m-1....2m-2p+1}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^{2m-2p+1}}+....\right.$$

$$\left.....+\frac{(-1)^m}{2m.2m-1....2.1}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\right],$$

ein Ausdruck, der auch sonst bekannt und von Anwendung ist. (S. z. B. gegenw. Journal Band VI. pag. 321., und für den allgemeinen Ausdruck des ungeraden Differentialquotienten der Cotangente, auf den wir bei der Entwickelung der negativen geraden Potenzen des Bogens kommen, p. 317. Dort sind diese Ausdrücke auf dieselbe Art hergeleitet, wie wir oben die Gleichung (2.) für positive m direct aufgelöst haben.)

Nimmt man nunmehr den $2m$ten Differentialquotienten von (28.), so erhält man:

30. $$\frac{1.2.3....2m}{\varphi^{2m+1}} = \frac{\partial^{2m}.\operatorname{cosec}\varphi}{\partial\varphi^{2m}} - \sum_{m+1}^{\infty p}\frac{(2^{2p-1}-1)}{1.2.3....2p-2m-1}\beta^p\frac{\varphi^{2p-2m-1}}{p},$$

wo das Summenzeichen $\sum_{m+1}^{\infty}{}_p$ wie gewöhnlich anzeigt, dafs für p nach und nach $m+1$, $m+2$, ... gesetzt werden solle. Man weifs aber aus (8.), wenn man daselbst m, p resp. mit $p-m-1$, k vertauscht, dafs

$$\varphi^{2p-2m-1} = \sum_{0}^{\infty k} A^k_{k+p-m-1}\frac{\sin\varphi^{2k+2p-2m-1}}{2p-2m.2p-2m+1....2k+2p-2m-1}$$

ist. Setzt man also diesen Ausdruck in (32.), so wird der Coefficient von $\sin\varphi^{2k+2p-2m-1}$ hierdurch =

$$\sum_{0}^{\infty k}\frac{(2^{2p-1}-1)}{p}\beta^p\frac{A^k_{k+p-m-1}}{1.2.3....2k+2p-2m-1},$$

oder, wenn $k+p-m=r$, also $k=r+m-p$ gesetzt wird, so ist der Coefficient von $\frac{\sin\varphi^{2r-1}}{1.2.3....2r-1}$:

$$= \sum_{m+1}^{m+r}{}_p\frac{(2^{2p-1}-1)}{p}\beta^p A^{r+m-p}_{r-1}.$$

In diesem Summen-Ausdrucke sind dem p offenbar alle Werthe beizulegen, die es der Natur der Sache nach erhalten kann, d. i., weil $r+m-p$ weder negativ, noch gröfser als $r-1$ werden darf, die Werthe $m+1$, $m+2$, ... $m+r$, wie wir es auch bei dem Summenzeichen bemerkt haben.

Aus allem diesem ergiebt sich also folgende allgemeine Entwickelung der negativen ungeraden Potenzen des Bogens:

Es ist, wenn A_q^1, A_q^2, A_q^3, ... die Summen der Combinationen resp. zur ersten, zweiten, dritten, ... Classe aus den Quadraten der 9 ersten ungeraden Zahlen ohne Wiederholungen, wenn ferner $'A_q^1$, $'A_q^2$, $'A_q^3$, ... dieselben Combinationssummen mit Wiederholungen bedeuten, $\overset{1}{\beta}$, $\overset{2}{\beta}$, $\overset{3}{\beta}$, ... die erste, zweite, dritte. .... Bernoullische Zahl anzeigt, und Kürze halber

$$\frac{(2^{2k-1}-1)}{k}\overset{k}{\beta} = \overset{k}{\alpha}$$

gesetzt wird:

$$31.\quad \frac{1}{\varphi^{2m+1}} = \frac{1}{\sin\varphi^{2m+1}} - \frac{'A_m^1}{2m.2m-1}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^{2m-1}} + \frac{'A_{m-1}^2}{2m.2m-1.2m-2.2m-3}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^{2m-3}} - \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{(-1)^m}{2m.2m-1\ldots.2.1}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}$$

$$- \frac{1}{1.2.3\ldots.2m}\Big\{\overset{m+1}{\alpha}\sin\varphi$$

$$+\Big(\overset{m+1}{\alpha}A_1^1 + \overset{m+2}{\alpha}\Big)\frac{\sin\varphi^3}{1.2.3}$$

$$+\Big(\overset{m+1}{\alpha}A_2^2 + \overset{m+2}{\alpha}A_2^1 + \overset{m+3}{\alpha}\Big)\frac{\sin\varphi^5}{1.2.3.4.5}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\Big(\overset{m+1}{\alpha}A_{r-1}^{r-1} + \overset{m+2}{\alpha}A_{r-1}^{r-2} + \overset{m+3}{\alpha}A_{r-1}^{r-3} + \ldots. + \overset{m+r}{\alpha}\Big)\frac{\sin\varphi^{2r-1}}{1.2.3\ldots.2r-1}$$

$$+ \ldots.\Big\}.$$

Einen ganz ähnlichen Weg hat man einzuschlagen, um die Entwickelung der negativen geraden Potenzen des Bogens zu finden. Statt von (8.) mufs man nur von (10.) ausgehen,

$$\psi q = (1+4x^2)(1+16x^2)\ldots.(1+4q^2x^2)$$

setzen, wodurch

$$\psi(-q) = \frac{1}{(1+4x^2)(1+16x^2)\ldots.(1+4(q-1)^2x^2)}$$

wird, und statt der Reihen-Entwickelung der Cosecante die der Cotangente zu Grunde legen, wodurch man zugleich für den allgemeinen Ausdruck jedes ungeraden Differentialquotienten dieser Function

$$\frac{\partial^{2m-1}.\operatorname{cotang}\varphi}{\partial\varphi^{2m-1}} = -1.2.3\ldots.2m-1\Big\{\frac{1}{\sin\varphi^{2m}} - \frac{'B_{m-1}^1}{2m-1.2m-2}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^{2m-2}} + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{(-1)^p\,'B_{m-p}^p}{2m-1.2m-2\ldots.2m-2p}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^{2m-2p}} + \ldots. + \frac{(-1)^{m-1}\,'B_1^{m-1}}{2m-1.2m-2\ldots.2}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^2}\Big\}$$

findet, wo die Quantitäten $'B$ dieselbe Bedeutung haben, als die Quanti-

täten $'A$, mit dem einzigen Unterschiede, dafs gegenwärtig die Combinationssummen aus den Quadraten der geraden Zahlen gebildet werden. Hierdurch erhält man

$$32.\quad \frac{1}{\varphi^{2m}} = \frac{1}{\sin\varphi^{2m}} - \frac{'B^1_{m-1}}{2m-1.2m-2}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^{2m-2}} + \frac{'B^2_{m-2}}{2m-1.2m-2.2m-3.2m-4}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^{2m-4}} - \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^{m-1}\,'B^{m-1}_1}{2m-1.2m-2\ldots.2}\cdot\frac{1}{\sin\varphi^2}$$
$$- \frac{2^{2m-1}}{1.2.3\ldots.2m-1}\Big\{\frac{\overset{m}{\beta}}{m}$$
$$+ 2^2\frac{\overset{m+1}{\beta}}{m+1}\cdot\frac{\sin\varphi^2}{1.2}$$
$$+ \Big(2^2\frac{\overset{m+1}{\beta}}{m+1}B^1_1 + 2^4\frac{\overset{m+2}{\beta}}{m+2}\Big)\frac{\sin\varphi^4}{1.2.3.4}$$
$$+ \Big(2^2\frac{\overset{m+1}{\beta}}{m+1}B^2_2 + 2^4\frac{\overset{m+2}{\beta}}{m+2}B^1_2 + 2^6\frac{\overset{m+3}{\beta}}{m+3}\Big)\frac{\sin\varphi^6}{1.2\ldots.6}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \Big(2^2\frac{\overset{m+1}{\beta}}{m+1}B^{r-1}_{r-1} + 2^4\frac{\overset{m+2}{\beta}}{m+2}B^{r-2}_{r-1} + 2^6\frac{\overset{m+3}{\beta}}{m+3}B^{r-3}_{r-1} + \ldots. + 2^{2r}\frac{\overset{m+r}{\beta}}{m+r}\Big)\frac{\sin\varphi^{2r}}{1.2\ldots.2r}$$
$$+ \ldots.\Big\}.$$

Die Gleichungen (31.) und (32.) lösen also unsere Aufgabe für negative Potenzen eben so vollkommen, als (8.) und (10.) für positive Potenzen. Man hat z. B.

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi} - \overset{1}{\alpha}\sin\Phi - (\overset{1}{\alpha}+\overset{2}{\alpha})\frac{\sin\varphi^3}{1.2.3} - (1.3^2\overset{1}{\alpha} + (1+3^2)\overset{2}{\alpha} + \overset{3}{\alpha})\frac{\sin\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$
$$\frac{1}{\varphi^2} = \frac{1}{\sin\varphi^2} - 2\overset{1}{\beta} - 2\overset{2}{\beta}\sin\Phi^2 - \Big(2^3\overset{2}{\beta} + 2^4\frac{\overset{3}{\beta}}{3}\Big)\frac{\sin\varphi^4}{3.4} - \ldots.$$

u. s. f. Die recurrirenden Bestimmungen für alle Coefficienten von (31.) und (32.) erhält man aus (22.), wenn man in diesen Gleichungen m resp. mit $-(2m+1)$ oder $-2m$ vertauscht, und hieraus folgt zugleich, dafs, obgleich die Coefficienten der positiven Potenzen von $\sin\Phi$ in (31.) und (32.) ein zusammengesetzteres Ansehen haben, als die der negativen, beide Gattungen von Coefficienten doch vermittelst derselben Formeln auseinander hergeleitet werden können.

9.

Analytisch-geometrische Aphorismen.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 15. im 3ten Hefte, No. 24. im 4ten Hefte X. Bandes und No. 3. im vorigen Hefte dieses Bandes.)

(Von dem Herrn Professor *Plücker* zu Berlin.)

IV.

Das Malfattische Problem.

A. Eine Gruppe geometrischer Sätze und elementarer Beweis derselben.

1. Wenn man von solchen zwei Puncten, *M* und *N* (Taf. II. Fig. 1. und 2.), die auf zwei zusammengehörigen (d. h. auf den beiden innern oder den beiden äufsern) gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebenen Kreise *C* und *C′* liegen, noch vier Tangenten an diese Kreise legt, so bestimmen dieselben ein solches Viereck, in welches sich ein dritter Kreis *K* beschreiben läfst.

Wir können diesen Satz sehr einfach auf elementarem Wege beweisen. Zwei verschiedene Fälle sind hierbei zu unterscheiden. In dem ersten Falle sind die beiden Puncte *M* und *N*, wie in der ersten Figur, Winkelpuncte des dem Kreise *K*, nach dem vorstehenden Satze, umschriebenen einfachen Vierecks; in dem zweiten Falle findet dies nicht Statt.

In dem ersten Falle (Fig. 1.) liegt der Beweis des Satzes darin, zu zeigen, dafs die Summe zweier gegenüberliegender Seiten des in Rede stehenden Vierecks der Summe der beiden übrigen gleich ist. *M* und *N* seien zwei auf den äufsern gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Kreise *C* und *C′* beliebig angenommene Puncte, dann ist *MPNQ* jenes von den vier durch diese beiden Puncte gehenden Tangenten gebildete Viereck. Es ist also zu zeigen, dafs

$$MQ + NP = NQ + MP.$$

Dieselbe Gleichung können wir auf folgende Weise schreiben:

$$MD - QD + NB + PB = NC - QC + MA + PA,$$

und reducirt sich, da

$$QD = QC, \quad PB = PA,$$

auf folgende:

$$MD+NB = NC+MA$$

oder

$$MD-MA = NC-NB.$$

Indem wir für die einzelnen Glieder dieser Gleichung aequivalente Werthe substituiren, erhalten wir:

$$\left.\begin{matrix} ME-MF \\ EF \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} NG-NH, \\ GH, \end{matrix}\right.$$

eine Gleichung, deren Richtigkeit in die Augen springt.

Wir haben in dem Vorstehenden die beiden Puncte M und N auf den beiden äufsern gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Kreise beliebig angenommen. An die Stelle der beiden äufsern gemeinschaftlichen Tangenten können wir aber auch die beiden innern setzen. Man sieht leicht ein, dafs der Beweis für diese Annahme unmittelbar in dem Vorstehenden schon enthalten ist, wenn man, statt der beiden Kreise C und C', die Kreise K und C' als gegeben betrachtet.

Auf den zweiten Fall bezieht sich die zweite Figur, in der M und N die zwei auf den beiden, hier nothwendig innern, gemeinschaftlichen Tangenten angenommenen Puncte sind. Es ist zu beweisen, dafs die durch M und N gehenden Tangenten MP, MQ, NP und NQ, alle vier einen und denselben Kreis K berühren, und dies kommt bekanntlich darauf hinaus, zu zeigen, dafs

$$MQ-MP = NP-NQ.$$

Dieser Gleichung können wir folgende Form geben:

$$QB+MB-MP = NC+PC-NQ.$$

Es ist aber

$$NC-NQ = ND-NQ = QD = QB,$$
$$PC = PA = MA-MP = MB-MP,$$

und diese Gleichungen geben, wenn wir addiren, unmittelbar die vorstehende.

2. In dem Falle der ersten Figur schneiden sich zwei äufsere und eine innere gemeinschaftliche Tangente der drei gegebenen, paarweise zusammengestellten Kreise in einem und demselben Puncte M, und die drei entsprechenden (zwei äufsere und eine innere) gemeinschaftlichen Tangenten in einem und demselben andern Puncte N. In dem Falle der zweiten Figur schneiden sich sowohl in M als auch in N drei innere gemeinschaftliche Tangenten. Durch theilweise Umkehrung erhalten wir hiernach folgenden Satz aus dem eben bewiesenen.

Wenn zwei äufsere und eine innere, oder wenn drei innere gemeinschaftliche Tangenten je zweier von drei gegebenen Kreisen in einem und demselben Puncte sich schneiden, so thun dasselbe die drei jenen entsprechenden Tangenten.

3. Beiläufig bemerken wir, dafs aus dem Satze der vorigen Nummer der folgende als specieller Fall (Fig. 3.) sich ergiebt.

Wenn irgend zwei Tangenten zweier gegebener Kreise C und C' sich in irgend einem Puncte M einer innern oder äufsern gemeinschaftlichen Tangente dieser Kreise schneiden, so schneiden sich noch zwei andere Tangenten, die jenen beiden in M sich schneidenden parallel sind, in irgend einem zweiten Puncte N der andern innern oder äufsern gemeinschaftlichen Tangente.

Um uns nemlich von der Wahrheit dieses Satzes zu überzeugen, brauchen wir blofs in der (Fig. 2.) den Kreis K als dadurch bestimmt anzusehen, dafs er in den Winkel PNQ beschrieben ist, und dann den Radius dieses Kreises immer mehr zunehmen lassen.

4. Wenn man für den Punct N (Fig. 4. und 5.) den Durchschnitt einer äufsern und einer innern gemeinschaftlichen Tangente der beiden gegebenen Kreise C und C' nimmt, so erhält man aus der ersten Nummer folgenden Satz:

Wenn man von irgend einem Puncte M einer äufsern oder innern gemeinschaftlichen Tangente zweier gegebener Kreise noch zwei Tangenten an dieselbe legt, so bilden dieselben mit einer beliebigen der beiden innern oder äufsern gemeinschaftlichen Tangenten derselben Kreise ein Dreieck MPQ, und ein diesem Dreieck eingeschriebener Kreis berührt die letztbezeichnete innere oder äufsere gemeinschaftliche Tangente in demjenigen Puncte N, in welchem dieselbe von derjenigen äufsern oder innern gemeinschaftlichen Tangente, auf welcher der Punct M *nicht* liegt, geschnitten wird.

Die Aussage dieses Satzes unterscheidet wiederum zwei Fälle; auf den ersten bezieht sich (Fig. 4.), und der bezeichnete Kreis berührt zwei Seiten des Dreiecks, PM und PQ, in ihren Verlängerungen, und zwar

die letztere dieser Seiten im Puncte *N*. (Fig. 5.) bezieht sich auf den zweiten Fall; der in Rede stehende Kreis ist dem Dreiecke *PMQ* im engern Sinne des Wortes eingeschrieben und berührt die Seite *PQ* im Puncte *N*.

5. Wenn wir insbesondere annehmen, dafs die beiden Kreise *C* und *C'* sich berühren, so fallen zwei innere oder zwei äufsere gemeinschaftliche Tangenten derselben zusammen, und wir erhalten aus der 1. Nummer folgenden Satz:

Wenn irgend zwei gegebene Kreise sich berühren, und man legt von irgend zwei Puncten der gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspuncte noch vier Tangenten an die beiden Kreise, so giebt es immer einen solchen dritten Kreis, der diese vier Tangenten zugleich berührt.

Dieser letzte Satz ist auch als ein besonderer Fall eines andern allgemeinern Satzes anzusehen, in welchem an die Stelle der beiden sich berührenden Kreise irgend zwei beliebige Kreise treten, und an die Stelle der Tangente im Berührungspuncte die (wirkliche oder ideale) gemeinschaftliche Chorde tritt. Dieser Satz seinerseits ist eine unmittelbare Folge daraus, dafs die von demselben Puncte der gemeinschaftlichen Chorde irgend zweier gegebener Kreise an dieselben gelegten und in den Berührungspuncten begränzten Tangenten einander gleich sind.

6. Für den besondern Fall, dafs die beiden Kreise *C* und *C'* (Fig. 6.) sich berühren, ergiebt sich aus dem Satze der 4. Nummer der nachstehende:

Wenn man von irgend einem Puncte *M* der Tangente im Berührungspuncte zweier sich aufserhalb berührender Kreise, *C* und *C'*, noch zwei Tangenten an dieselben legt, so bilden diese Tangenten mit einer beliebigen der beiden äufsern gemeinschaftlichen Tangenten derselben Kreise ein Dreieck, dessen letztbezeichnete Seite von dem eingeschriebenen Kreise in ihrem Durchschnitt *N* mit der gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspuncte berührt wird.

Die unmittelbare Umkehrung des vorstehenden Satzes giebt den folgenden:

Wenn man irgend einen Kreis *c''* beschreibt, der mit zweien gegebenen sich aufserhalb berührenden, *C* und *C'*, eine gemeinschaftliche äufsere Tangente hat, und diese Tangente

in demjenigen Puncte N berührt, in welchem die innere gemeinschaftliche Tangente von C und C' in dieselbe einschneidet, so schneiden sich in irgend einem Puncte M der letztgenannten Tangente die beiden noch übrigen äufsern gemeinschaftlichen Tangenten des dritten Kreises und der beiden gegebenen.

B. Geometrische Construction der Malfattischen Aufgabe.

In ein gegebenes Dreieck drei Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden andern und zwei Seiten des gegebenen Dreiecks berührt.

7. Es seien irgend zwei sich aufserhalb berührende Kreise C und C' (Fig. 7.) gegeben. Man ziehe eine ihrer äufsern gemeinschaftlichen Tangenten PQ. Man ziehe NR', die gemeinschaftliche Tangente im Berührungspuncte derselben beiden Kreise. R' sei der Durchschnittspunct der beiden geraden Linien PQ und NR'. Es sei c'' irgend ein Kreis, welcher PQ in R' so berühre, dafs die Mittelpuncte der drei Kreise C, C' und c'' auf derselben Seite von PQ liegen. Alsdann schneiden sich die beiden noch übrigen äufsern gemeinschaftlichen Tangenten des Kreises c'' und der beiden Kreise C und C', nemlich $Q'N$ und $P'N$, in irgend einem Puncte N der geraden Linie $R'N$ (nach der 6. Nummer). Man beschreibe ferner einen neuen Kreis C'', welcher die beiden Kreise C und C' aufserhalb berührt, und zwar den erstgenannten Kreis C auf $Q'N$ und folglich den letztgenannten C' auf $P'N$. Man ziehe ferner PR und QR, äufsere gemeinschaftliche Tangenten der Kreise C und C'', C' und C''. Es werde PR von $Q'N$ in Q', und QR von $P'N$ in P' geschnitten. Man beschreibe ferner einen Kreis c', welcher PR in Q' und aufserdem $P'N$ berührt. Derselbe Kreis wird alsdann auch $R'N$ berühren (nach der 6. Nummer). Und ebenso können wir endlich einen letzten Kreis c beschreiben, welcher die drei geraden Linien $Q'N$, $R'N$ und QR, und zwar die letztgenannte im Puncte P' berührt.

Wenn wir das Ganze der eben angezeigten Construction zusammenfassen, so haben wir ein Dreieck PQR und drei Kreise C, C' und C'', von denen jeder die beiden übrigen und zugleich zwei Seiten des Dreiecks berührt. Die drei gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspuncten je zwei dieser drei Kreise, nemlich $R'N$, $Q'N$ und $P'N$, schneiden sich in demselben Puncte, in N. Wir haben ferner drei Kreise c'', c', c, von

denen jeder eine der drei Dreiecksseiten PQ, PR, QR in demjenigen Puncte R', Q', P' berührt, in welchem dieselbe Dreiecksseite resp. von $R'N$, $Q'N$, $P'N$ geschnitten wird. Die drei letztgenannten geraden Linien $R'N$, $Q'N$ und $P'N$ sind zugleich innere gemeinschaftliche Tangenten derselben paarweise zusammengestellten Kreise, der Kreise c' und c, c und c'', c'' und c'. Da diese drei geraden Linien in demselben Puncte, in N, sich schneiden, so gehen (nach der 2. Nummer) auch die drei übrigen innern gemeinschaftlichen Tangenten derselben Kreise durch einen und denselben Punct. Dieser Punct sei M. Wenn wir ferner die drei Kreise c, C' und c'' zusammenstellen, so sehen wir, dafs zwei äufsere und eine innere gemeinschaftliche Tangente dieser drei Kreise, nemlich $P'N$, $R'N$ und $Q'N$ alle drei in N sich vereinigen. Dasselbe thun also (wiederum nach der 2. Nummer) in irgend einem andern Puncte die drei entsprechenden gemeinschaftlichen Tangenten derselben Kreise, nemlich PQ, QR, und die eine jener drei durch den Punct M gehenden geraden Linien, die wir also MQ nennen können. Die drei Kreise c'', c', c sind also solchen drei Dreiecken PMQ, PMR, QMR eingeschrieben, die entstehen, wenn man vom Puncte M aus drei gerade Linien nach den drei Winkelpuncten des Dreiecks PQR zieht.

Nach der vorstehenden Analyse ist also die Construction der drei Kreise C, C' und C'', von denen jeder die beiden übrigen und zugleich zwei Seiten des Dreiecks PQR, das wir nun als ursprünglich gegeben betrachten wollen, berührt, auf die Construction der drei Kreise c, c', c'', und die Construction dieser drei Kreise auf die Bestimmung des Punctes M zurückgeführt. Man braucht sogar nur einen der drei Kreise c, c', c'', etwa den letzten, zu construiren und die beiden Puncte Q' und P' zu bestimmen, in welchen die beiden andern c' und c die bezüglichen Seiten des gegebenen Dreiecks PR und QR berühren. Diese Berührungspuncte erhält man sehr leicht, da bekanntlich die Differenz von RM und QM z. B. der Differenz von RP' und QP' gleich ist. **Der Punct M ist derjenige Punct, in welchem diejenigen drei geraden Linien, welche die Innen-Winkel des gegebenen Dreiecks PQR halbiren, zusammentreffen** *). Hiernach ergiebt sich folgende Construction des Malfattischen Problems.

*) In dieser Note will ich einen algebraisch-analytischen Beweis der vorstehenden Behauptung des Textes hinzufügen. Es kommt hierbei offenbar Alles darauf

1) Man halbire die drei Innenwinkel des gegebenen Dreiecks *PQR* durch drei gerade Linien *PM*, *QM* und *RM*. Diese drei geraden Linien schneiden sich in *M* und theilen das gegebene Dreieck in drei neue Dreiecke.

---

an, zu zeigen, dafs, wenn irgend zwei sich aufserhalb berührende Kreise C und C' (Fig. 8.) gegeben sind, und man einen beliebigen Kreis c'' construirt, der eine äufsere gemeinschaftliche Tangente PQ jener beiden Kreise in demjenigen Puncte R' berührt, in welchem die gemeinschaftliche innere Tangente derselben Kreise C und C' einschneidet, wenn man ferner die beiden noch übrigen äufsern gemeinschaftlichen Tangenten des Kreises c'' und der Kreise C und C', nemlich NF und NH zieht, und endlich einen Kreis C'' construirt, der die beiden Kreise C und C' auf den eben gezogenen geraden Linien, in F und H berührt, dafs alsdann z. B. eine äufsere gemeinschaftliche Tangente der Kreise C'' und C' und eine durch den Mittelpunct des letztern Kreises C' an den Kreis c'' gelegte Tangente, sich in einem Puncte von PQ, der gemeinschaftlichen Tangente von C und C', schneiden.

Wir wollen zu diesem Ende zuvörderst den Kreis C'' bestimmen. Wenn wir $R'Q$ zur ersten, und $R'Y$ zur zweiten Coordinaten-Axe nehmen, so können wir die Kreise C' und C durch folgende Gleichungen darstellen:

$$1. \quad (y-b')^2+(x-a)^2 = b'^2,$$
$$2. \quad (y-b)^2+(x+a)^2 = b^2.$$

Für ihre gemeinschaftliche Chorde ergiebt sich alsdann

$$3. \quad (b'-b)y+2ax = 0,$$

und diese Chorde geht, den obigen Voraussetzungen gemäfs, durch den Anfangspunct der Coordinaten. Um auszudrücken, dafs die beiden Kreise (1.) und (2.) sich aufserhalb berühren, erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung:

$$(b'-b)^2+4a^2 = (b+b')^2,$$

die sich auf

$$4. \quad a^2 = bb'$$

reducirt.

Die Gleichung des Kreises c'' sei folgende:

$$5. \quad (y-\beta)^2+x^2 = \beta^2.$$

Hiernach wollen wir die Gleichung der geraden Linie NH, der gemeinschaftlichen Tangente der Kreise C' und c'', bestimmen. Wenn

$$y = mx+n$$

diese Gleichung ist, so erhalten wir zur Bestimmung ihrer beiden Constanten, wie man leicht sieht, folgende beide Gleichungen:

$$-\frac{\beta-n}{\sqrt{(1+m^2)}} = \beta,$$
$$-\frac{b'-am-n}{\sqrt{(1+m^2)}} = b';$$

und hiernach:

$$((b'-\beta)^2-a^2)n = -2\beta a^2,$$
$$((b'-\beta)-a^2)m = -2(b'-\beta)a.$$

Die gesuchte Gleichung für NH ist also:

$$6. \quad ((b-\beta)^2-a^2)y+2(b'-\beta)ax+2\beta a^2 = 0.$$

Für NF ergiebt sich hieraus sogleich, indem man das Zeichen von a ändert, und b' mit b vertauscht, folgende Gleichung:

$$((b-\beta)^2-a^2)y-2(b-\beta)ax+2\beta a^2 = 0.$$

Wenn man die beiden letzten Gleichungen von einander abzieht, erhält man die Gleichung (3.), in Übereinstimmung mit der 6. Nummer.

2) Man beschreibe in ein beliebiges dieser neuen Dreiecke, *PMQ*, den Kreis c'', der PQ in R' berühre, und bestimme diejenigen beiden Puncte Q' und P', in welchen die den beiden andern Dreiecken *PMR* und *PMQ* einzuschreibenden Kreise die Seiten *PR* und *QR* berühren.

Für die beiden durch die Mittelpuncte von C' und C gehenden und respective auf NH und NF senkrecht stehenden geraden Linien, deren Durchschnitt der Mittelpunct des Kreises C'' ist, ergeben sich, nach bekanntem Verfahren, folgende Gleichungen:

$$2(b'-\beta)ay-((b'-\beta)^2-a^2)x-a(b'^2+a^2-\beta^2)=0,$$
$$2(b-\beta)ay+((b-\beta)^2-a^2)x-a(b^2+a^2-\beta^2)=0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir für die Mittelpuncts-Coordinaten des Kreises C'', die wir durch zwei Accente unterscheiden wollen:

$$8.\quad x''=-\frac{(b'-b)a}{b'+b-2\beta},$$

$$9.\quad y''=\frac{2a^2-\beta^2}{b'+b-2\beta}.$$

Der Abstand der Mittelpuncte der beiden Kreise C'' und C' ist hiernach gleich

$$\sqrt{[(y''-b')^2+(x''-a)^2]}=\frac{a^2+(b'-\beta)^2}{b'+b-2\beta},$$

und der Radius des Kreises C'', den wir r'' nennen wollen:

$$10.\quad r''=\frac{a^2+(b'-\beta)^2}{b'+b-2\beta}-b'=\frac{\beta^2}{b'+b-2\beta}.$$

Die Rationalität der letzten Ausdrücke verdient bemerkt zu werden.

Um nun unsere Absicht zu erreichen, ist es offenbar genügend, zu zeigen, dafs eine äufsere gemeinschaftliche Tangente RQ der Kreise C'' und C' dieselbe Richtung hat, als eine gerade Linie, welche mit der ersten Coordinaten-Axe, der geraden Linie PQ, einen Winkel bildet, der doppelt so grofs ist als derjenige, welchen eine durch den Mittelpunct von C' an den Kreis c'' gelegte Tangente $C'M$ mit derselben Axe bildet.

Die Gleichung der äufsern gemeinschaftlichen Tangente der Kreise C'' und C' erhalten wir, wenn wir die Constanten in der Gleichung

$$y=px+q$$

durch folgende beide Gleichungen bestimmen:

$$\frac{b'-ap-q}{\sqrt{(1+p^2)}}=-b',$$
$$\frac{y''-x''p-q}{\sqrt{(1+p^2)}}=-r''.$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen gliedweise in einander dividiren, so erhalten wir eine lineare Gleichung zwischen p und q, und aus dieser:

$$q=\frac{b'(r''-y'')-(r''a-b'x)p}{r''-b'}.$$

Substituiren wir diesen Werth für q in die erste der vorstehenden Gleichungen, und schreiben dann für x'', y'' und r'' ihre Werthe bei (7.), (8.) und (9.), so kommt:

$$a^2-(b'-\beta)^2+2a(b'-\beta)p=\sqrt{[(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2]},$$

und durch Fortschaffung des Wurzelzeichens ergiebt sich hieraus zur Bestimmung der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels, welcher die äufsere gemeinschaftliche Tangente von C'' und C' mit der ersten Axe bildet, folgende quadratische Gleichung in p:

3) Von den beiden Puncten P' und Q' lege man zwei leicht zu unterscheidende Tangenten $P'N$ und $Q'N$ an den Kreis c'', die sich in irgend einem Puncte N schneiden, und verbinde durch eine gerade Linie $R'N$ diesen Punct mit dem Puncte R'.

---

11. $$[(b'-\beta)^4-2(a^2+2\beta^2)(b'-\beta)^2+(a^2-2\beta^2)^2]p^2+4a(b'-\beta)[(b'-\beta)^2-a^2]p+4(a^2-\beta^2)[(b'-\beta)^2-\beta^2]=0.$$

Man sieht, dafs die beiden Wurzeln dieser Gleichung sich auf die beiden äufsern gemeinschaftlichen Tangenten von C'' und C' beziehen.

Von der andern Seite erhalten wir zunächst für die durch den Punct (b', a), den Mittelpunct des Kreises C' an den Kreis c'' gelegten Tangenten bekanntlich folgende Gleichung:

12. $$(y''-\beta)(y-\beta)+x''x=\beta^2,$$

wobei die beiden Constanten y'' und x'' durch folgende beiden Gleichungen zu bestimmen sind:

13. $$\begin{cases}(y''-\beta)(b'-\beta)+ax''=\beta^2,\\(y''-\beta)^2+x''^2=\beta^2.\end{cases}$$

Die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, welchen die Tangente (12.) mit der ersten Coordinaten-Axe bildet, und den wir φ nennen wollen, ist

$$-\frac{x''}{y''-\beta},$$

und aus den Gleichungen (13.) erhalten wir unmittelbar den Werth dieses Ausdrucks, wenn wir zuvor die erste derselben mit $(y''-\beta)$, die zweite durch $(y''-\beta)^2$ dividiren und dann $\left(\frac{1}{y''-\beta}\right)$ eliminiren. Auf diese Weise kommt:

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{a(b'-\beta)\pm\sqrt{[(b'-\beta)+a^2-\beta^2]}}{a^2-\beta^2}.$$

Hieraus erhält man:

$$\frac{1}{\operatorname{tang}2\varphi}=\frac{1-\operatorname{tang}^2\varphi}{2\operatorname{tang}\varphi}$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{(a^2+\beta^2)(b'-\beta)^2-(a^2-2\beta^2)(a^2-\beta^2)\pm 2a\beta(b'-\beta)\sqrt{[(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2]}}{(a^2-\beta^2)[a(b'-\beta)\pm\beta\sqrt{[(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2]}},$$

oder, wenn man mit $[a(b'-\beta)\mp\sqrt{((b'-\beta)^2+a^2-\beta^2)}]$ Nenner und Zähler multiplicirt, wonach beide durch $(a^2-\beta^2)$ theilbar werden:

14. $$\frac{1}{\operatorname{tang}2\varphi}=-\tfrac{1}{2}\,\frac{a(b'-\beta)[(b'-\beta)^2-a^2]\pm\beta[(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2]\sqrt{[(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2]}}{(a^2-\beta^2)[(b'-\beta)^2-\beta^2]}.$$

Für $\operatorname{tang}2\varphi$ erhält man endlich, indem man den reciproken Werth des vorstehenden Ausdruckes nimmt, und dann den Nenner rational macht, wodurch Nenner und Zähler durch $(a^2-\beta^2)[(b'-\beta)^2-\beta^2]$ theilbar werden:

15. $$\operatorname{tang}2\varphi=-2\,\frac{a(b'-\beta)[(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2]\mp\beta[(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2]\sqrt{[(b'-\beta)^2+a^2-\beta^2]}}{(b'-\beta)^4-2(a^2+2\beta^2)(a^2-\beta^2)+(a^2-2\beta^2)^2}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (14.) und (15.) ist ersichtlich, dafs die beiden Werthe für tang 2φ die beiden Wurzeln der Gleichung (13.) sind.

Dem hiermit bewiesenen Satze können wir auch folgende Aussage geben:

Wenn irgend drei Kreise C, C' und C'', von welchen jeder die beiden andern aufserhalb berührt, gegeben sind, und man verbin-

4) Alsdann sind $P'N$, $Q'N$ und $R'N$ die Tangenten in den Berührungspuncten je zwei der drei gesuchten Kreise, und theilen mithin das gegebene Dreieck in drei diesen Kreisen umschriebene Vierecke*).

8. Mit der in dem Vorstehenden enthaltenen Construction der Malfattischen Aufgabe (Fig. 7.) sind noch zwei andere Constructionen der-

---

det die beiden Durchschnittspuncten-Paare der äufsern gemeinschaftlichen Tangenten des Kreises C'' und der Kreise C' und C mit einer beliebigen äufsern gemeinschaftlichen Tangente PQ der letztgenannten beiden Kreise, nemlich die beiden Puncten-Paare, Q und q, P und p, durch vier gerade Linien mit den Mittelpuncten der bezüglichen Kreise C' und C, so berühren diese gerade Linien, alle vier, einen und denselben Kreis c'', der aufserdem auch von den beiden innern gemeinschaftlichen Tangenten des Kreises C'' und der Kreise C' und C, und endlich auch noch von der äufsern gemeinschaftlichen Tangente PQ der beiden Kreise C' und C, und zwar in demjenigen Puncte berührt wird, in welchem in die letztgenannte äufsere gemeinschaftliche Tangente der Kreise C' und C die innere gemeinschaftliche Tangente derselben Kreise einschneidet.

Ich gehe hier in kein Detail weiter ein, und beschränke mich auf den Fall der vorliegenden Figur. In dieser Figur erfüllen, beiläufig bemerkt, die drei Kreise C, C' und C'' die Bedingungen der Malfattischen Aufgabe in Beziehung auf die vier verschiedenen Dreiecke PQR, Pqr', Qpr'' und pqr, wenn wir die genannte Aufgabe in ihrer weitern Bedeutung nehmen.

Sobald man den vorstehenden Satz in seine gehörige Verbindung bringt, ist nicht zu bezweifeln, dafs man zu einem leichtern Beweise desselben gelangt. Denn ich bin geneigt, jedesmal da unnöthige Weitläufigkeiten vorauszusetzen, wo, wie in dem Vorhergehenden, um einen vorliegenden Satz zu beweisen, Gröfsen-Bestimmungen gemacht werden, die aus der Aussage des Satzes wieder verschwinden. In Beziehung auf die im Texte gegebene Analyse des Malfattischen Problems, wäre ein einfacher rein geometrischer Beweis wünschenswerth. Vielleicht giebt es auch eine allgemeine analytische Schlufsweise, die uns aller algebraischen Entwicklung überhebt. Ich werde in dem 6. Paragraphen dieser Aphorismen hierauf zurückkommen. Um bis dahin meinerseits den Schein zu vermeiden, irgend eine Behauptung unbewiesen gewagt zu haben, füge ich in dieser Note den obigen Beweis hinzu.

*) Diese Construction ist im Wesentlichen keine andere, als die vom Herrn Steiner im ersten Bande dieses Journals (S. 178.) aufgestellte. Es findet sich daselbst keine Andeutung eines Beweises. Die einleitenden Worte des Verfassers: „Um „die Fruchtbarkeit der in den Paragraphen (I., II., III.) aufgestellten Sätze an einem „dazu geeigneten Beispiele zu zeigen, fügen wir die geometrische Lösung und zu„gleich die Verallgemeinerung der Malfattischen Aufgabe, jedoch ohne Beweis, „hinzu," könnten demjenigen, der, wie ich von mir bekennen mufs, keine Idee davon hat, wie die Construction jener Aufgabe, dem Wesentlichen nach, auf den in den angeführten Paragraphen entwickelten bekannten Sätzen über Chordalen, zugeordnete Pole und Ähnlichkeitspuncte beruhen möge, den Gedanken aufdrängen, dafs die gegebene Construction nicht bewiesen sei. Das Verdienst der Erfindung bleibt, es liegt in der Combination der Kreise c'', c' und c mit den Kreisen C, C' und C''.

selben Aufgabe verwandt, die ich in dem Folgenden kurz behandeln will. Nach der obigen Construction werden die drei gemeinschaftlichen Tangenten in den Berührungspuncten je zweier der drei gesuchten Kreise, C, C' und C'', nemlich $R'N$, $Q'N$ und $P'N$ bestimmt. Diefs geschieht, indem man innere gemeinschaftliche Tangenten der drei Hülfs-Kreise c, c' und c'' construirt, eine Construction, die sich durch die Bestimmung der drei Puncte P', Q' und R' vereinfachen läfst. Dieselben drei geraden Linien kann man aber auch durch die unmittelbare Construction des Punctes N bestimmen. Diefs ist leicht. Zuerst bestimme man zu diesem Ende wie oben die drei Puncte P', Q' und N'. Es ist alsdann, indem man $P'N = r$, $Q'N = r'$ und $R'N = r''$ setzt:

$$\begin{aligned} r - r' &= RP' - RQ', \\ r - r'' &= QP' - QR', \\ r' - r'' &= PQ' - PR'. \end{aligned}$$

Der Punct N liegt also zugleich auf drei vollkommen bestimmten Hyperbelzweigen, deren Brennpuncte je zwei der drei Puncte P', Q' und R' sind, und läfst sich hiernach leicht bestimmen. Man kann diese Bestimmung auf die Construction eines Kreises zurückführen, der drei Kreise berührt, deren Mittelpuncte P', Q' und R' sind, und deren Radien sich unmittelbar ergeben. Einen dieser Radien können wir beliebig annehmen, und insbesondere auch gleich Null setzen. Es reducire sich hiernach derjenige Kreis, dessen Mittelpunct (P') auf der kürzesten Seite des gegebenen Dreiecks liegt, auf einen Punct. Alsdann erhält man für die Radien der beiden andern Kreise, deren Mittelpuncte Q' und R' sind, folgende Werthe:

$$RQ' - RP' \quad \text{und} \quad QR' - QP'.$$

Hiernach ergiebt sich folgende neue Construction der Malfattischen Aufgabe:

1) Man bestimme, wie oben, die drei Puncte P', Q' und R', die nicht auf der längsten Seite des gegebenen Dreiecks PQR liegen, als Mittelpuncten, zwei Kreise mit Radien, die resp. gleich sind den Unterschieden von RQ' und RP' und von QR' und QP.

2) Man suche den Mittelpunct eines leicht zu unterscheidenden derjenigen beiden Kreise, welche durch den Punct P' gehen, und die beiden eben bezeichneten Kreise aufserhalb berühren. Diesen Mittelpunct, den Punct N,

braucht man alsdann blofs mit den drei Puncten P', Q' und R', durch gerade Linien zu verbinden, um das gegebene Dreieck, wie oben, in drei den gesuchten Kreisen umschriebene Vierecke zu theilen.

9. Wir können endlich auch unmittelbar die Mittelpuncte der drei gesuchten Kreise construiren. Es liegen dieselben zuvörderst auf den drei Halbirungs-Linien PM, QM und RM. Dann erhalten wir ferner, nach dem Obigen, sogleich die drei Puncte P', Q' und R', diejenigen Puncte nemlich, in welchen die Tangenten in den Berührungspuncten je zweier der drei gesuchten Kreise in diejenige Dreiecksseite einschneidet, welche dieselben beiden Kreise berührt. Alles ist also auf die Auflösung folgender Aufgaben zurückgeführt.

„Wenn ein Dreieck OPM (Fig. 9.), und auf einer Seite PQ desselben „irgend ein Punct R' gegeben ist, zwei solche Kreise zu beschreiben, die ein„ander aufserhalb und beide die Seite PQ berühren, deren innere gemein„schaftliche Tangente diese Seite in dem gegebenen Puncte R' schneidet, „und deren Mittelpuncte auf den beiden andern Dreiecksseiten liegen."

Um diese Aufgabe direct anzugreifen, sei R' der Anfangspunct der Coordinaten, $R'X$ und $R'Y$ seien die rechtwinklige Coordinaten-Axen. Wir wollen die gleichen Entfernungen der Berührungspuncte B und B' vom Anfangspuncte, ξ nennen, und

$$\text{cotang}\, MPX = a, \quad \text{cotang}\, MQX = a', \quad -R'P = b, \quad R'Q = b'$$

setzen. Alsdann erhalten wir:

$$ay - x - b = 0,$$
$$ay - x + b' = 0,$$

für die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien MP und MQ, mithin für die Ordinaten der gesuchten Mittelpuncte, die wir η und η' nennen wollen:

$$\eta = -\frac{\xi - b}{a}, \quad \eta' = -\frac{\xi - b'}{a'}.$$

Die Bedingungen der Aufgabe bringen, wie in der Note zur 7. Nummer, mit sich, dafs

$$\eta\eta' = \xi^2,$$

und hiernach ergiebt sich, indem wir substituiren, folgende quadratische Gleichung zur Bestimmung von ξ:

$$(1 - aa')\xi^2 - (b + b')\xi + bb = 0.$$

Wir wollen uns hier nicht mit der geometrischen Construction dieser Gleichung beschäftigen. Unser Zweck war blofs, eine einfache Gleichung aufzustellen, von deren Auflösung das Malfattische Problem abhinge. Wir werden auf dieselbe noch zurückweisen, wenn in einem spätern Paragraphen von den verschiedenen, sich paarweise zusammengruppirenden Fällen des in seiner ganzen Ausdehnung genommenen Problems die Rede sein wird.

Wenn

$$1 + a\,a' = 0,$$

das heifst, wenn die beiden geraden Linien PM und QM auf einander senkrecht stehen, und folglich an die Stelle des ursprünglich gegebenen Dreiecks PQR zwei Parallel-Linien, die von irgend einer dritten geraden Linie geschnitten werden, treten, so reducirt sich die letzte Gleichung, indem ein Werth von ξ unendlich wird, auf folgende des ersten Grades:

$$\xi = \frac{b\,b'}{b + b'} = \frac{R'P \cdot R'Q}{PQ}.$$

Bonn, im October 1831.

10.

Beweise einiger auf der Kugel Statt findenden Sätze.

(In Folge der Bd. 9. S. 102. No. 13. und 14. d. J. stehenden Aufforderung bearbeitet von *Gerwien*, Pr. Lieuten. im Königl. Preufs. 22sten Inf. Reg.)

I. Lehrsatz. Fället man aus drei Puncten A, B, C (Taf. III. Fig. 10.) eines Hauptkreises die Perpendikel AD, BE und CF auf einen zweiten Hauptkreis, so ergiebt sich stets $\sin AC \sin BE = \sin BA \sin CF + \sin BC \sin AD$.

Beweis. Es ist $\sin AC \sin AB \cos AG + \sin AC \cos AB \sin AG = \sin AG \sin AC \cos AB - \sin AG \cos AC \sin AB + \sin AB \sin AC \cos AG + \sin AB \cos AC \sin AG$, folglich auch $\sin AC(\sin AB \cos AG + \cos AB \sin AG) = \sin AG(\sin AC \cos AB - \cos AC \sin AB) + \sin AB(\sin AC \cos AG + \cos AC \sin AG)$, oder

$\sin AC \sin(AB+AG) = \sin AG \sin(AC-AB) + \sin AB(AC+AG)$, und

$\sin AC \underbrace{\sin BG \sin BGE}_{=\sin BE} = \underbrace{\sin AG \sin AGD}_{=\sin AD} \sin BC + \sin AB \underbrace{\sin CG \sin CGF}_{=\sin CF}$, also endlich

$$\sin AC \sin BE = \sin AD \sin BC + \sin AB \sin CF.$$

II. Lehrsatz. Wenn von drei Puncten A, B, C eines Hauptkreises drei Hauptbogen AP, BP, CP nach einem Puncte P gezogen werden, und man von denselben drei Puncten A, B, C noch drei andere Hauptbogen AQ, BQ, CQ nach einem zweiten Puncte Q zieht, so ist stets:

$$\frac{\sin PBQ}{\sin QBX} \sin APC = \frac{\sin PAQ}{\sin QAX} \sin BPC + \frac{\sin PCQ}{\sin QCX} \sin APB.$$

Construction. Ziehe durch P und Q einen Hauptkreis, fälle auf denselben aus A, B und C die Senkrechten AD, BE und CF oder $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{h}''$, fälle ferner aus P und Q auf den Hauptkreis ABC die Perpendikel PH und QI oder h und h', und benenne endlich mit a, b, c die von P nach A, B und C und mit a', b', c' die von Q nach denselben drei Puncten führenden Hauptbogen.

Beweis. Nach der Construction und dem vorhergehenden Lehrsatz ist:

$\sin AC \sin \mathfrak{h}' = \sin BC \sin \mathfrak{h} + \sin AB \sin \mathfrak{h}''$, also auch

$\sin AC \sin b \sin BPQ = \sin BC \sin a \sin APQ + \sin AB \sin c \sin CPQ$, und wenn

man durch $\sin a \sin b \sin c$ dividirt:

$$\frac{\sin AC \sin BPQ}{\sin a \sin c} = \frac{\sin BC \sin APQ}{\sin b \sin c} + \frac{\sin AB \sin CPQ}{\sin a \sin b}, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin AC \sin BPQ}{(\sin h : \sin PAH) \sin c} = \frac{\sin BC \sin APQ}{(\sin h : \sin PBH) \sin c} + \frac{\sin AB \sin CPQ}{(\sin h : \sin PAH) \sin b}, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin BPQ \sin AC \sin PAC}{\sin c} = \frac{\sin APQ \sin BC \sin PBC}{\sin c} + \frac{\sin CPQ \sin AB \sin PAB}{\sin b}, \text{ und}$$

wenn durch $(\sin h' =) \sin b' \sin QBI = \sin a' \sin QAI = \sin c' \sin QCI$ dividirt,

$$\frac{\sin BPQ}{\sin b'} \sin AC \frac{\sin PAC}{\sin c} \frac{1}{\sin QBX} =$$

$$\frac{\sin APQ}{\sin a'} \sin BC \frac{\sin PBC}{\sin c} \frac{1}{\sin QAX} + \frac{\sin CPQ}{\sin c'} \sin AB \frac{\sin PAB}{\sin b} \frac{1}{\sin QCX},$$

oder, wenn man Gleiches für Gleiches setzt:

$$\frac{\sin PBQ}{\sin PQ} \sin AC \frac{\sin APC}{\sin AC} \frac{1}{\sin QBX} =$$

$$\frac{\sin PAQ}{\sin PQ} \sin BC \frac{\sin BPC}{\sin BC} \frac{1}{\sin QAX} + \frac{\sin PCQ}{\sin PQ} \sin AB \frac{\sin APB}{\sin AB} \frac{1}{\sin QCX},$$

woraus endlich die Behauptung:

$$\frac{\sin PBQ}{\sin QBX} \sin APC = \frac{\sin PAQ}{\sin QAX} \sin BPC + \frac{\sin PCQ}{\sin QCX} \sin APB$$

hervorgeht.

III. Lehrsatz. Wenn von drei Puncten A, B, C eines Hauptkreises drei Bogen AP, BP, CP von Hauptkreisen gezogen werden, welche sich in P schneiden, und man von denselben drei Puncten noch drei eben solche Bogen AK, BQ, CQ in anderen Richtungen zieht, so gehen auch sie durch einen Punct Q, wenn ist:

$$\frac{\sin PBQ}{\sin QBX} \sin APC = \frac{\sin PAK}{\sin KAX} \sin PBC + \frac{\sin PCQ}{\sin QCX} \sin APB.$$

Beweis. Verbindet man A mit Q durch einen Hauptbogen, und nimmt an, dafs sich derselbe nicht mit AK deckte, so fände nach dem vorhergehenden Lehrsatz aufser der gegebenen Gleichung noch eine zweite:

$\frac{\sin PBQ}{\sin QBX} \sin APC = \frac{\sin PAQ}{\sin QAX} \sin BPC + \frac{\sin PCQ}{\sin QCX} \sin APB$ statt, weshalb

$\frac{\sin PAK}{\sin KAX} = \frac{\sin PAQ}{\sin QAX}$, oder $\frac{\sin (PAQ \mp KAQ)}{\sin (QAX \pm KAQ)} = \frac{\sin PAQ}{\sin QAX}$, also auch

$\sin QAX \sin PAQ \cos KAQ \mp \sin QAX \cos PAQ \sin KAQ = \sin PAQ \sin QAX \cos KAQ \pm \sin PAQ \cos QAX \sin KAQ$ sein müfste. Hieraus folgt:

$\mp \sin QAX \cos PAQ \sin KAQ = \pm \sin PAQ \cos QAX \sin KAQ$, oder

$\mp \operatorname{tang} QAX = \pm \operatorname{tang} PAQ$, weshalb sich $GAQ = PAQ$ ergiebt. Dies widerspricht aber der Voraussetzung; folglich ist die Behauptung richtig.

IV. Lehrsatz. Liegen vier Puncte A, B, C und I in demselben Hauptkreise, so mufs stets:

$$\sin BI \sin AC = \sin AI \sin BC + \sin CI \sin AB \text{ sein.}$$

Beweis. Es ist

$$\sin BI \sin AI \cos CI - \sin BI \cos AI \sin CI = \sin AI \sin BI \cos CI - \sin AI \cos BI \sin CI + \sin CI \sin AI \cos BI - \sin CI \cos AI \sin BI.$$

Daher mufs auch:

$$\sin BI(\sin AI \cos CI - \cos AI \sin CI) = \sin AI(\sin BI \cos CI - \cos BI \sin CI) + \sin CI(\sin AI \cos BI - \cos AI \sin BI),$$

oder

$$\sin BI \sin(AI - CI) = \sin AI \sin(BI - CI) + \sin CI \sin(AI - BI), \text{ d. h.}$$
$$\sin BI \sin AC = \sin AI \sin BC + \sin CI \sin AB \text{ sein, w. z. b. w.}$$

V. Lehrsatz. Wenn von drei Puncten ABC eines Hauptkreises drei Hauptbogen AP, BP, CP nach einem Puncte P gezogen werden, und man von denselben drei Puncten A, B, C noch drei andere Hauptbogen AQ, BQ, CQ nach einem zweiten Puncte Q zieht, so ist stets

$$\frac{\sin PBX}{\operatorname{tang} QBX} \sin APC = \frac{\sin PAX}{\operatorname{tang} QAX} \sin BPC + \frac{\sin PCX}{\operatorname{tang} QCX} \sin APB.$$

Beweis. Fället man aus P und Q auf den Hauptkreis AC die Senkrechten PH und QI, oder h und h', benennt die von P nach A, B und C führenden Hauptbogen mit a, b, c, und die in dem Hauptkreise AC liegenden Projectionen AI, BI, CI von den Hauptbogen AQ, BQ, CQ mit m', n', p', so ist nach dem vorhergehenden Lehrsatz:

$$\sin n' \sin AC = \sin m' \sin BC + \sin p' \sin AB, \text{ oder}$$

$$\sin n' \sin c \sin AC \frac{\sin h}{\sin c} = \sin m' \sin b \sin BC \frac{\sin h}{\sin b} + \sin p' \sin a \sin AB \frac{\sin h}{\sin a}, \text{ und}$$

$$\sin n' \sin c \sin AC \sin PCA = \sin m' \sin b \sin BC \sin PBC + \sin p' \sin a \sin AB \sin PAB,$$

also auch, wenn mit $\sin a \sin b \sin c$ dividirt wird:

$$\frac{\sin n'}{\sin b} \frac{\sin AC \sin PCA}{\sin a} = \frac{\sin m'}{\sin a} \frac{\sin BC \sin PBC}{\sin c} + \frac{\sin p'}{\sin c} \frac{\sin AB \sin PAB}{\sin b}, \text{ oder}$$

$$\frac{\sin n'}{\sin b} \sin APC = \frac{\sin m'}{\sin a} \sin BPC + \frac{\sin p'}{\sin c} \sin APB,$$

und, wenn mit $\frac{\sin h}{\operatorname{tang} h'}$ dividirt wird:

$$\frac{\sin h : \sin b}{\sin h' : \sin n'} \sin APC = \frac{\sin h : \sin a}{\operatorname{tang} h' : \sin m'} \sin BPC + \frac{\operatorname{tang} h' : \sin p'}{\sin h : \sin c} \sin APB.$$

Hieraus folgt endlich:

$$\frac{\sin PBX}{\operatorname{tang} QBX} \sin APC = \frac{\sin PAX}{\operatorname{tang} QAX} \sin BPC + \frac{\sin PCX}{\operatorname{tang} QCX} \sin APC.$$

VI. Lehrsatz. Wenn von drei Puncten A, B, C eines Hauptkreises drei Bogen AP, BP, CP von Hauptkreisen gezogen werden, welche sich in P schneiden, und man von denselben drei Puncten noch drei eben solche Bogen AK, BQ, CQ in anderen Richtungen zieht, so gehen auch sie durch einen Punct Q, wenn ist:

$$\frac{\sin PBX}{\operatorname{tang} QBX} \sin APC = \frac{\sin PAX}{\operatorname{tang} KAX} \sin BPC + \frac{\sin PCX}{\operatorname{tang} QCX} \sin APB.$$

Beweis. Verbindet man A mit Q durch einen Hauptbogen, und nimmt an, dafs sich derselbe nicht mit AK deckte, so fände nach dem vorhergehenden Lehrsatz aufser der gegebenen Gleichung noch eine zweite, von derselben nur darin verschiedene Statt, dafs tang QAX an der Stelle von tang KAX steht. Daher wüfste sich aus der Verbindung beider Gleichungen $QAX = KAX$ ergeben, welches unmöglich ist.

Die Sätze II. und III., V. und VI. enthalten Relationen zwischen den Neigungen eines Hauptkreises gegen sechs andere unter den daselbst angegebenen Beschränkungen. In derselben Art giebt es Relationen zwischen den Längen derjenigen Theile jener 6 Hauptkreise, die von ihren 2 Durchschnittspuncten unter sich und dem siebenten Hauptkreise begrenzt werden. Ich will diese im Folgenden angeben.

VII. Lehrsatz. Zieht man aus einem Puncte P nach drei Puncten A, B, C eines Hauptkreises, deren Abstände AB und BC oder d und e sind, die Hauptbogen a, b und c, so ergiebt sich stets:

$$\sin e \cos a + \sin d \cos c = \sin(d+e) \cos b.$$

Beweis. Es ist

$$\cos a = \cos d \cos b + \sin d \sin b \cos(d\,b) \text{ und}$$
$$\cos c = \cos e \cos b - \sin e \sin b \cos(d\,b).$$

Hieraus folgt durch wechselsweise Multiplication mit $\sin e$ und $\sin d$:

$\sin e \cos a = \sin e \cos d \cos b + \sin e \sin d \sin b \cos(d\,b)$, und
$\sin d \cos c = \sin d \cos e \cos b - \sin d \sin e \sin b \cos(d\,b)$, also auch d.

Addit.

$\sin e \cos a + \sin d \cos c = \cos b(\sin e \cos d + \cos e \sin d)$ oder
$\sin e \cos a + \sin d \cos c = \sin(d+e)\cos b$.

In der Ebene ergiebt sich der analoge Satz

$$e a^2 + d c = (d+e)(b^2 + d e).$$

VIII. Lehrsatz. Zieht man aus zwei Puncten P und Q nach drei Puncten A, B, C eines Hauptkreises, deren Abstände d und e sind, die Hauptbogen a, b, c und a', b', c', so ergiebt sich stets

$$\sin e(\cos a \pm \cos a') + \sin d(\cos c \pm \cos c') = \sin(d+e)(\cos b \pm \cos b').$$

Beweis. Es ist nach dem vorhergehenden Lehrsatz, sowohl
$\sin e \cos a + \sin d \cos c = \sin(d+e)\cos b$, als auch
$\sin e \cos a' + \sin d \cos c' = \sin(d+e)\cos b'$. Hieraus folgt

$$\sin e(\cos a \pm \cos a') + \sin d(\cos c \pm \cos c') = \sin(d+e)\cos b'.$$

In der Ebene ergiebt sich der analoge Satz

$$e(a+a')(a-a') - d(c+c')(c-c') = (d+e)(b+b')(b-b').$$

IX. Lehrsatz. Zeichnet man um drei Puncte A, B, C eines Hauptkreises, deren Abstände d und e sind, drei sich in demselben Puncte P schneidende kleine Kreise, deren sphärische Radien a, b und c sein mögen, und beschreibt ferner um dieselben drei Puncte A, B, C drei andere kleinere Kreise mit den sphärischen Radien a', b', c', so werden sich auch diese nur in zwei Puncten Q oder Q' durchschneiden, wenn man weifs, dafs

$\sin e(\cos a \pm \cos a') + \sin d(\cos c \pm \cos c') = \sin(d+e)(\cos b \pm \cos b')$ ist.

Beweis. Nimmt man an, dafs nicht der Radius a', sondern ein anderer sphär. Radius a'' der Behauptung genügte, so fände nach dem vorhergehenden Lehrsatz aufser der gegebenen Gleichung noch eine zweite von jener nur darin verschiedenen Statt, dafs $\cos a''$ an der Stelle von $\cos a'$ steht. Aus der Verbindung beider Gleichungen ergäbe sich deshalb $a'' = a'$, was die Richtigkeit der Behauptung aussagt. In der Ebene gilt derselbe Satz, aber mit der am Schlufs des vorhergehenden Lehrsatzes stehenden Voraussetzung.

X. Lehrsatz. Werden von zwei Puncten M und N eines Hauptkreises (Fig. 2.) die Berührungslinien MA, MB, NC, ND an einen Kreis (um S) auf der Kugel gezogen, so ist immer $\text{tang}\frac{\alpha}{2}\text{tang}\frac{\beta}{2} = \text{tang}\frac{\alpha'}{2}\text{tang}\frac{\beta'}{2}$.

Construction und Beweis. Beschreibt man in die Dreiecke IMN und HMN die, alle drei Seiten jedes dieser Dreiecke berührenden Kreise um E und F, so ergiebt sich der Unterschied der vom Berührungspunct des Kreises um E in MN gebildeten Abschnitte $= MQ - NR$ oder $MB - ND$, und ferner der Unterschied der gleichfalls in MN von dem Berührungspunct des Kreises um F gebildeten Abschnitte $= MK - NL$ oder $MA - NC$. Beide Differenzen $MB - ND$ und $MA - NC$ sind aber gleich, da sie dieselben Bestandtheile enthalten, also müssen die von den Kreisen um E und F in MN bestimmten Abschnitte zusammenfallen. Hieraus folgt, dafs sich die kleinen Kreise um E und F und der Hauptkreis MN in demselben Punct (G) berühren, und dafs ferner MN in diesem Punct G von der verlängerten Centrale EF winkelrecht durchschnitten wird.

Da nun

$$\frac{\text{tang}\,FG}{\sin MG}\,\frac{\sin MG}{\text{tang}\,EG} = \frac{\text{tang}\,FG}{\sin NG}\,\frac{\sin NG}{\text{tang}\,EG}$$

ist, so mufs auch, wenn man Gleiches statt Gleiches setzt:

$\text{tang}\frac{1}{2}HMG\cot\frac{1}{2}IMN = \text{tang}\frac{1}{2}HNG\cot\frac{1}{2}INM$, also auch

$\text{tang}\frac{1}{2}HMG\,\text{tang}\frac{1}{2}IMO = \text{tang}\frac{1}{2}HNG\,\text{tang}\frac{1}{2}INP$, d. h.

$\text{tang}\frac{1}{2}\alpha\,\text{tang}\frac{1}{2}\beta = \text{tang}\frac{1}{2}\beta'\,\text{tang}\frac{1}{2}\alpha'$ sein, w. z. b. w.

Anmerkung. Zeichnet man Dreieck HMN in derselben Lage auf der entgegengesetzten Seite von MN ($MH = MH'$), so folgt aus der Berührung der Kreise um F' und E' in demselben Punct G, da sich hierdurch $MI - NI = MH' - NH'$, also auch $MI + NH' = MH' + NI$ ergiebt, dafs $IMH'N$ ein Viereck ist, in welches sich ein Kreis beschreiben läfst, und dafs bei jedem Viereck dieser Art (auch in der Ebene) die vorhin erwiesene Gleichung

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}H'MN\cot\tfrac{1}{2}IMN = \text{tang}\tfrac{1}{2}H'NM\cot\tfrac{1}{2}INM,$$

oder

$$\text{tang}\tfrac{1}{2}H'MN\,\text{tang}\tfrac{1}{2}INM = \text{tang}\tfrac{1}{2}H'NM\,\text{tang}\tfrac{1}{2}IMN$$

gültig ist.

11.

Note sur une formule de Laplace.

(Extrait d'une dissertation.)

(Par Mr. *Chr. Jürgensen* de Copenhague.)

Soit $\frac{Y}{(y-p_1)^{\mu_1+1}(y-p_2)^{\mu_2+1}\ldots.(y-p_r)^{\mu_r+1}}$ une fraction rationelle, où Y est une fonction rationelle et entière de y d'un degré moindre que

$$\mu_1+1+\mu_2+1+\ldots.+\mu_r+1;$$

soit aussi $\lambda_m(y)$ la fraction qu'on obtient en omettant dans la première le facteur du dénominateur $(y-p_m)^{\mu_m+1}$. Cela posé, Laplace a donné, dans la théorie analytique des probabilités pag. 22., 23. les formules suivantes, qui peuvent s'écrire ainsi:

$$1. \quad \frac{Y}{(y-p_1)^{\mu_1+1}\ldots.(y-p_r)^{\mu_r+1}} = \sum_{m=1}^{m=r} \frac{\partial^{\mu_m}\left(\frac{\lambda_m(p_m)}{y-p_m}\right)}{1.2.3\ldots.\mu_m.\partial p_m^{\mu_m}},$$

d'où il suit:

2. le coefficient de y^n dans le développement de cette fraction

$$= -\sum_{m=1}^{m=r} \frac{\partial^{\mu_m}\left(\frac{\lambda_m(p_m)}{p_m^{n+1}}\right)}{1.2.3\ldots.\mu_m\,\partial p_m^{\mu_m}}.$$

Si l'on désigne par $\frac{X}{(1-p_1x)^{\mu_1+1}(1-p_1x)^{\mu_2+1}\ldots.(1-p_rx)^{\mu_r+1}}$ une fraction rationelle, où $p_1, p_2, \ldots. p_r$ sont les mêmes quantités que ci-dessus, et qu'on représente par $\psi_m(x)$ le fonction correspondante à λ_m, on aura, en faisant

$$X = A+Bx+Cx^2+\ldots.+Nx^q,$$
$$Y = Ay^q+By^{q-1}+Cy^{q-2}+\ldots.+N,$$
$$q = \mu_1+1+\mu_2+1+\ldots.+\mu_r$$

et $x=\frac{1}{y}$:

$$\frac{X}{(1-p_1x)^{\mu_1+1}\ldots.(1-p_rx)^{\mu_r+1}} = \frac{yY}{(y-p_1)^{\mu_1+1}\ldots.(y-\beta_r)^{\mu_r+1}}$$

et

$$p_m^{\mu_m}\psi\left(\frac{1}{p_m}\right) = \lambda_m(p_m).$$

Donc la formule (1.) se transforme dans celle-ci:

$$3.\quad \frac{X}{(1-p_1x)^{\mu_1+1}\ldots.(1-p_rx)^{\mu_r+1}} = \sum_{m=1}^{m=r} \frac{\partial^{\mu_m}\left[p_m^{\mu_m}\psi_m\left(\frac{1}{p_m}\right)\frac{1}{1-p_mx}\right]}{1.2.3\ldots.\mu_m\,\partial p_m^{\mu_m}},$$

d'où

$$4.\quad \text{coeff. } x^n = \sum_{m=1}^{m=r} \frac{\partial^{\mu_m}\left[p_m^{\mu_m+n}\psi_m\left(\frac{1}{p_m}\right)\right]}{1.2.3\ldots.\mu_m\,\partial p_m^{\mu_m}}.$$

Observant que le coefficient de x^{n-1} dans le développement de la fraction

$$\frac{X}{(1-p_1x)^{\mu_1+1}\ldots.(1-p_rx)^{\mu_r+1}}$$

est le même que le coefficient de $\frac{1}{y^n}$ dans le développement de la fraction

$$\frac{Y}{(y-p_1)^{\mu_1+1}\ldots.(y-p_r)^{\mu_r+1}}$$

suivant les puissances descendantes de y, on trouve par la formule (4.):

$$\text{coeff. } y^{-n} = \sum_{m=1}^{m=r} \frac{\partial^{\mu_m}\left[p_m^{n-1}\lambda_m(p_m)\right]}{1.2.3\ldots.\mu_m\,\partial p_m^{\mu_m}}.$$

On a donc généralement:

$$\text{coeff. } y^n = \mp \sum_{m=1}^{m=r} \frac{\partial^{\mu_m}\left[p_m^{-n-1}\lambda_m(p_m)\right]}{1.2.3\ldots.\mu_m\,\partial p_m^{\mu_m}},$$

où le second membre doit avoir le signe —, si n est un nombre positif, et +, s'il est négatif.

De même en observant, que le coefficient de $\frac{1}{x^n}$ dans le développement de la fraction en x a la même valeur que le coefficient de y^{n-1} dans le développement de la fraction en y, on a en général:

$$\text{coeff. } x^n = \pm \sum_{m=1}^{m=r} \frac{\partial^{\mu_m}\left[p_m^{\mu_m+n}\psi_m\left(\frac{1}{p_m}\right)\right]}{1.2.3\ldots.\partial p_m^{\mu_m}},$$

où l'on doit prendre le signe supérieur, si n est positif, et l'inférieur, s'il est négatif.

Mettant un nombre fractionnaire pour n, on trouve des termes intermédiaires entre deux quelconques de la série récurrente.

Faisant

$$\frac{X}{(1-p_1 x)^{\mu_1+1}\ldots.(1-p_r x)^{\mu_r+1}} = a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots.$$

et

$$\pi(x) = A_0+A_1 x+A_2 x^2+\ldots.,$$

on déduit de la formule (4.), en multipliant par $A_n x^n$ et sommant ensuite:

$$5.\quad \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n a_n x^n = \sum_{m=1}^{m=r} \frac{\partial^{\mu_m}\left[p_m^{\mu_m}\psi_m\left(\frac{1}{p_m}\right)\pi(p_m x)\right]}{1.2.3\ldots.\mu_m\,\partial p_m^{\mu_m}},$$

formule dont je vais présenter une démonstration directe.

Soit d'abord $\mu_1=\mu_2\ldots.=\mu_r=0$. On a dans ce cas, en décomposant la fraction,

$$\frac{X}{(1-p_1 x)(1-p_2 x)\ldots.(1-p_r x)} = \sum_{m=1}^{m=r}\frac{\psi_m\left(\frac{1}{p_m}\right)}{1-p_m x}, \quad a_n = \sum_{m=1}^{m=r}\left[p_m^n\,\psi_m\left(\frac{1}{p_m}\right)\right],$$

donc

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n a_n x^n = \psi_1\left(\frac{1}{p_1}\right)\pi(p_1 x)+\psi_2\left(\frac{1}{p_2}\right)\pi(p_2 x)+\ldots.,$$

si $p_1=p_2$, les fonctions $\psi_1\left(\frac{1}{p_1}\right)$ et $\psi_2\left(\frac{1}{p_2}\right)$ deviennent infinies; posant donc

$$\frac{X}{(1-p_3 x)\ldots.(1-p_r x)} = \varphi(x),\ \text{d'où}\ \psi_1(x)=\frac{\varphi(x)}{(1-p_2 x)},\ \psi_2(x)=\frac{\varphi(x)}{1-p_1 x},$$

on trouve

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n a_n x^n = \frac{p_1\varphi\left(\frac{1}{p_1}\right)\pi(p_1 x)-p_2\varphi\left(\frac{1}{p_2}\right)\pi(p_2 x)}{p_1-p_2}+\ldots.$$

dont le premier terme donne $\frac{0}{0}$, dont la vraie valeur est

$$\frac{\partial\left[p_2\varphi\left(\frac{1}{p_2}\right)\pi(p_2 x)\right]}{\partial p_2}.$$

Ainsi la formule (5.) subsiste, quand $\mu_1=1$, et on la vérifie de même quand $\mu_1=2$.

Je suppose ensuite, quand $\mu_1=m-1$:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n a_n x^n = \frac{\partial^{m-1}\left[p_1^{m-1}\psi_1\left(\frac{1}{p_1}\right)\pi(p_1 x)\right]}{1.2.3\ldots.(m-1)\,\partial p_1^{m-1}}+\psi_2\left(\frac{1}{p_2}\right)\pi(p_2 x)+\ldots.$$

et je vais démontrer, que la formule a également lieu lorsque $\mu_1=m$. En effet, en posant comme ci-dessus

$$\frac{X}{(1-p_2 x)\ldots.(1-p_r x)} = \varphi(x),\ \text{d'où}\ \psi_1(x)=\frac{\varphi(x)}{1-p_2 x},\ \psi_2(x)=\frac{\varphi(x)}{(1-p_1 x)^m},$$

on a:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n a_n x^n = \frac{\partial^{m-1}\left[\frac{p_1^m}{p_1-p_2}\varphi\left(\frac{1}{p_1}\right)\pi(p_1 x)\right]}{1.2.3....(m-1)\,\partial p_1^{m-1}} \pm \frac{p_2^m \varphi\left(\frac{1}{p_2}\right)\pi(p_2 x)}{(p_1-p_2)^m} + ...$$

où l'on prendra le signe $+$, si m est pair.

Faisant pour abréger

$$p_1^m \varphi\left(\frac{1}{p_1}\right)\pi(p_1 x) = P_1, \quad p_2^m \varphi\left(\frac{1}{p_2}\right)\pi(p_2 x) = P_2,$$

développant et réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n a_n x^n = \frac{\pm\left[1.2.3....(m-1)(P_1-P_2) - 2.3....(m-1)(p_1-p_2)\frac{\partial P_1}{\partial p_1} + 3\,4....(m-1)(p_1-p_2)^2\frac{\partial^2 P_1}{\partial p_1^2} - .... \right.}{\left. \pm(m-1)(p_1-p_2)^{m-2}\frac{\partial^{m-2}P_1}{\partial p_1^{m-2}} \mp (p_1-p_2)^{m-1}\frac{\partial^{m-1}P_1}{\partial p_1^{m-1}}\right]} + ...,$$
$$1.2.3....(m-1)(p_1-p_2)^m$$

dont le premier terme devient $\frac{0}{0}$, quand $p_1 = p_2$, ce qui donne $P_1 = P_2$. Différentiant donc haut et bas par rapport à p_1, on a

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n a_n x^n = \frac{\mp\left[1.2.3...(m-1)\frac{\partial P_1}{\partial p_1} - 2.3....(m-1)(p_1-p_2)\frac{\partial^2 P_1}{\partial p_1^2} + 3.4....(m-1)(p_1-p_2)^2\frac{\partial^3 P_1}{\partial p_1^3} - .... \right.}{\left. \mp(p_1-p_2)^{m-1}\frac{\partial^m P_1}{\partial p_1^m} - 1.2.3....(m-1)\frac{\partial P_1}{\partial p_1} + 2.3....(m-1)(p_1-p_2)\frac{\partial^2 P_1}{\partial p_1^2} - ....\right]} + \text{etc.}$$
$$1.2.3....(m-1)\,m.(p_1-p_2)^{m-1}$$

ce qui se réduit à

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n a_n x^n = \frac{\partial^m P_1}{1.2.3....m.\partial p_1^m} + ... = \frac{\partial^m\left[p_1^m \varphi\left(\frac{1}{p_1}\right)\pi(p_1 x)\right]}{1.2.3....m\,\partial p_1^m} + ...$$

Donc la formule (5.) subsiste pour une valeur quelconque entière et positive de μ_1, et par conséquent de μ_2, μ_3, ... μ_r.

Pour donner quelques exemples de la formule (5.), soit d'abord la fraction proposée

$$\frac{x^m}{1-x^n},$$

où m est un nombre entier $< n$. Faisant donc $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n = 0$, $p_1 = \alpha$, $p_2 = \alpha^2$, ... $p_n = \alpha^n$, où α, α^2, ... α^n sont les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$, on a

$$\psi_r(x) = \frac{(1-\alpha^r x)\,x^m}{1-x^n},$$

ce qui donne $\frac{0}{0}$, quand $x = \frac{1}{\alpha^r}$; on trouve dans ce cas:

$$\psi_r\left(\frac{1}{\alpha^r}\right) = \frac{1}{n}\alpha^{nr-mr} = \frac{1}{n}\alpha^{m(n-r)},$$

puisque $\alpha^{nr} = 1 = \alpha^{nm}$. On a ainsi la formule que j'ai trouvée par une autre voie dans le vol. 6. de ce journal pag. 195 et suiv.

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha^{m(n-i)}\pi(\alpha^i x) = n \sum_{i=0}^{i=\infty} A_{in+m} x^{in+m}.$$

Si la fraction proposée est $\frac{1-x\cos\varphi}{1-2x\cos\varphi+x^2}$ ou $\frac{x\sin\varphi}{1-2x\cos\varphi+x^2}$, on a les formules connues:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \cos n\varphi . x^n = \tfrac{1}{2}\left[\pi(x.e^{\varphi\sqrt{-1}}) + \pi(x.e^{-\varphi\sqrt{-1}})\right],$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \sin n\varphi . x^n = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\pi(x.e^{\varphi\sqrt{-1}}) - \pi(x.e^{-\varphi\sqrt{-1}})\right]$$

(voyez le vol. 4. de ce journal pag. 281. et suiv.).

Faisant $\pi(x) = \frac{1}{1-x}$ dans la formule (5.), donc $A_n = 1$, on retombe sur la formule (3.), qui se transforme dans la formule (1.). Ainsi la formule (5.) contient toutes les autres.

Maintenant, si l'on observe, qu'en intégrant ν fois de suite et négligeant les constantes arbitraires, il vient:

$$\int^\nu \frac{\partial y^\nu}{y-p} = \frac{(y-p)^{\nu-1}\log(y-p)}{1.2.3....(\nu-1)}$$

et

$$\int^\nu \frac{\partial x^\nu}{1-px} = \frac{(1-px)^{\nu-1}\log(1-px)}{1.2.3....(\nu-1).(-p)^\nu},$$

on a pour l'intégration répétée des fractions rationelles, les formules:

6. $$\int^\nu \frac{Y\partial y^\nu}{(y-p_1)^{\mu_1+1}....(y-p_r)^{\mu_r+1}} = \sum_{m=1}^{m=r} \frac{\partial^{\mu_m}\left[\lambda_m(p_m).\frac{(y-p_m)^{\nu-1}\log(y-p_m)}{1.2.3....(\nu-1)}\right]}{1.2.3....\mu_m\,\partial p_m^{\mu_m}},$$

7. $$\int^\nu \frac{X\partial x^\nu}{(1-p_1x)^{\mu_1+1}....(1-p_rx)^{\mu_r+1}} = \sum_{m=1}^{m=r} \frac{\partial^{\mu_m}\left[p_m^{\mu_m}\psi_m\left(\frac{1}{p_m}\right)\frac{(1-p_mx)^{\nu-1}\log(1-p_mx)}{1.2.3....(\nu-1)(-p_m)^\nu}\right]}{1.2.3....\mu_m\,\partial p_m^{\mu_m}}.$$

Si dans les formules (3.) et (7.) la fraction proposée contenait dans le dénominateur un facteur x^n, on lui donnerait la forme

$$\frac{(-p_1)^{\mu_1+1}X}{(1-p_1x)^{\mu_1+1}....},$$

où $\mu_1 + 1 = n$, $p = \infty$, auquel cas p_1 dans le numérateur serait constant.

Quand $\mu_1, \mu_2, \ldots . \mu_r$ sont des nombres fractionnaires, on tombe dans des transcendantes, qui ont fait l'objet des recherches des géomètres modernes; il pourrait donc être utile, ce me semble, de chercher, si parmi les expressions connues de la fraction

$$\frac{\partial^n f(x)}{1.2\ldots.n.\partial x^n},$$

où n est une quantité quelconque, il ne s'en trouve, qui convienne à la formule (1.); par là on parviendrait peut-être à des relations intéressantes, l'application étant faite d'une telle expression aux formules (6., 7.).

9. Avril 1833.

12.

Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 1. im ersten, No. 10. im zweiten, No. 18. im dritten, No. 30. im vierten Hefte X. Bandes. und No. 4. im ersten Heft XI. Bandes.)

(Von dem Herrn Dr. *Stern*, zu Göttingen.)

Fünftes Kapitel.

A. Anwendung der Kettenbrüche zur Auflösung der Zahlengleichungen.

75.

Lagrange hat zuerst gezeigt *), wie man die Kettenbrüche zur Auflösung der Gleichungen anwenden kann. Seine Methode ist aber mit einer grofsen Unvollkommenheit behaftet, die sie in den meisten Fällen ganz unbrauchbar macht. Sie fordert nemlich, dafs man schon den kleinsten Unterschied der Wurzeln der aufzulösenden Gleichung kennt; das Aufsuchen dieses Unterschiedes aber, von welchem zugleich die Entdeckung der imaginären Wurzeln abhängt, führt bei höheren Gleichungen zu so verwickelten Rechnungen, dafs dieses Verfahren als ganz unausführbar angesehen werden mufs. Fourier, dessen Bearbeitung der Lagrangeschen Methode leider nicht erschienen ist, hat in dem *Exposé synoptique*, welches dem ersten Theile seines Werkes „*Analyse des équations*" vorausgeschickt ist, angedeutet: dafs das Aufsuchen des kleinsten Unterschiedes ganz überflüssig ist, dafs man vielmehr die aufzulösende Gleichung zuerst so behandeln mufs, als ob alle Wurzeln reell wären, dafs ferner, wenn sie imaginäre Wurzeln enthalten sollte, diese durch den Fortgang der Rechnung selbst angedeutet werden, und die Berechnung der reellen Wurzeln alsdann um so leichter wird. Diese Resultate wieder herzustellen, ist der nächste Zweck der folgenden Betrachtungen. Es ist aber hierzu erforderlich: zuerst aus Fourier die Methode zu entlehnen, durch welche man die Gränzen findet, innerhalb welcher die Wurzeln einer Gleichung enthalten sind. Dies soll in den nächsten §. §. 76. — 82. geschehen.

---

*) *Mémoire de l'académie de Berlin année* 1767 *et* 1768, *Traité de la résolution des équations numériques.*

76.

Es sei die Gleichung:

$$f(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

gegeben, wo A, A_1, $A_2 \ldots A_m$ bestimmte Zahlen bedeuten, und m eine ganze Zahl ist. Es wird vorausgesetzt, dafs diese Gleichung keine gleiche Wurzeln hat. Wäre eine Gleichung gegeben, die solche enthielte, so könnte man sie leicht nach bekannten Regeln entdecken, und die sie enthaltenden Factoren wegschaffen. Man differenziire diese Gleichung m Mal hinter einander, und schreibe die Differenzial-Coeffizienten in umgekehrter Ordnung neben einander, so dafs man die Folge:

$$(A.) \quad \frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial^{m-1} f(x)}{\partial x^{m-1}} \ldots \frac{\partial f(x)}{\partial x}, \quad f(x)$$

erhält. Es soll nun, wenn in irgend einer dieser Functionen statt x der bestimmte Werth α substituirt wird, z. B. in $\frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r}$, durch $\frac{\partial^r f(\alpha)}{\partial \alpha^r}$ der Werth angedeutet werden, welchen $\frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r}$ durch diese Substitution erhält. Substituirt man in der Folge ($A.$) statt x überall den Werth α, so wird jedes einzelne Glied das positive oder negative Zeichen haben. Diese Zeichen schreibe man in der Ordnung, wie man sie erhält, neben einander; die ganze Zeichenreihe soll durch $[\alpha]$ angedeutet werden. Setzt man statt x den Werth $-\infty$, so reducirt sich jede der Functionen

$$\frac{\partial^{m-1} f(x)}{\partial x^{m-1}}, \quad \frac{\partial^{m-2} f(x)}{\partial x^{m-2}} \ldots f(x)$$

auf ihr erstes Glied, daher hat die erste Function $\frac{\partial^m f(-\infty)}{\partial -\infty^m}$ das $+$ Zeichen, die zweite $\frac{\partial^{m-1} f(-\infty)}{\partial -\infty^{m-1}}$ das $-$ Zeichen, die dritte das $+$ Zeichen u. s. w. Die Zeichenreihe $[-\infty]$ enthält also nur Zeichenwechsel.

Setzt man dagegen $x = \infty$, so haben alle Functionen das $+$ Zeichen, und die Zeichenreihe enthält nur Zeichenfolgen. Setzt man statt x eine Zahl $\pm\alpha$, die zwischen $-\infty$ und ∞ liegt, so ist leicht einzusehen, dafs die dadurch entstehende Zeichenreihe $[\pm\alpha]$ so lange dieselbe ist wie $[-\infty]$, als nicht zwischen $-\infty$ und $\pm\alpha$ eine Zahl liegt, die so beschaffen ist, dafs wenn man sie statt x substituirt, alsdann eine der Functionen

$$\frac{\partial^m f(x)}{\partial x} \ldots f(x)$$

auf Null reducirt wird, weil eine Änderung in der Zeichenreihe nur dann entstehen kann, wenn eine dieser Functionen vom Positiven zum Negati-

ven oder umgekehrt übergeht, dieser Übergang aber bei keiner algebraischen Function Statt haben kann, wenn sie nicht durch den Werth Null geht. Es ist daher besonders wichtig, zu untersuchen, welche Änderung in der Zeichenreihe die Substitution eines Werthes α hervorbringt, der wirklich eine der Functionen auf Null reducirt.

77.

Man nehme zuerst an, diese Function sei $f(x)$, so dafs $f(\alpha)=0$ ist, dagegen $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial^2 f(\alpha)}{\partial \alpha^2}$ u. s. w. sämmtlich bekannte positive oder negative Werthe haben. Man substituire statt x in der Folge (*A.*) nach einander die drei Werthe $\alpha-\partial\alpha$, α, $\alpha+\partial\alpha$, und setze die dadurch entstehenden Zeichenreihen

$$[\alpha-\partial\alpha],\quad [\alpha],\quad [\alpha+\partial\alpha]$$

auf drei horizontale Linien unter einander. Diese Reihen werden nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen, das jede enthält, verschieden sein. Denn da der Werth des Differenzials $\partial\alpha$ unbestimmt ist, so kann es immer so klein genommen werden, dafs keine der Functionen

$$\frac{\partial^m f(\alpha+\partial\alpha)}{\partial\alpha^m},\quad \frac{\partial^{m-1} f(\alpha+\partial\alpha)}{\partial\alpha^{m-1}},\ \ldots\ \frac{\partial^m f(\alpha-\partial\alpha)}{\partial\alpha^m},\quad \frac{\partial^{m-1} f(\alpha-\partial\alpha)}{\partial\alpha^{m-1}},\ \ldots$$

Null wird; diese Functionen behalten also bezüglich dasselbe Zeichen wie $\frac{\partial^m f(\alpha)}{\partial\alpha^m}$, $\frac{\partial^{m-1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{m-1}}$, ... Dagegen wird $f(\alpha-\partial\alpha)$ negativ oder positiv werden, je nachdem $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}$ positiv oder negativ ist, weil $f(\alpha)$ Null ist, und daher das erste in der Entwickelung von $f(\alpha-\partial\alpha)$ hervortretende Glied, welches das Zeichen der Function bestimmt, $-\partial\alpha.\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}$ ist. Aus ähnlichen Gründen ist $f(\alpha+\partial\alpha)$ positiv oder negativ, je nachdem $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}$ positiv oder negativ ist. Ist $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}$ positiv, so werden die drei Zeichenreihen, wenn man nur die letzten Zeichen berücksichtigt, folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned}[\alpha-\partial\alpha] &= \ldots.+-\\ [\alpha] &= \ldots.+\ 0\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \ldots.++\end{aligned}$$

Ist $\frac{\partial f(\alpha)}{\partial\alpha}$ negativ, so hat man:

$$\begin{aligned}[\alpha+\partial\alpha] &= \ldots.-+\\ [\alpha] &= \ldots.-\ 0\\ [\alpha+\partial\alpha] &= \ldots.--\end{aligned}$$

In jedem Falle ist in der Zeichenreihe $[\alpha+\partial\alpha]$ ein Zeichenwechsel weniger als in der Zeichenreihe $[\alpha-\partial\alpha]$, sobald $f(\alpha)=0$, d. h. α eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist.

78.

Ist aber α keine Wurzel der Gleichung, also $f(\alpha)$ nicht Null, dagegen irgend eine andere Function $\frac{\partial^n f(\alpha)}{\partial \alpha^n}$, und nur diese, gleich Null, und man substituirt wieder allmählig statt x die Werthe $\alpha-\partial\alpha$, α, $\alpha+\partial\alpha$, so wird man auch in diesem Falle $\partial\alpha$ so klein annehmen können, dafs alle correspondirende Zeichen der drei Reihen:

$$[\alpha-\partial\alpha],\ [\alpha],\ [\alpha+\partial\alpha]$$

gleich sind, bis auf die drei Zeichen, welche durch die Substitution der drei Werthe in $\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$ entstehen. Man hat daher nur nöthig, die drei auf einander folgenden Functionen $\frac{\partial^{n+1} f(x)}{\partial x^{n+1}}$, $\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x^{n-1}}$ zu betrachten, wenn man wissen will, wie sich die drei Zeichenreihen $[\alpha-\partial\alpha]$, $[\alpha]$, $[\alpha+\partial\alpha]$ gegen einander verhalten. Die Function $\frac{\partial^n f(\alpha-\partial\alpha)}{\partial \alpha^n}$ ist negativ oder positiv, und die Function $\frac{\partial^n f(\alpha+\partial\alpha)}{\partial \alpha^n}$ positiv oder negativ, je nachdem $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}}$ positiv oder negativ ist, die Function $\frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-1}}$ kann aber ebenfalls positiv oder negativ sein. Hierdurch entstehen vier verschiedene Combinationen. Sind $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}}$ und $\frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-1}}$ beide positiv, so hat man, wenn man nur die den Functionen $\frac{\partial^{n+1} f(x)}{\partial x^{n+1}}$, $\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x^{n-1}}$ entsprechende Zeichen niederschreibt:

$$[\alpha-\partial\alpha] = \ldots.+-+\ldots.$$
$$[\alpha] = \ldots.+\ 0\ +\ldots.$$
$$[\alpha+\partial\alpha] = \ldots.+++\ldots.$$

Sind $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}}$ und $\frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-1}}$ beide negativ, so hat man:

$$[\alpha-\partial\alpha] = \ldots.-+-\ldots.$$
$$[\alpha] = \ldots.-\ 0\ -\ldots.$$
$$[\alpha+\partial\alpha] = \ldots.---\ldots.$$

In diesen zwei Fällen hat also $[\alpha+\partial\alpha]$ zwei Zeichenwechsel weniger als $[\alpha-\partial\alpha]$. Ist $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}}$ negativ, $\frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-1}}$ positiv, so hat man:

$$[\alpha - \partial\alpha] = \ldots . - + + \ldots .$$
$$[\alpha] = \ldots . - 0 + \ldots .$$
$$[\alpha + \partial\alpha] = \ldots . - - + \ldots .$$

Ist $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}}$ positiv, $\frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-1}}$ negativ, so hat man:

$$[\alpha - \partial\alpha] = \ldots . + - - \ldots .$$
$$[\alpha] = \ldots . + 0 - \ldots .$$
$$[\alpha + \partial\alpha] = \ldots . + + - \ldots .$$

In den zwei letzten Fällen enthält also $[\alpha + \partial\alpha]$ eben so viel Zeichenwechsel als $[\alpha - \partial\alpha]$.

79.

Es soll nun der Fall betrachtet werden, wenn mehr wie eine Function durch die Substitution des Werthes α Null wird, und zwar nehme man zuerst an, dafs die e auf einander folgenden Functionen,

$$\frac{\partial^n f(\alpha)}{\partial \alpha^n}, \quad \frac{\partial^{n-1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-1}}, \quad \ldots . \quad \frac{\partial^{n-e+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-e+1}}$$

(unter welchen sich aber $f(\alpha)$ nicht befindet), und nur diese Null werden. Bildet man die drei Zeichenreihen:

$$[\alpha - \partial\alpha], \quad [\alpha], \quad [\alpha + \partial\alpha],$$

so kann man $\partial\alpha$ so einrichten, dafs die correspondirenden Functionen, die der Function $\frac{\partial^n f(\alpha)}{\partial \alpha^n}$ vorausgehen, und eben so die correspondirenden Functionen, die auf die Function $\frac{\partial^{n-e+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n-e+1}}$ folgen, in den drei Reihen gleiche Zeichen haben. Um also zu finden, wie sich die Zeichenreihe in ihrem Übergange von $[\alpha - \partial\alpha]$ zu $[\alpha + \partial\alpha]$ ändert, braucht man nur die den Functionen

$$\frac{\partial^{n+1} f(x)}{\partial x^{n+1}}, \quad \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}, \quad \ldots . \quad \frac{\partial^{n-e} f(x)}{\partial x^{n-e}}$$

entsprechenden Zeichen zu betrachten. Man hat

$$\frac{\partial^n f(\alpha + \partial\alpha)}{\partial \alpha^n} = \partial\alpha . \frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}} + \ldots .$$
$$\frac{\partial^{n-1} f(\alpha + \partial\alpha)}{\partial \alpha^{n-1}} = \frac{(\partial\alpha)^2}{2} . \frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}} + \ldots .$$
$$\frac{\partial^{n-2} f(\alpha + \partial\alpha)}{\partial \alpha^{n-2}} = \frac{(\partial\alpha)^3}{2.3} \frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}} + \ldots .$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\frac{\partial^n f(\alpha - \partial\alpha)}{\partial \alpha^n} = -\partial\alpha . \frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial \alpha^{n+1}} + \ldots .$$

$$\frac{\partial^{n-1} f(\alpha-\partial\alpha)}{\partial\alpha^{n-1}} = \frac{(\partial\alpha)^2}{2}\cdot\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}} + \ldots.$$
$$\frac{\partial^{n-2} f(\alpha-\partial\alpha)}{\partial\alpha^{n-2}} = -\frac{(\partial\alpha)^3}{1.2}\cdot\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}} + \ldots.$$
. . . . . .

Ist e eine gerade Zahl, und $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ positiv, so hat man daher:

$$[\alpha-\partial\alpha] = \ldots.+-+-\ldots.+-+\pm$$
$$[\alpha] = \ldots.+\ 0\ 0\ 0\ldots.\ 0\ 0\ 0\pm$$
$$[\alpha+\partial\alpha] = \ldots.+++\ldots.+++\pm$$

und ist $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ negativ, so hat man

$$[\alpha-\partial\alpha] = \ldots.-+-+\ldots.-+-\pm$$
$$[\alpha] = \ldots.-\ 0\ 0\ 0\ldots.\ 0\ 0\ 0\pm$$
$$[\alpha+\partial\alpha] = \ldots.---\ldots.---\pm$$

In jedem Falle hat also die Zeichenreihe $[\alpha+\partial\alpha]$ e Zeichenwechsel weniger als $[\alpha-\partial\alpha]$. Ist aber e eine ungerade Zahl, so kommt es darauf an, ob $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ und $\frac{\partial^{n-e} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-e}}$ gleiche oder ungleiche Zeichen haben. Im ersten Falle hat $[\alpha+\partial\alpha]$ $e+1$ Zeichenwechsel, im zweiten $e-1$ Zeichenwechsel weniger als $[\alpha-\partial\alpha]$. Denn sind $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ und $\frac{\partial^{n-e} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-e}}$ beide positiv, so hat man:

$$[\alpha-\partial\alpha] = \ldots.+-+-\ldots.+-+-+\ldots.$$
$$[\alpha+\partial\alpha] = \ldots.+++\ldots.+++++\ldots.$$

und sind beide negativ, so hat man:

$$[\alpha-\partial\alpha] = \ldots.-+-+\ldots.-+-+-\ldots.$$
$$[\alpha+\partial\alpha] = \ldots.---\ldots.-----\ldots.$$

Ist dagegen $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ positiv, und $\frac{\partial^{n-e} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-e}}$ negativ, so hat man:

$$[\alpha-\partial\alpha] = \ldots.+-+-\ldots.+-+--$$
$$[\alpha+\partial\alpha] = \ldots.+++\ldots.++++-$$

und ist $\frac{\partial^{n+1} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n+1}}$ negativ, und $\frac{\partial^{n-e} f(\alpha)}{\partial\alpha^{n-e}}$ positiv, so hat man

$$[\alpha-\partial\alpha] = \ldots.-+-+\ldots.-+-++$$
$$[\alpha+\partial\alpha] = \ldots.---\ldots.----+$$

80.

Es ist noch der allgemeine Fall zu betrachten, wenn an verschiedenen Stellen der Folge (*A.*) verschiedene Gruppen von Functionen Null

werden, z. B. an einer Stelle e Functionen, an einer anderen e_1 Functionen u. s. w. Dieser Fall kann leicht auf den vorhergehenden zurück geführt werden; man braucht nemlich nur jede der verschwindenden Gruppen für sich zu betrachten. Will man daher wissen, wie viel Zeichenwechsel $[\alpha+\partial\alpha]$ weniger hat als $[\alpha-\partial\alpha]$, so betrachte man zuerst die Gruppe von e Functionen. Ist e eine gerade Zahl, so finden sich eben deswegen in $[\alpha+\partial\alpha]$ e Zeichenwechsel weniger als in $[\alpha-\partial\alpha]$, ist e ungerade, so hat $[\alpha+\partial\alpha]$ $e+1$ oder $e-1$ Zeichenwechsel weniger. Eben so wird die Zeichenreihe $[\alpha+\partial\alpha]$ wegen der Gruppe von e_1 Functionen, nach Umständen e_1, e_1+1 oder e_1-1 Zeichenwechsel weniger als $[\alpha-\partial\alpha]$ haben u. s. w.

Es wird hier immer vorausgesetzt, dafs $f(x)$ nicht unter den verschwindenden Functionen ist, weil sonst die Gleichung gleiche Wurzeln hätte, gegen die Voraussetzung (§. 76.).

81.

Aus dem Vorhergehenden lassen sich nun folgende Resultate ableiten:

I. Zwischen dem Werthe $x=-\infty$ und dem Werthe $x=\infty$ verliert die Zeichenreihe m Zeichenwechsel (§. 76.). Substituirt man daher nach einander die Werthe α, β, statt x, so können die zwei Zeichenreihen $[\alpha]$, $[\beta]$ nur höchstens um m Zeichenwechsel verschieden sein.

II. Die Anzahl der Zeichenwechsel kann, wenn man immer gröfsere und gröfsere Werthe (mit Rücksicht auf das Zeichen) statt x substituirt, nie zunehmen, die einmal verlorenen Zeichenwechsel können bei keiner späteren Substitution wieder erscheinen.

III. Liegen zwischen den Werthen $x=\alpha$ und $x=\beta$, n unter einander verschiedene reelle Wurzeln der Gleichung α_1, α_2, α_3, ..., so mufs $[\beta]$ wenigstens n Zeichenwechsel weniger haben als $[\alpha]$, denn $[\alpha_1+\partial\alpha_1]$ hat einen Zeichenwechsel (wenigstens) weniger als $[\alpha_1-\partial\alpha_1]$ (§. 77.); eben so hat $[\alpha_2+\partial\alpha_2]$ einen Zeichenwechel weniger als $[\alpha_2-\partial\alpha_2]$ u. s. w.

IV. Hat daher $[\beta]$ nicht weniger Zeichenwechsel als $[\alpha]$, so kann zwischen α und β keine Wurzel liegen; hat aber $[\beta]$ n Zeichenwechsel weniger als $[\alpha]$, so können zwischen α und β nur n Wurzeln ligen.

V. Man darf aber aus dem Umstande, dafs $[\beta]$ n Zeichenwechel weniger als $[\alpha]$ hat, nicht schliefsen, dafs zwischen α und β auch wirklich n reelle Wurzeln liegen, weil das Verschwinden der Zeichenwechsel

auch dadurch entstanden sein kann, dafs eine oder mehrere der in der Folge (*A.*) enthaltenen Functionen durch einen zwischen α und β liegenden Werth Null geworden sind, ohne dafs $f(x)$ durch die Substitution eines solchen Werthes Null wird. So viel ist aber gewifs, dafs wenn n eine ungerade Zahl ist, zwischen α und β wenigstens eine reelle Wurzel liegt, weil, wenn eine oder mehrere der in der Folge (*A.*) enthaltenen abgeleiteten Functionen Null werden, nur eine gerade Anzahl von Zeichenwechseln verschwinden kann (§. 78., 79., 80.).

VI. Da das Verschwinden eines Zeichenwechsels immer auf eine reelle Wurzel deutet, so müssen nothwendig durch die Substitution irgend eines Werthes zwei Zeichenwechsel auf einmal verschwinden, sobald der Gleichung zwei reelle Wurzeln fehlen, d. h. sobald sie zwei imaginäre Wurzeln hat, und es müssen überhaupt so viel Paare von Zeichenwechseln verschwinden, als die Gleichung Paare von imaginären Wurzeln enthält.

VII. Weifs man mit Gewifsheit, dafs zwischen den Gränzen α und β keine reelle Wurzel liegt, und hat $[\beta]$ $2n$ Zeichenwechsel weniger als $[\alpha]$, so folgt daraus, dafs die Gleichung wenigstens $2n$ imaginäre Wurzeln hat. Ist daher irgend ein Werth α keine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, d. h. mit anderen Worten, liegt zwischen $\alpha - \partial\alpha$ und $\alpha + \partial\alpha$ keine Wurzel dieser Gleichung, und hat $[\alpha + \partial\alpha]$ $2n$ Zeichenwechsel weniger als $[\alpha - \partial\alpha]$, so folgt hieraus, dafs die Gleichung wenigstens $2n$ imaginäre Wurzeln hat.

82.

Die Frage, wie man die Gränzen, innerhalb welcher die Wurzeln liegen, finden kann, ist durch das Gesagte vollständig gelöst, und wird praktisch am leichtesten auf folgende Weise erledigt. Man gehe von dem Werthe $x = 0$ zuerst rückwärts, und setze allmählig $x = -1$, $x = -10$, $x = -10^2$ u. s. w., bis man an einen Werth $x = -10^n$ kommt, der so beschaffen ist, dafs $[-10^n]$ nur Zeichenwechsel enthält; zwischen $-\infty$ und -10^n kann also keine Wurzel der Gleichung liegen. Dann setze man $x = 1$, $x = 10$, $x = 10^2$ u. s. w., bis man an einen Werth 10^t kommt, der so beschaffen ist, dafs $[10^t]$ nur Zeichenfolgen enthält; zwischen 10^t und ∞ kann wieder keine Wurzel liegen, vielmehr müssen alle Wurzeln zwischen -10^n und 10^t enthalten sein. Man vergleiche daher jede zwei der auf einander folgenden Zeichenreihen $[-10^n]$ und $[-10^{n-1}]$, $[-10^{n-1}]$ und $[-10^{n-2}]$ bis $[-10^{t-1}]$ und $[-10^t]$. Haben zwei solche auf einander folgende Zeichenreihen dieselbe Anzahl von Zeichenwechseln, so liegt keine

Wurzel zwischen ihnen; diese Zwischenräume werden nicht weiter beachtet; hat die zweite Zeichenreihe einen Zeichenwechsel weniger als die erste, so liegt eine reelle Wurzel zwischen den entsprechenden Gränzen, hat die zweite eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln weniger als die erste, so liegt wenigstens eine reelle Wurzel zwischen diesen Gränzen, ist aber die Anzahl dieser Zeichenwechsel eine gerade, so ist es zweifelhaft, ob dieser Umstand auf eine gerade Zahl reeller Wurzeln oder auf eine Anzahl imaginärer Wurzeln deutet.

Es kann auch vorkommen, dafs die Zeichenreihe, die einem Werthe α entspricht, nicht unmittelbar mit einer anderen verglichen werden kann, weil einige der Functionen $\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^{n-1} f(x)}{\partial x^{n-1}}$ u. s. w. durch die Substitution $x = \alpha$ Null werden. In diesem Falle nimmt man statt α einmal $\alpha - \partial\alpha$, und dann $\alpha + \partial\alpha$, $[\alpha - \partial\alpha]$ und $[\alpha + \partial\alpha]$ werden wieder vollständige Zeichenreihen sein. Will man daher $[\alpha]$ mit einer Zeichenreihe $[\beta_1]$ vergleichen, die einem Werthe $\beta_1 < \alpha$ entspricht, so nimmt man statt $[\alpha]$ die Zeichenreihe $[\alpha - \partial\alpha]$, will man aber $[\alpha]$ mit einer Zeichenreihe $[\beta]$ vergleichen, die einem Werthe $\beta > \alpha$ entspricht, so nimmt man $[\alpha + \partial\alpha]$ statt $[\alpha]$.

83.

Es ist einleuchtend, dafs man durch das im vorigen §. angegebene Verfahren, welches in der Folge, der Kürze halber, das Theorem (*A.*) heifsen soll, die Gränzen, innerhalb welcher alle Wurzeln liegen, mit Sicherheit finden kann; es giebt aber keinen sicheren Aufschlufs über die Natur der Wurzeln. Im Gegentheil bleibt es in den meisten Fällen ungewifs, ob die durch den Unterschied in der Anzahl der Zeichenwechsel angedeuteten Wurzeln reell oder imaginär sind. Es mufs also die Frage gelöst werden, wie man die reellen Wurzeln von den imaginären unterscheiden kann. Es ist einleuchtend, dafs diese Frage nicht dadurch entschieden werden kann, dafs man statt der schon gezogenen Gränzen α, β, engere α_1, β_1 zieht. Denn liegen z. B. zwischen α und β zwei imaginäre Wurzeln, so dafs $[\beta]$ zwei Zeichenwechsel weniger als $[\alpha]$ hat, so wird auch $[\beta_1]$ zwei Zeichenwechsel weniger als $[\alpha_1]$ haben; so lange man aber über die Natur der Wurzeln ungewifs ist, kann man nicht wissen, ob dies nicht daher rührt, dafs die Gleichung zwei reelle Wurzeln hat, die zwischen α_1 und β_1 liegen, und dieser Zweifel würde bleiben, wie enge auch

die Gränzen gezogen sind. Man findet aber bald, dafs jede genaue Näherungsmethode, d. h. jede, welche lehrt, wie man sich mit Sicherheit dem wahren Werthe der reellen Wurzeln, wenn solche vorhanden sind, immer mehr nähern kann, nothwendig auch auf die Entdeckung der imaginären Wurzeln führt. Sobald nemlich das Theorem (*A.*) gegeben ist, so sind mit demselben auch eine unendliche Menge genauer Näherungsmethoden gegeben, die sich im Grunde nur durch die äufsere Form unterscheiden, die sie dem Werthe der Wurzeln geben. Denn hat man durch das Theorem (*A.*) gefunden, dafs eine oder mehrere Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ zwischen den Gränzen α und β enthalten sind, so ist α ein Näherungswerth von x. Setzt man den noch unbekannten Theil des Werthes der Wurzel $=x_1$, so kann man x als eine Function der Gröfsen α und x_1 ansehen und daher $x=F(\alpha, x_1)$ setzen. Substituirt man diesen Werth von x in $f(x)=0$, so erhält man eine neue Gleichung $\varphi(x_1)=0$, und man kann, vermöge des Theorems (*A.*) wieder Gränzen α_1, β_1 bestimmen, innerhalb welcher x_1 liegt. Setzt man alsdann $x_1=\psi(\alpha_1, x_2)$ und substituirt diesen Werth in $\varphi(x_1)=0$, so erhält man eine neue Gleichung $\chi(x_2)=0$, und man kann wieder, vermöge des Theorems (*A.*), die Gränzen bestimmen, innerhalb welcher x_2 liegt, und auf diese Weise kann man sich dem wahren Werthe von x immer mehr nähern. Die Frage, wie man sich dem wahren Werthe einer Wurzel immer mehr nähern kann, kommt also darauf zurück, mit Hülfe des Theorems (*A.*) einen continuirlichen Ausdruck zu finden, der sich der Wurzel desto mehr nähert, je mehr Glieder desselben man zusammen nimmt. Da es aber unendlich viele continuirliche Formen giebt, so giebt es auch unendlich viele Näherungsmethoden; die Hauptformen sind auch hier wieder die unendlichen Producte, die unendlichen Reihen und die Kettenbrüche. Hat man nun vermöge des Theorems (*A.*) gefunden, dafs zwischen den Zahlen α und β, n Wurzeln der Gleichung angedeutet werden, so mufs jede genaue Näherungsmethode, wenn man sie unter der Voraussetzung anwendet, dafs n reelle Wurzeln vorhanden sind, auch n reelle Werthe liefern, wenn die Voraussetzung richtig ist; liegen aber zwischen α und β weniger als n reelle Wurzeln, so mufs die unter einer falschen Voraussetzung angewandte Methode, indem sie n Werthe zu entwickeln sucht, nothwendig auf einen Widerspruch, auf etwas Ungereimtes führen, und gerade darin liegt das Kennzeichen der imaginären Wurzeln.

84.

Eine der bekanntesten Auflösungsmethoden, die Newtonsche, beruht auf der Entwickelung der Wurzeln durch eine unendliche Reihe. Es sind aber noch eine Menge anderer Auflösungsmethoden möglich, die sich auf dieselbe Entwickelungsart gründen, und nur durch die Form, die man der unendlichen Reihe giebt, von einander verschieden sind. Sie führen alle, sobald man das Theorem (*A.*) zu Hülfe nimmt, eben so sicher zum Zwecke, wie die Newtonsche Methode, wenn auch nicht alle eben so schnell. Eine der einfachsten dieser Methoden ist z. B. folgende. Wir wollen zuerst annehmen, es sei ein rationaler Bruch, z. B. $\frac{98}{27}$ gegeben, der in eine Reihe verwandelt werden soll, so kann dies auf folgende Weise geschehen. Man suche zuerst die gröfste ganze Zahl, die in diesem Bruche enthalten ist. Diese ist hier 3, man hat $\frac{98}{27} = 3 + \frac{17}{27}$. Man suche nun zwei Brüche $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m+1}$, zwischen welchen $\frac{17}{27}$ enthalten ist (m bedeutet eine ganze Zahl). Man findet $\frac{17}{27} \gtrless \frac{1}{2}$, und zwar $\frac{17}{27} = \frac{1}{2} + \frac{7}{54}$, eben so $\frac{7}{54} \gtrless \frac{1}{8}$ $= \frac{1}{8} + \frac{1}{4.54}$, also

$$\frac{98}{27} = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4.54}.$$

Ganz auf dieselbe Weise kann man den rationalen oder irrationalen Werth der Wurzel einer Gleichung entwickeln. Es sei die Gleichung

$$(a.) \quad Ax^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots . A_m = 0$$

gegeben. Man habe durch das Theorem (*A.*) zwei Zeichenreihen $[\alpha]$ und $[\beta]$ gefunden, so beschaffen, dafs $[\alpha]$ nur einen Zeichenwechsel mehr enthält als $[\beta]$, so liegt also zwischen α und β eine Wurzel der Gleichung (*a.*). Man setze nun $x = \alpha + \frac{1}{x_,}$ *), substituire diesen Werth in (*a.*) und bilde die neue Gleichung

$$(b.) \quad F(x_,) = 0.$$

Die Gröfse $x_,$ mufs nothwendig positiv und gröfser als die Einheit, oder $= 1$ sein. Man suche nun durch das Theorem (*A.*) zwei ganze positive Zahlen m und $m+1$, zwischen welchen x' liegt, alsdann setze man $x = \alpha + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{x_{,,}}$, und bilde, indem man diesen Werth in (*a.*) substituirt,

*) Es wird hier vorausgesetzt, dafs α und β positive Zahlen sind, wären sie negative, so würde man $x = \beta + \frac{1}{x_,}$ setzen.

die neue Gleichung

$$(c.) \quad \varphi(x_{,,}) = 0 \quad (x_{,,} \text{ mufs wieder } \overline{\overline{>}} 1 \text{ sein}).$$

Man bestimme wieder durch das Theorem (*A.*) die zwei ganzen positiven Zahlen m_1 und m_1+1, zwischen welchen $x_{,,}$ liegt, so hat man $x = a + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m_1+1} + \frac{1}{x_2}$, und indem man dasselbe Verfahren fortsetzt, so kann man den Werth von x so genau, als man es wünscht, erhalten. Sollte aber $[\alpha]$ mehr als einen Zeichenwechsel mehr als $[\beta]$ enthalten, so würde der Zweifel entstehen, ob dieser Unterschied in der Anzahl der Zeichenwechsel auf reelle oder imaginäre Wurzeln deutet. Die Fortsetzung der Entwickelung entscheidet aber hierüber immer mit Sicherheit. Da es hier nicht unsere Absicht ist, diese Auflösungsmethode in allen ihren Einzelnheiten zu verfolgen, so wollen wir nur den besonderen Fall betrachten, wenn $[\alpha]$ zwei Zeichenwechsel mehr hat als $[\beta]$, da sich ohnehin von diesem Falle auf die übrigen leicht schliefsen läfst. Es entsteht also der Zweifel, ob zwischen α und β zwei reelle Wurzeln enthalten sind, oder ob zwei imaginäre angedeutet werden. Sind beide Wurzeln reell, so mufs auch die Gleichung (*b.*) zwei reelle Wurzeln haben. Findet man, dafs die Wurzeln dieser Gleichung nicht zwischen denselben Gränzen m und $m+1$, sondern zwischen verschiedenen Gränzen m und $m+1$, M und $M+1$ liegen, so sind auch die Wurzeln der Gleichung (*a.*) getrennt, und daher reell; hat dagegen (*b.*) keine Wurzel, die $\overline{\overline{>}} 1$ ist, so folgt daraus, dafs die zwei Wurzeln der Gleichung (*a.*) imaginär sind. Nur in dem Falle, wenn auch die beiden Wurzeln der Gleichung (*b.*) zwischen den Gränzen m und $m+1$ liegen sollten, bliebe die Natur der Wurzeln zweifelhaft. Man bilde alsdann die Gleichung (*c.*). Sind die Wurzeln der Gleichung (*a.*) reell, so mufs auch (*c.*) zwei Wurzeln haben, die $\overline{\overline{>}} 1$ sind; sucht man daher die Gränzen der Wurzeln der Gleichung (*c.*) und findet, dafs sie $\overline{\overline{>}} 1$ und getrennt sind, so folgt daraus, dafs die Wurzeln der Gleichung (*a.*) reell sind, hat (*c.*) nicht zwei Wurzeln die $\overline{\overline{>}} 1$ sind, so sind die Wurzeln der Gleichung (*a.*) imaginär; sollten aber die Wurzeln der Gleichung (*c.*) zwischen denselben ganzen positiven Zahlen m_1 und m_1+1 enthalten sein, so mufs man wieder eine neue Gleichung (*d.*) bilden, und indem man so fortfährt, mufs man nothwendig dahin kommen, die Wurzeln zu trennen, oder zu erkennen, dafs sie imaginär sind.

Es sei z. B. die Gleichung:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$$

gegeben. Hier hat man:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2,$$
$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2 + 4x - 3,$$
$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 6x + 4,$$
$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 6,$$

und

$$[-10] = +-+-$$
$$[-1] = +--+$$
$$[0] = ++-+$$
$$[1] = ++++$$

Es liegt also eine Wurzel zwischen -10 und -1. Zwei Wurzeln werden zwischen 0 und 1 angedeutet. Um zu entscheiden, ob sie reell oder imaginär sind, setze man $x = 0 + \frac{1}{x_1}$ und substituire diesen Werth in $f(x)$, so erhält man die neue Gleichung:

$$F(x_1) = 2x_1^3 - 3x_1^2 + 2x_1 + 1 = 0.$$

Hier hat man

$$\frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} = 6x_1^2 - 6x_1 + 2,$$
$$\frac{\partial^2 F(x_1)}{\partial x_1^2} = 12x - 6,$$
$$\frac{\partial^3 F(x_1)}{\partial x_1^3} = 12,$$

folglich ist

$$[1] = ++++$$

Es liegt also zwischen 1 und ∞ keine Wurzel der Gleichung $F(x_1) = 0$, d. h. die Wurzeln dieser Gleichung sind zwischen $-\infty$ und 1 enthalten, folglich sind die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ imaginär *).

85.

Der Gebrauch der unendlichen Producte zur Auflösung der Gleichungen soll nur an einem ganz einfachen Beispiele gezeigt werden. Es soll die Gleichung:

$$x^2 - 2 = 0$$

*) Vergl. *Analyse des équat. pag.* 125.

aufgelöst werden. Man weifs hier auch ohne Hülfe des Theorems (*A.*), dafs ein Werth von x zwischen 1 und 2 liegt, also $x < \frac{2}{1}$. Man setze nun $x = \frac{2}{1} \cdot \frac{x_I}{3}$, so hat man:

$$4x_I^2 - 18 = 0,$$

also $x_I \overset{>}{<} \overset{2}{3}$ und $x > \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3}$. Man setze $x = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{x_{II}}{5}$, so ist

$$16x_{II}^2 - 450 = 0,$$

also $x_{II} \overset{>}{<} \overset{5}{6}$, folglich $x < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5}$, man setze $x = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{x_3}{7} \ldots\ldots$ Fährt man auf diese Weise fort, so findet man:

$$x = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \ldots\ldots = \sqrt{2},$$

ein Resultat, das man schon lange auf indirectem Wege gefunden hat *).

86.

Will man die Wurzel durch einen Kettenbruch ausdrücken, so kann dies wieder auf sehr verschiedene Weise geschehen, je nachdem man diesem Kettenbruche eine oder die andere Form giebt. Am vortheilhaftesten ist es, die Form des Kettenbruchs so zu bestimmen, dafs alle Theilzähler der Einheit gleich, und alle Theilnenner positive ganze Zahlen sind. Denn diese Kettenbrüche haben, wie schon früher gezeigt wurde (§. 15.), die Eigenschaft, dafs die Näherungswerthe, die man aus denselben erhält, dem wahren Werthe näher sind, als jeder andere Bruch, dessen Nenner nicht gröfser als der Nenner des Näherungswerthes ist. Man hat daher schon lange diese Kettenbrüche angewandt, um die Aufgabe zu lösen, wie man zu einem Bruche mit sehr grofsem Zähler und Nenner andere kleinere Brüche finden kann, die sich dem Werthe desselben so viel als möglich nähern **). Ist nemlich ein Bruch $\frac{A}{B}$ gegeben, so kann

---

*) Vergl. Euler *Introd. in an. inf. pag.* 147.

**) So viel man weifs, war Hugenius der erste, der die Kettenbrüche zur Lösung dieser Aufgabe anwandte, in seiner Abhandlung: *De automato planetario.* Die dort beschriebene Maschine wurde im Jahre 1682 ausgeführt (s. die Vorrede zu Hugen. *Opusc. posth. Lugd.* 1703). Wallis hat dieselbe durch ein viel schwierigeres Verfahren gelöst; sie wurde ihm im Jahre 1663 oder 1664 von einem Edward Davenant vorgelegt (Wallisii *Algebra cap.* 10. *Oxon.* 1693, *anglice ed.* 1685). Wallis mufs damals (1693) von Hugenius Arbeit Nichts gewufst haben, denn er sagt: „*quia non video quempiam eandem rem ex professo tractasse.*" Durch Wallis Methode erhält man sowohl die Hauptbrüche als die eingeschalteten Nebenbrüche

man denselben leicht in einen Kettenbruch der verlangten Art verwandeln. Es sei a die gröfste in $\frac{A}{B}$ enthaltene ganze Zahl, so dafs $A = aB + C$ und $C < B$ ist, ferner a_1 die gröfste, in dem Quotienten $\frac{B}{C}$ enthaltene ganze Zahl, so dafs $B = a_1 C + D$ ist, eben so sei $C = a_2 D + E$ u. s. w., so hat man

$$\frac{A}{B} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 \text{ etc.}}} \quad (\S.\ 2.),$$

(§. 13. und 15.): so findet er als Näherungswerthe des Bruches $\frac{2684769}{8376571}$ die Brüche $\frac{1}{3}, \frac{9}{28}, \frac{17}{53}, \frac{25}{78}, \ldots$, die gröfser als der wahre Werth sind, und die Brüche $\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}, \frac{4}{13}, \frac{5}{16}, \frac{6}{19}, \frac{7}{22}, \frac{8}{25}, \ldots$, die kleiner als derselbe sind. Sucht man die Näherungswerthe nach Hugenius Verfahren, so hat man:

$$8376571 = 3 \cdot 2684769 + 322264,$$
$$2684769 = 8 \cdot 322264 + 106657,$$
$$322264 = 3 \cdot 106657 + 2293,$$

der Anfang des Kettenbruchs ist also

$$0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{8 + \frac{1}{3 + \ldots}}}$$

und die ersten Näherungswerthe

$$\frac{0}{1}, \frac{3.0+1}{3.1} = \frac{1}{3}, \quad \frac{8.1+0}{8.3+1} = \frac{8}{25}, \quad \frac{3.8+1}{3.25+3} = \frac{25}{78}.$$

Als eingeschaltete Nebenbrüche erhält man

$$\frac{1.1+0}{1.3+1} = \frac{1}{4}, \quad \frac{2.1+0}{2.3+1} = \frac{2}{7}, \quad \frac{3.1+0}{3.3+1} = \frac{3}{10}, \quad \frac{4.1+0}{4.3+1} = \frac{4}{13}, \quad \frac{5.1+0}{5.3+1} = \frac{5}{16}, \quad \frac{6.1+0}{6.3+1} = \frac{6}{19},$$
$$\frac{7.1+0}{7.3+1} = \frac{7}{22}, \text{ ferner } \frac{1.8+1}{1.25+3} = \frac{9}{28}, \quad \frac{2.8+1}{2.25+3} = \frac{17}{53}.$$

Es läfst sich hiernach vermuthen, dafs schon Davenant Hugenius Verfahren angewandt hat, denn Wallis sagt: *„sed et Davenantius methodum habuit ipse hujusmodi approximationes, non omnes quidem, sed praecipuas investigandi."* Bedenkt man nemlich, dafs die Theorie der Nebenbrüche erst durch Lagrange (*Mém. de l'ac. de Berlin* 1767) entwickelt worden ist, so wird es sehr wahrscheinlich, dafs Davenant nur die Hauptbrüche auf dieselbe Weise wie Hugenius fand, und dafs gerade diese Wallis *praecipuas* nennt. Euler scheint Hugenius Aufsatz gar nicht gekannt zu haben, und von selbst auf dieselbe Methode gekommen zu sein; er erwähnt überall nur Wallis Auflösung im Gegensatz zu der seinigen. So z. B. (*Nov. comm. ac. Petr. T.* 11.) in dem Aufsatze: *De usu nov. algor.* §. 7. sagt er: *„quod problema olim feliciter a Wallisio solutum equidem quoque jam dudum per fractiones continuas multo commodius expedivi.* Man vergleiche auch den Aufsatz: *De fractionibus continuis* §. 14. in *Comm. ac. Petr. T.* 9. und *Introd. in an. inf.* §. 382. Keinesweges aber hat Wallis, wie Waring sagt (*Meditat. algebr. pag.* 178.), die Hugenius'sche Methode erfunden.

und wenn man die Näherungswerthe dieses Kettenbruchs entwickelt, so erhält man Brüche, die dem Werthe $\frac{A}{B}$ näher kommen, als jeder andere Bruch mit nicht gröfserem Nenner.

Aufserdem hat man bei Anwendung dieser Kettenbrüche zur Bestimmung der Wurzeln den Vortheil, dafs jede zwei auf einander folgende Näherungswerthe Gränzen sind, innerhalb welcher die Wurzel liegt, da diese Näherungswerthe abwechselnd gröfser oder kleiner sind, und man daher die Gränzen des Fehlers bestimmen kann, den man begeht, wenn man statt des wahren Werthes einen Näherungswerth nimmt (§. 15.). Die Kettenbrüche, deren Zähler der Einheit gleich und deren Nenner ganze positive Zahlen sind, haben einen irrationalen Werth, wenn sie ins Unendliche fortlaufen (§. 64. I.). Ist daher die Wurzel einer Gleichung rational, so mufs der ihr entsprechende Kettenbruch nothwendig irgendwo abbrechen und ein endlicher sein, läuft der Kettenbruch ins Unendliche fort, so folgt daraus, dafs die Wurzel irrational ist.

87.

Man nehme nun zuerst an, dafs die gegebene Gleichung:

$$(a.) \quad f(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$$

nur reelle Wurzeln enthält. Man suche also vermittelst des Theorems (*A.*) die Gränzen, innerhalb welcher die Wurzeln enthalten sind, die nur um eine Einheit verschieden sind, diese Gränzen seien a und $a+1$.

Es soll nun zuerst der Fall betrachtet werden, wenn zwischen diesen Gränzen nur eine Wurzel liegt; es ist also a ein Näherungswerth dieser Wurzel. Man setze daher $x = a + \frac{1}{x_,}$, wenn a positiv ist, und $x = a - \frac{1}{x_,}$, wenn a negativ ist. In jedem Falle ist also x_1 positiv und gröfser als 1. Substituirt man den Werth $a \pm \frac{1}{x_,}$ statt x in der gegebenen Gleichung, so erhält man eine neue Gleichung

$$(b.) \quad F(x_1) = 0.$$

Diese Gleichung kann nur eine reelle positive Wurzel haben, die gröfser als 1 ist, denn hätte sie zwei $x_,$ und $x_{,,}$, so hätte auch x zwischen den Gränzen a und $a+1$ zwei reelle Wurzeln $a \pm \frac{1}{x_,}$, $a \pm \frac{1}{x_{,,}}$, gegen die Voraussetzung. Man bestimme wieder die Gränzen a_1 und a_1+1, zwischen welchen x_1 liegt, und setze $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$. Substituirt man diesen Werth in

(*b.*), so erhält man eine neue Gleichung:

$$(a.) \quad \varphi(x_2) = 0.$$

Diese Gleichung kann ebenfalls wieder nur einen reellen positiven Werth haben, der gröfser als 1 ist. Man kann wieder seine Gränzen a_2 und a_2+1 bestimmen, und indem man so fortfährt, erhält man den Näherungswerth:

$$x = F(a+1 : a_1+1 : a_2+\text{etc.}).$$

Sind aber zwischen den Gränzen a und $a+1$ mehr als eine reelle Wurzel, allenfalls n reelle Wurzeln enthalten, so haben diese alle den gemeinschaftlichen Näherungswerth a. Setzt man daher

$$x = a \pm \frac{1}{x_1},$$

so mufs die dadurch entstehende Gleichung:

$$(b.) \quad F(x_1) = 0,$$

n Wurzeln haben, die positiv und gröfser als 1 sind. Hätte sie mehr oder weniger, so würde auch x mehr oder weniger als n reelle Wurzeln zwischen den Gränzen a und $a+1$ haben, gegen die Voraussetzung. In der Regel wird nun jede Wurzel der Gleichung (*b.*) von den übrigen getrennt und zwischen besonderen Gränzen a_1 und a_1+1, b_1 und b_1+1, c_1 und $c+1$ u. s. w. enthalten sein. Man verfährt alsdann mit jeder dieser Wurzeln wie man früher mit x verfuhr, indem man durch die Substitutionen:

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_1 = b_1 + \frac{1}{x_2}, \quad x_1 = c_1 + \frac{1}{x_2}, \ldots.$$

n Gleichungen erhält, deren jede nothwendig nur eine reelle Wurzel, die gröfser als 1 ist, haben kann und mufs. Hierdurch findet man, indem man die Entwickelung weiter fortsetzt, die n Werthe von x so nahe als man will. Sollten aber von den n Wurzeln der Gleichung (*b.*) z. B. $n-m$ Wurzeln zwischen denselben Gränzen a_1 und a_1+1 enthalten sein, d. h. hat die Gleichung (*a.*) eine Anzahl $n-m$ von Wurzeln, deren Werthe mit den Gliedern $a+\frac{1}{a_1}$ anfangen, so substituire man nur wie früher statt x_1 den Werth $a_1+\frac{1}{x_2}$ in (*b.*). Die dadurch entstehende Gleichung

$$(c.) \quad \varphi(x_2) = 0$$

mufs nothwendig $n-m$ reelle positive Wurzeln haben, die gröfser als 1 sind. In der Regel werden diese Wurzeln getrennt sein, d. h. jede wird zwischen zwei besonderen Gränzen a_2 und a_2+1 liegen. Sollte dies aber nicht der Fall sein, vielmehr $n-r$ Wurzeln zwischen denselben Gränzen a_2 und a_2+1 enthalten sein, so dafs die Gleichung (*a.*) $n-r$ Wurzeln hat,

deren Werthe mit $a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}$ anfangen, so substituire man wieder in (*c.*) statt x_2 den Werth $a_2+\frac{1}{x_3}$, um eine neue Gleichung

$$(d.) \qquad \psi(x_3) = 0$$

zu bilden. Hierdurch mufs man zuletzt auf eine Gleichung kommen, in der alle Wurzeln getrennt sind, d. h. jede besonders zwischen zwei ganzen Zahlen liegt, die nur um eine Einheit verschieden sind, da nach der ursprünglichen Voraussetzung die gleichen Wurzeln ausgeschlossen sind, also die den verschiedenen Wurzeln entsprechenden Kettenbrüche nothwendig bei irgend einem Theilnenner anfangen müssen, von einander verschieden zu sein. Sobald aber die Wurzeln getrennt sind, so ist das Verfahren dasselbe, wie in dem Falle, wenn gleich von Anfang an nur eine Wurzel zwischen den Gränzen a und $a+1$ liegt, welcher Fall schon erörtert worden ist.

88.

Bildet man die Gleichung (*b.*), indem man unmittelbar in (*a.*) überall statt x den Werth $a+\frac{1}{x_1}$ substituirt, und verfährt man auf ähnliche Weise bei der Bildung der Gleichungen (*c.*), (*d.*) u. s. w., so wird die Rechnung weitläufig. Man kann aber auf eine bequemere Weise die Coefficienten der Gleichung (*b.*) aus der Gleichung (*a.*), und eben so die Coefficienten jeder der folgenden Gleichungen (*c*), (*d.*) u. s. w. aus der unmittelbar vorhergehenden finden. Bekanntlich ist

$$(x+y)^m = x^m + \frac{\partial . x^m}{\partial x} y + \frac{\partial^2 . x^m}{1.2\,\partial x^2} y^2 + \ldots .$$

Substituirt man daher in der Gleichung (*a.*)

$$f(x) = A x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots . + A_m = 0$$

statt x überall $x+\frac{1}{x_1}$, so hat man

$$\begin{aligned}
&A\left(x^m + \frac{\partial . x^m}{\partial x}\cdot\frac{1}{x_1} + \frac{\partial^2 . x^m}{1.2.\partial x^2}\cdot\frac{1}{x_1^2} + \ldots .\right)\\
&+ A_1\left(x^{m-1} + \frac{\partial . x^{m-1}}{\partial x}\cdot\frac{1}{x_1} + \frac{\partial^2 . x^{m-1}}{1.2.\partial x^2}\cdot\frac{1}{x_1^2} + \ldots .\right)\\
&+ A_2\left(x^{m-2} + \frac{\partial . x^{m-2}}{\partial x}\cdot\frac{1}{x_1} + \frac{\partial^2 . x^{m-2}}{1.2.\partial x^2}\cdot\frac{1}{x_1^2} + \ldots .\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&= f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x}\cdot\frac{1}{x_1} + \frac{\partial^2 f(x)}{1.2.\partial x^2}\cdot\frac{1}{x_1^2} + \ldots . + \frac{\partial^m f(x)}{1.2\ldots m\,\partial x^m}\cdot\frac{1}{x_1^m}.
\end{aligned}$$

Setzt man in dem letzteren Ausdrucke statt x überall a, so ist das Resultat dasselbe, als wenn man in der Gleichung (a.) statt x überall $a+\frac{1}{x_1}$ gesetzt hätte, man hat also

$$f(a)+\frac{\partial f(a)}{\partial a}\cdot\frac{1}{x_1}+\frac{\partial^2 f(a)}{1.2.\partial a^2}\cdot\frac{1}{x_1^2}+\ldots.+\frac{\partial^m f(a)}{1.2\ldots.m.\partial a^m}\cdot\frac{1}{x_1^m}=0,$$

oder

$$(b.)\quad f(a)x_1^m+\frac{\partial f(a)}{\partial a}x_1^{m-1}+\ldots.+\frac{\partial^m f(a)}{1.2\ldots.m.\partial a^m}=0.$$

Man erhält also die Coefficienten der Gleichung (b.), indem man die successiven Differenziale von $f(x)$ nimmt, und dann statt x überall a substituirt. Eben so erhält man die Coefficienten der Gleichung (c.), indem man die successiven Differenziale von $F(x_1)$ nimmt und dann statt x_1 überall a_1 substituirt u. s. w. Man bemerke noch aufserdem, dafs man die Gröfsen $f(a)$, $\frac{\partial f(a)}{\partial a}$, ... $f(a_1)$, $\frac{\partial f(a_1)}{\partial a_1}$, ... nicht erst besonders zu berechnen braucht, sondern dafs sie schon wegen der Gränzenbestimmung berechnet sein müssen. Denn indem man z. B. die Gränzen a und $a+1$ bestimmt, so mufs hierzu die Zeichenreihe $[a]$ und also auch der Werth der Gröfsen $\frac{\partial^m f(a)}{\partial a^m}$, $\frac{\partial^{m-1} f(a)}{\partial a^{m-1}}$ u. s. w. bestimmt werden. Man wird daher wohl thun, bei Bestimmung der Zeichenreihen unter jedes Zeichen den Zahlenwerth der entsprechenden Function zu setzen, wie dies auch im Folgenden geschehen soll.

89.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu erläutern, soll die Gleichung

$$(a.)\quad f(x)=x^3-7x+7=0\ ^*)$$

aufgelöst werden. Hier hat man

$$f(x)=x^3-7x+7,\quad \frac{\partial f(x)}{\partial x}=3x^2-7,\quad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}=6.$$

Ferner

$$[-10]=\begin{matrix}+&-&+&-\\6&60&293&923\end{matrix}$$

$$[-1]=\begin{matrix}+&-&-&+\\6&6&4&13\end{matrix}$$

$$[0]=\begin{matrix}+&0&-&+\\6&&7&7\end{matrix}$$

---

*) Lagrange *Rés. des équat. num. chap.* 4.

$$[1] = \begin{matrix} + & + & - & + \\ 6 & 6 & 4 & 1 \end{matrix}$$

$$[10] = \begin{matrix} + & + & + & + \\ 6 & 60 & 293 & 937 \end{matrix}$$

Es ist also eine Wurzel zwischen -10 und -1 enthalten, zwei liegen zwischen 1 und 10. Man ziehe nun die Gränzen enger zusammen, so findet man

$$[-4] = \begin{matrix} + & - & + & - \\ 6 & 24 & 41 & 29 \end{matrix}$$

$$[-3] = \begin{matrix} + & - & + & + \\ 6 & 18 & 20 & 1 \end{matrix}$$

eine Wurzel liegt also zwischen -3 und -4.

Ferner findet man

$$[2] = \begin{matrix} + & + & + & + \\ 6 & 12 & 5 & 1 \end{matrix}$$

also liegen zwei Wurzeln zwischen 1 und 2.

Um die Wurzel, die zwischen -3 und -4 liegt, weiter zu entwickeln, setze man $x = -3 - \frac{1}{x_1}$, so erhält man die Gleichung

$$(-x_1)^3 + 20(-x_1)^2 - \frac{18}{2} \cdot -x_1 + \frac{6}{2.3} = 0,$$

oder

$$(b) \quad x_1^3 - 20x_1^2 - 9x_1 - 1 = 0.$$

Da $x_1 > 1$ sein mufs (§. 87.), so braucht man nur die Zahlen, die gröfser als 1 sind, zur Gränzenbestimmung anzuwenden. Man hat

$$F(x_1) = x_1^3 - 20x_1^2 - 9x_1 - 1,$$

$$\frac{\partial F(x_1)}{\partial x} = 3x_1^2 - 40x_1 - 9,$$

$$\frac{\partial^2 F(x_1)}{\partial x^2} = 6x_1 - 40,$$

$$\frac{\partial^3 F(x_1)}{\partial x_1^3} = 6,$$

also

$$[1] = \begin{matrix} + & - & - & - \\ 6 & 34 & 46 & 29 \end{matrix}$$

$$[10] = \begin{matrix} + & + & - & - \\ 6 & 20 & 109 & 1091 \end{matrix}$$

$$[20] = \begin{matrix} + & + & + & - \\ 6 & 80 & 391 & 181 \end{matrix}$$

$$[30] = \begin{matrix} + & + & + & + \\ 6 & 140 & 1491 & 8729 \end{matrix}$$

Es liegt also eine Wurzel der Gleichung (*b.*) zwischen 20 und 30. Nun hat man:

$$[21] = \overset{+}{6}\ \overset{+}{86}\ \overset{+}{374}\ \overset{+}{251}$$

also liegt diese Wurzel zwischen 20 und 21.

Setzt man $x_1 = 20 + \frac{1}{x_2}$, so erhält man die neue Gleichung:

$$-181x_2^3 + 391x_2^2 + \frac{80}{2}.x_2 + \frac{6}{2.3} = 0,$$

oder

$$181x_2^3 + 391x_2^2 - 40\,x_2 - 1 = 0,$$

woraus man wieder den Werth von x_2 bestimmen kann u. s. w.

Um auch die Wurzeln, die zwischen 1 und 2 liegen, weiter zu entwickeln, setze man:

$$x = 1 + \frac{1}{x_1},$$

so erhält man:

$$(b.) \quad x_1^3 - 4x_1^2 + 3x_1 + 1 = 0,$$

also

$$F(x) = x_1^3 - 4x_1^2 + 3x_1 + 1,$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = 3x_1^2 - 8x_1 + 3,$$

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} = 6x_1 - 8,$$

$$\frac{\partial^3 F(x)}{\partial x^3} = 6,$$

$$[1] = \overset{+}{6}\ \overset{-}{2}\ \overset{-}{2}\ \overset{+}{1}$$

$$[2] = \overset{+}{6}\ \overset{+}{4}\ \overset{-}{1}\ \overset{-}{1}$$

$$[3] = \overset{+}{6}\ \overset{+}{10}\ \overset{+}{6}\ \overset{+}{1}$$

es liegt also eine Wurzel zwischen 1 und 2, eine andere zwischen 2 und 3, d. h. ein Werth von x fängt mit $1 + \frac{1}{1}$, der andere mit $1 + \frac{1}{2}$ an. Die Wurzeln sind nun getrennt, und man kann jede besonders weiter entwickeln, je nachdem $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$ oder $x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}$ setzt.

90.

Im vorhergehenden Beispiel wurde stillschweigend angenommen, dafs die zwei zwischen den Gränzen 1 und 2 angedeuteten Wurzeln reell sind, es hätte aber auch sein können, dafs der Verlust der zwei Zeichen-

wechsel auf zwei imaginäre Wurzeln gedeutet hätte, da das Theorem (*A.*) im Allgemeinen über die Natur der Wurzeln nicht entscheidet. Es bleibt daher noch die Frage übrig, wie man in jedem Falle über die Natur der Wurzeln Gewifsheit erlangen kann. Man nehme an, es seien zwischen den Gränzen a und $a+1$, n Wurzeln der Gleichung:

$$(a.) \quad f(x) = 0$$

angedeutet, so kann über die Natur der Wurzeln nur dann Zweifel entstehen, wenn $n>1$ ist. Wir wollen zuerst den einfachsten Fall betrachten, wenn $n=2$ ist. Man verfahre eben so, als ob man die Gewifsheit hätte, dafs die Wurzeln reell sind und setze daher $x=a\pm\frac{1}{x_1}$, wodurch man eine neue Gleichung:

$$(b.) \quad F(x_1) = 0$$

erhält. Sind die Wurzeln wirklich reell, so mufs die Gleichung (*b.*) zwei Wurzeln haben, die gröfser als die Einheit sind. Man bestimme daher die Gränzen dieser Wurzeln durch das Theorem (*A.*). Findet man wirklich zwei solche Wurzeln, die von einander getrennt sind, so weifs man, dafs die Wurzeln der Gleichung (*a.*) reell sind, hat aber (*b.*) nicht zwei Wurzeln, die gröfser als 1 sind, so folgt daraus von selbst, dafs die Wurzeln der Gleichung (*a.*) imaginär sind. Es kann nur dann ein Zweifel über die Natur der Wurzeln bleiben, wenn die Wurzeln der Gleichung (*b.*) wieder zwischen denselben ganzen Zahlen a_1 und a_1+1 liegen; alsdann setze man: $x_1=a_1+\frac{1}{x_2}$, wodurch man eine neue Gleichung:

$$(c.) \quad \varphi(x_2) = 0$$

erhält. Man suche alsdann wieder, ob die Gleichung (*c.*) zwei reelle positive Wurzeln hat, die gröfser als 1 sind. Findet man wirklich zwei solche, die getrennt sind, so folgt hieraus wieder, dafs die Wurzeln der Gleichung (*a.*) reell sind; findet man dafs die Gleichung (*c.*) keine zwei solche Wurzeln hat, so sind die Wurzeln der Gleichung (*a.*) sicher imaginär. Es kann aber auch wieder der Fall eintreten, dafs zwei Wurzeln der Gleichung (*c.*) zwischen denselben Gränzen a_2 und a_2+1 angedeutet werden, so dafs $a_2 \gtreqless 1$ ist. In diesem Falle setze $x_2=a_2+\frac{1}{x_3}$, wodurch man eine neue Gleichung:

$$(d.) \quad \chi(x_3) = 0$$

erhält, die man wieder wie die früheren behandelt. Auf diese Weise kommt man zuletzt an irgend eine Gleichung (*g.*), deren Wurzeln getrennt

sind, oder die bestimmt keine zwei Wurzeln hat, die gröfser als 1 sind; sobald man an eine solche Gleichung gekommen ist, ist auch die Frage über die Natur der Wurzeln gelöst. Dafs man aber nothwendig an eine solche Gleichung kommen mufs, ist einleuchtend. Denn in keinem Falle können die Gleichungen (*a*), (*b*.), (*c*.), (*d*.) u. s. w. ins Unendliche fort, so beschaffen sein, dafs immer die zwei Wurzeln derselben, zwischen denselben zwei ganzen positiven Zahlen, die nur um eine Einheit verschieden sind, liegen, weil sonst diese Wurzeln irrational und gleich wären; gleiche Wurzeln können aber, nach der Voraussetzung, nicht vorhanden sein. Es müssen also in jedem Falle die Wurzeln einer der abgeleiteten Gleichungen so beschaffen sein, dafs sie nicht zwischen denselben Gränzen n und $n+1$ liegen, sondern dafs sie entweder zwischen verschiedenen Gränzen α und $\alpha+1$, β und $\beta+1$ liegen (wo α, β ganze positive Zahlen sind), oder, dafs nicht beide Wurzeln gröfser als 1 sind. In der Regel wird die Ableitung einiger Gleichungen hinreichen, um über die Natur der Wurzeln zu entscheiden. Zuweilen wird man viele Gleichungen ableiten müssen, namentlich wenn die ersten Theilnenner in den Werthen der zwei reellen Wurzeln auf eine grofse Weite hin einander gleich sind, immer aber führt das angegebene Verfahren sicher zum Zweck.

91.

Es sei z. B. die Gleichung

$$x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101=0$$ *)

gegeben. Hier ist

$$f(x) = x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101,$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 5x^4-12x^3-72x^2+190x-46,$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 20x^3-36x^2-144x+190,$$

$$\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} = 60x^2-72x-144,$$

$$\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4} = 120x-72,$$

$$\frac{\partial^5 f(x)}{\partial x^5} = 120.$$

Bestimmt man die Gränzen der Wurzeln vermittelst des Theorems (*A*.), so findet man, dafs eine Wurzel zwischen -10 und -1, eine zwi-

*) *Analyse des équat. pag.* 145.

schen —1 und 0 und eine zwischen 3 und 10 liegt. Zwei Wurzeln werden zwischen 2 und 3 angedeutet; man hat nemlich:

$$[2] = \begin{matrix} + & + & - & - & + & - \\ 120 & 168 & 48 & 82 & 30 & 21 \end{matrix}$$

$$[3] = \begin{matrix} + & + & + & - & - & - \\ 120 & 288 & 180 & 26 & 43 & 32 \end{matrix}$$

Um zu entscheiden, ob diese zwei Wurzeln reell oder imaginär sind, setze man:

$$x = 2 + \frac{1}{x_1},$$

so findet man:

$$-21x_1^5 + 30x_1^4 - \frac{82}{2}x_1^3 - \frac{48}{2.3}x_1^2 + \frac{168}{2.3.4}x_1 + \frac{120}{2.3.4.5} = 0,$$

oder

$$21x_1^5 - 30x_1^4 + 41x_1^3 + 8x_1^2 - 7x_1 - 1 = 0,$$

also hat man:

$$F(x_1) = 21x_1^5 - 30x_1^4 + 41x_1^3 + 8x_1^2 - 7x_1 - 1,$$

$$\frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} = 105x_1^4 - 120x_1^3 + 123x_1^2 + 16x_1 - 7,$$

$$\frac{\partial^2 F(x_1)}{\partial x_1^2} = 420x_1^3 - 360x_1^2 + 246x_1 + 16,$$

$$\frac{\partial^3 F(x_1)}{\partial x_1^3} = 1260x_1^2 - 720x_1 + 246,$$

$$\frac{\partial^4 F(x_1)}{\partial x_1^4} = 2520x_1 + 720,$$

$$\frac{\partial^5 F(x_1)}{\partial x_1^5} = 2520,$$

und

$$[1] = + + + + + +$$

Die Gleichung $F(x_1) = 0$ hat also keine Wurzel, die gröfser als 1 ist, folglich müssen die zwei Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ imaginär sein.

92.

Die Betrachtung des allgemeinen Falls, wenn zwischen den Gränzen a und $a+1$, n Wurzeln angedeutet werden, hat nun weiter keine Schwierigkeit. Man bilde die Gleichung:

$$(b.) \qquad F(x_1) = 0,$$

indem man statt x den Werth $a \pm \frac{1}{x_1}$ substituirt. Im Allgemeinen wird man nun finden, dafs (*b.*) $n-2r$ (wo r auch gleich Null sein kann) Wurzeln zwischen den Gränzen 1 und ∞ haben kann, also hat (*a.*) $2r$ imaginäre Wurzeln. Von den $n-2r$ Wurzeln werden $n-2r-t$ getrennt

sein (wo t auch $= 0$ sein kann), t werden zwischen denselben Gränzen a_1 und $a_1 + 1$ enthalten sein. Um über die Natur dieser t Wurzeln Gewifsheit zu erhalten, setze man $x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}$ und bilde die Gleichung:

$$(c.) \quad F(x_2) = 0.$$

Hat $(c.)$ t Wurzeln, die zwischen 1 und ∞ liegen, und getrennt sind, so sind die fraglichen t Wurzeln reell, hat $(c.)$ keine solche Wurzel, so sind die t Wurzeln imaginär. Sollten aber einige der Wurzeln der Gleichung $(c.)$ wieder nicht getrennt sein, so bilde man eine neue Gleichung:

$$(d.) \quad \varphi(x_3) = 0,$$

und indem man so fortfährt, kommt man nothwendig zuletzt dahin, die Natur aller Wurzeln mit Sicherheit zu erfahren. Es sei z. B. die Gleichung:

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0 \text{ *)}$$

gegeben. Man hat also:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1, \\
\frac{\partial f(x)}{\partial x} &= 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2, \\
\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} &= 20x^3 + 12x^2 + 6x - 4, \\
\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} &= 60x^2 + 24x + 6, \\
\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4} &= 120x + 24, \\
\frac{\partial^5 f(x)}{\partial x^5} &= 120,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
[-1] &= \begin{matrix} + & - & + & - & + & - \\ 120 & 96 & 42 & 18 & 10 & 6 \end{matrix} \\
[0] &= \begin{matrix} + & + & + & - & + & - \\ 120 & 24 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{matrix} \\
[1] &= \begin{matrix} + & + & + & + & + & + \\ 120 & 144 & 90 & 34 & 10 & 2 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Hier werden zwei Wurzeln zwischen -1 und 0, und drei zwischen 0 und 1 angedeutet. Um zuerst die Natur der zwischen -1 und 0 enthaltenen Wurzeln zu untersuchen, setze man:

$$x = 0 - \frac{1}{x_1},$$

---

*) *Analyse des équat. pag.* 145.

so erhält man:

$$-(-x_1)^5+2(-x_1)^4-\frac{4}{2}(-x_1)^3+\frac{6}{2.3}(-x_1)^2+\frac{24}{2.3.4}(-x_1)+\frac{120}{2.3.4.5}=0,$$

oder

$$x_1^5+2x_1^4+2x_1^3+x_1^2-x_1+1=0,$$

also

$$\begin{aligned}
F(x_1) &= x_1^5+2x_1^4+2x_1^3+x_1^2-x_1+1,\\
\frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} &= 5x_1^4+8x_1^3+6x_1^2+2x_1-1,\\
\frac{\partial^2 F(x_1)}{\partial x_1^2} &= 20x_1^3+24x_1^2+12x_1+2,\\
\frac{\partial^3 F(x_1)}{\partial x_1^3} &= 60x_1^2+48x_1+12,\\
\frac{\partial^4 F(x_1)}{\partial x_1^4} &= 120x_1+48,\\
\frac{\partial^5 F(x_1)}{\partial x_1^5} &= 120.
\end{aligned}$$

Hier ist

$$[1]=+++++$$

folglich sind die zwei zwischen -1 und 0 liegenden Wurzeln imaginär.

Von den drei Wurzeln, die zwischen 0 und 1 liegen, ist in jedem Falle eine reell. Um die Natur der beiden anderen zu erfahren, setze man $x=0+\frac{1}{x_1}$, so erhält man die Gleichung

$$x_1^5-2x_1^4+2x_1^3-x_1^2-x_1-1=0,$$

also

$$\begin{aligned}
F(x_1) &= x_1^5-2x_1^4+2x_1^3-x_1^2-x_1-1,\\
\frac{\partial F(x_1)}{\partial x_1} &= 5x_1^4-8x_1^3+6x_1^2-2x_1-1,\\
\frac{\partial^2 F(x_1)}{\partial x_1^2} &= 20x_1^3-24x_1^2+12x_1-2,\\
\frac{\partial^3 F(x_1)}{\partial x_1^3} &= 60x_1^2-48x_1+12,\\
\frac{\partial^4 F(x_1)}{\partial x_1^4} &= 120x_1-48,\\
\frac{\partial^5 F(x_1)}{\partial x_1^5} &= 120,
\end{aligned}$$

und man findet

$$[1]=\begin{matrix}+&+&+&+&0&-\\120&72&24&6&0&2\end{matrix}$$

Die Zeichenreihe [1] ist unvollständig, und kann also nicht unmittelbar mit einer anderen Zeichenreihe verglichen werden, man mufs daher die Zeichenreihe $[1+\partial.1]$ suchen (§. 82.). Es ist

$$[1+\partial.1] = +++++-$$

ferner

$$[\infty] = +++++++$$

Es liegt also zwischen 1 und ∞ nur eine Wurzel der Gleichung (*b.*), folglich müssen zwei der drei Wurzeln, die zwischen 0 und 1 liegen, imaginär sein, d. h. die Gleichung (*a.*) hat nur eine reelle Wurzel, und diese liegt zwischen 0 und 1.

(Die Fortsetzung folgt.)

13.

Note sur les différentielles partielles de la fonction $\frac{x}{x^2+y^2}$.

(Par Mr. *R. Lobatto* à la Haye.)

Mr. le professeur Grunert s'étant déjà occupé du même objet dans le 8. volume de ce journal (pag. 146.), je me propose d'indiquer ici une voie tout à fait différente pour parvenir aux résultats intéressans obtenus par ce géomètre. La méthode de différentiation que je vais exposer étant fondée sur le développement d'une fonction au moyen du théorème, pourrait peut être s'appliquer avec succès à d'autres recherches de même genre.

En considérant d'abord la quantité y comme la seule variable, nous désignerons la fonction donnée par z_y, et son coefficient différentiel de l'ordre n, par $\partial^n . z_y$. Supposons maintenant que la variable y reçoive l'accroissement fini k, on aura en vertu du susdit théorème

$$(A.)\quad z_{y+k} = \frac{x}{x^2+y^2+2ky+k^2} = z_y + k.\partial z_y + \frac{k^2}{2}\partial^2 z_y + \frac{k^3}{2.3}\partial^3 z_y + \text{etc.}$$

Soit pour abréger $y = u\sin\varphi$ et $x = u\cos\varphi$, donc $\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x}$, la fonction z_y se réduira à $\frac{\cos\varphi}{u}$ et celle z_{y+k} à $\frac{u\cos\varphi}{u^2+2ku\sin\varphi+k^2}$.

Dans un mémoire publié en 1827 sous le titre de *Recherches sur la sommation de quelques séries trigonométriques*, j'ai fait voir que la fonction $\frac{a\sin x}{1+a^2+2a\cos x}$ représente la valeur de la série infinie

$$a\sin x - a^2\sin 2x + a^3\sin 3x - a^4\sin 4x + \text{etc.}$$

dont la loi est assez évidente.

Or, en y changeant x en $90^0 - \varphi$ et a en $\frac{k}{u}$, il viendra après avoir divisé par k:

$$(B.)\quad \frac{u\cos x}{u^2+2ku\sin\varphi+k^2} = z_{y+k} = \frac{\cos\varphi}{u} - k.\frac{\sin 2\varphi}{u^2} - k^2.\frac{\cos 3\varphi}{u^3} + k^3.\frac{\sin 4\varphi}{u^4} + \text{etc.}$$

Les deux développemens $(A.)$, $(B.)$ devant être identiques, quelque soit la valeur de l'accroissement k, il en résultera nécessairement d'après la théorie des coefficiens indéterminées:

$$z_y = \frac{\cos\varphi}{u},$$

$$\partial . z_y = -\frac{\sin 2\varphi}{u^2},$$

$$\partial^2 . z_y = -2\frac{\cos 3\varphi}{u^3},$$

$$\partial^3 . z_y = +2.3.\frac{\sin 4\varphi}{u^4},$$

et en général

$$1. \quad \begin{cases} \partial^{2n-1} . z_y = (-1)^n . 2.3....n . \frac{\sin n\varphi}{u^n}, \\ \partial^{2n} . z_y = (-1)^n . 2.3....n . \frac{\cos(n+1)\varphi}{u^{n+1}}. \end{cases}$$

Considérons à présent x comme la seule variable, et désignons la fonction donnée par z_x. Supposons que x reçoive l'accroissement h, il viendra également

$$z_{x+h} = \frac{x+h}{x^2+y^2+2hx+h^2} = z_x + h\partial z_x + \frac{h^2}{2}\partial^2 z_x + \frac{h^3}{2.3}\partial^3 z_x + \text{etc.}$$

La fonction z_{x+h} se réduit à $\frac{u\cos\varphi+h}{u^2+2hu\cos\varphi+h^2}$. Or, puisque la fonction $\frac{a(\cos x+a)}{1+a^2+2a\cos x}$ représente la valeur de la série infinie

$$a\cos x - a^2\cos 2x + a^3\cos 3x - \text{etc.}$$

(voyez mon susdit *Mémoire* pag. 2.) il viendra, en y changeant x en φ et a en $\frac{h}{u}$,

$$z_{x+h} = \frac{u\cos\varphi+h}{u^2+2hu\cos\varphi+h^2} = \frac{\cos\varphi}{u} - h\frac{\cos 2\varphi}{u^2} + h^2\frac{\cos 3\varphi}{u^3} - \text{etc.},$$

d'où l'on déduit par la comparaison des termes généraux des deux développemens z_{x+h},

$$2. \quad \partial^n . z_x = (-1)^n . 2.3....n . \frac{\cos(n+1)\varphi}{u^{n+1}}.$$

Les résultats (1.), (2.) s'accordent parfaitement avec ceux trouvés par Mr. le professeur Grunert, en y remplaçant u par $\sqrt{(x^2+y^2)}$. Cet estimable géomètre en a fait un heureux usage pour parvenir d'une manière plus élémentaire qu'il n'a été fait jusqu'ici, aux valeurs des intégrales définies

$$\int_0^\infty x^n e^{-mx}\sin nx\,dx . \int_0^\infty x^n e^{-mx}\cos nx\,dx.$$

Je me permettrai d'observer que les valeurs de $\int_0^\infty e^{-mx}\sin nx\,dx$ et $\int_0^\infty e^{-mx}\cos nx\,dx$ s'obtiennent facilement sans avoir recours à l'intégration

par parties. En effet, en écrivant au lieu de $\cos nx$ son expression en quantités exponentielles: $\frac{1}{2}(e^{nx\sqrt{-1}} + e^{-nx\sqrt{-1}})$,
la seconde de ces intégrales prendra la forme de

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\infty [e^{-(m-n\sqrt{-1})x} + e^{-(m+n\sqrt{-1})x}]\, dx.$$

Or puisqu'en général $\int_0^\infty e^{-px}\, dx = \frac{1}{p}$, il est évident que l'intégrale dont il s'agit se réduit immédiatement à

$$\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n\sqrt{-1}} + \frac{1}{m+n\sqrt{-1}}\right] = \frac{m}{m^2+n^2}.$$

De même en mettant pour $\sin nx$ sa valeur exponentielle

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}),$$

il résultera pour $\int_0^\infty e^{-mx}\sin nx\, dx$ la valeur:

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{1}{m-n\sqrt{-1}} - \frac{1}{m+n\sqrt{-1}}\right] = \frac{n}{m^2+n^2}.$$

En permutant les lettres m, n, les deux intégrales précédentes donnent en outre les équations:

$$\int_0^\infty e^{-nx}\cos mx\, dx = \int_0^\infty e^{-mx}\sin nx\, dx,$$
$$\int_0^\infty e^{-nx}\sin mx\, dx = \int_0^\infty e^{-mx}\cos nx\, dx,$$

et si l'on change n en $-n$, il viendra encore

$$\int_0^\infty e^{nx}\cos mx\, dx + \int_0^\infty e^{-mx}\sin nx\, dx = 0,$$
$$\int_0^\infty e^{nx}\sin mx\, dx - \int_0^\infty e^{-mx}\cos nx\, dx = 0.$$

Les intégrales:

$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos nx\, dx = \frac{m}{m^2+n^2},$$
$$\int_0^\infty e^{-mx}\sin nx\, dx = \frac{n}{m^2+n^2}$$

étant multipliées par dn et intégrées ensuite par rapport à n, donnent immédiatement:

$$\int_0^\infty e^{-mx}\sin nx\,\frac{dx}{x} = \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{n}{m}\right),$$
$$\int_0^\infty e^{-mx}\cos nx\,\frac{dx}{x} = -\tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right).$$

Dans l'hypothèse de $m = 0$ ces intégrales se changent en celles ci:

$$\int_0^\infty \sin nx\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2},\quad \int_0^\infty \cos nx\,\frac{dx}{x} = -\infty.$$

Je terminerai cette note en faisant observer que l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},$$

dont Mr. Grunert s'est également occupé à l'endroit cité, peut s'obtenir encore par une considération géométrique plus simple. En effet en désignant par z le rayon vecteur partant du centre de l'ellipse, l'équation polaire de cette courbe sera évidemment

$$z = \frac{ab}{\sqrt{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}}$$

et l'intégrale $\frac{1}{2}\int z^2 d\varphi$ représentera l'aire d'un secteur quelconque de l'ellipse. Or cette intégrale étant prise entre les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ donnera la moitié de l'aire de l'ellipse, donc

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi \frac{a^2b^2\,d\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = \tfrac{1}{2}ab\pi,$$

d'où l'on tire

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = \frac{\pi}{ab},$$

ainsi qu'il a été trouvé par Mr. Grunert.

La Haye, Févr. 1833.

14.

Aufstufungen der einfachen Functionen.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 6. im vorigen Hefte.)

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Heidelberg.)

B. Darstellung der negativen Aufstufungen der einfachen Functionen.

§. 13.

Die negativen Aufstufungen der Potenzialgröfsen.

Der Gang der Untersuchung führt nun auf die Darstellung der negativen Aufstufungen der einfachen Functionen. Wir beginnen mit denen der Potenzialfunctionen. Wir gehen hier von der früher gewählten Bezeichnung der Potenzialfunctionen in so weit ab, dafs wir y^p statt x^p setzen, und y als eine Function von x annehmen, die Zunahme aber wie früher durch Δx bezeichnen. Hierzu sind wir durch später nöthig werdende Substitutionen veranlafst. Nach diesen Bemerkungen geht die Gleichung (39.) in folgende über:

$$\zeta y^p = 2y^p + py^{p-1}\Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2}y^{p-2}(\Delta x)^2 + \ldots.$$

Um nun die erste negative Aufstufung zu gewinnen, vervielfachen wir diese Gleichung mit ζ^{-1}. Dadurch entsteht, wenn wir berücksichtigen, dafs $\zeta^{-1}\zeta y^p = \zeta^0 y^p = y^p$ ist:

$$y^p = 2\zeta^{-1}y^p + \frac{p}{1}\zeta^{-1}y^{p-1}\Delta x + \frac{p(p-1)}{1.2}y^{p-2}(\Delta x)^2 + \ldots.$$

Wird durch 2 gemessen und $\zeta^{-1}y^p$ auf eine Seite gebracht, so geht folgende Darstellung hieraus hervor:

$$76.\quad \zeta^{-1}y^p = \frac{y^p}{2} - \frac{p}{2}\zeta^{-1}y^{p-1}\Delta x - \frac{1}{2}\frac{p(p-1)}{1.2}\zeta^{-1}y^{p-2}(\Delta x)^2 - \frac{1}{2}\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\zeta^{-1}y^{p-3}(\Delta x)^3 - \ldots.$$

Alle Glieder mit Ausnahme eines einzigen sind mit ζ^{-1} verbunden. Diese Gleichung setzt uns daher in Stand, alle die mit ζ^{-1} verbundenen Ausdrücke durch Behandlung nach der vorstehenden Gleichung allmählig aus ihr

auszustofsen und so endlich eine Reihe zu gewinnen, worin nur die Function y und Δx erscheint, und wodurch also die vorgelegte Aufgabe gelöst ist.

Wir bezeichnen zu dem Ende die vorliegende Gleichung auf folgende Art:

77. $$\zeta^{-1}y^p = A_0y^p - A_2\frac{p}{1}\zeta^{-1}y^{p-1}\Delta x - A_2\frac{p(p-1)}{1.2}\zeta^{-1}y^{p-2}(\Delta x)^2 - \ldots.,$$

worin $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$, $A_3 = \frac{1}{2}$, u. s. w. bedeutet.

Entwickeln wir nun den zweiten Ausdruck $A_2\frac{p}{1}\Delta x y^{p-1}$ nach (77.) selbst, so haben wir $p-1$ statt p zu setzen, und alle hieraus hervorgehenden Glieder mit $-A_1\frac{p}{1}\Delta x$ zu vervielfachen, und wir erhalten:

$$-A_1p\zeta^{-1}y^{p-1}\Delta x =$$

$$-A_1A_0\frac{p}{1}y^{p-1}\Delta x + A_1A_1\frac{p}{1}.\frac{p-1}{1}\zeta^{-1}y^{p-2}(\Delta x)^2 + A_1A_2\frac{p(p-1)(p-2)}{1.1.2}\zeta^{-1}y^{p-3}(\Delta x)^3 + \ldots.$$

Die Einführung dieses Werthes in (77.) erzeugt folgende Darstellung:

$$\zeta^{-1}y^p = A_0y^p - A_0A_1\frac{p}{1}y^{p-1}\Delta x - A_2p(p-1)\left|\begin{matrix}\zeta^{-1}y^{p-2}(\Delta x) - A_3\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\\ +A_1A_2p\frac{p-1}{1}\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}\zeta^{-1}y^{p-3}(\Delta x)^2 - \ldots.\\ +A_1A_2p\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\end{matrix}\right|$$

Hier erscheinen zwei von ζ^{-1} befreite Ausdrücke. Von da an, wo die Reihe als eine Doppelreihe erscheint, stimmen die Gebilde der Glieder bis auf die Nenner der Facultäten von p überein. Werden diese untereinander in Übereinstimmung gebracht, so erhalten wir folgende Darstellung:

$$\zeta^{-1}y^p = A_0y^p - A_0A_1py^{p-1}\Delta x - A_2\left|\begin{matrix}\frac{p(p-1)}{1.2}\zeta^{-1}y^{p-2}(\Delta x)^2 - A_3\\ +2A_1A_1\end{matrix}\right| \left|\begin{matrix}\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\zeta^{-1}y^{p-3}(\Delta x)^3 + \ldots.\\ +\frac{2.3}{1.2}A_1A_2\end{matrix}\right|$$

Bezeichnet man die Vorzahlen in dieser Doppelreihe durch B_1, B_2, B_3, ..., so gewinnt man folgende Darstellung:

78. $$\zeta^{-1}y^p = A_0y^p - A_0A_1\frac{p}{1}y^{p-1}\Delta x + B_1\frac{p(p-1)}{1.2}\zeta^{-1}y^{p-2}(\Delta x)^2$$
$$+B_2\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\zeta^{-1}y^{p-3}(\Delta x)^3$$
$$+B_3\frac{p\ldots.(p-3)}{1\ldots.4}\zeta^{-1}y^{p-4}(\Delta x)^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo

$$B_1 = -A_2 + 2A_1A_1, \quad B_2 = -A_3 + \frac{2.3}{1.2}A_1A_2, \quad B_3 = -A_4 + \frac{2.3.4}{1.2.3}A_1A_3$$

u. s. w. ist. Entwickelt man nun auch den dritten Ausdruck in dieser

Darstellung $B_1 \frac{p(p-1)}{1.2} \zeta^{-1} y^{p-2} (\Delta x)^2$ nach der Gleichung (77.) dadurch, dafs man $p-2$ statt p setzt, und alle hiedurch gewonnenen Glieder mit $B_1 \frac{p(p-1)}{1.2} (\Delta x)^2$ vervielfacht, so wird

$$B_1 \frac{p(p-1)}{1.2} \zeta^{-1} y^{p-2} (\Delta x)^2 = A_0 B_1 \frac{p(p-1)}{1.2} y^{p-2} (\Delta x)^2 - B_1 A_1 \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{(p-2)}{1} \zeta^{-1} y^{p-3} (\Delta x)^2$$
$$- B_1 A_2 \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{(p-2)(p-3)}{1.2} \zeta^{-1} y^{p-4} (\Delta x)^2.$$

Wird dieser Werth in (78.) eingeführt, so entsteht

$$\zeta^{-1} y^p = A_0 y^p - A_0 A_1 y^{p-1} \Delta x + A_0 B_1 \frac{p(p-1)}{1.2} y^{p-2} (\Delta x)^2$$
$$\left. \begin{array}{l} + \; B_2 \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2\,3} \\ - B_1 A_1 \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{p-2}{1} \end{array} \right| \zeta^{-1} y^{p-3} (\Delta x)^3$$
$$\left. \begin{array}{l} + \; B_3 \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4} \\ - B_1 A_2 \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{(p-2)(p-2)}{1.2} \end{array} \right| \zeta^{-1} y^{p-4} (\Delta x)^4.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

In dieser Reihe erscheinen drei Glieder von ζ^{-1} befreit. Bringt man der bequemeren Darstellung wegen in die Gebilde der spätern Glieder Harmonie, so erhält man hierdurch folgende Darstellung:

$$\zeta^{-1} y^p = A_0 y^p - A_0 A_1 y^{p-1} y^{p-1} \Delta x + A_0 B_1 \frac{p(p-1)}{1.2} y^{p-2} (\Delta x)^2$$
$$\left. \begin{array}{l} + \; B_2 \\ - \frac{3}{1} B_1 A_1 \end{array} \right| \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \zeta^{-1} y^{p-3} (\Delta x)^3$$
$$\left. \begin{array}{l} + \; B_3 \\ - \frac{3.4}{1.2} B_1 A_2 \end{array} \right| \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4} \zeta^{-1} y^{p-4} (\Delta x)^4.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Bezeichnet man nun die Vorzahlen der Doppel-Reihe durch C_1, C_2, C_3, ..., so hat man für sie folgende Gleichungen:

$$C_1 = B_2 - \frac{3}{1} B_1 A_1,$$
$$C_2 = B_3 - \frac{3.4}{1.2} B_1 A_2,$$
$$C_3 = B_4 - \frac{3.4.5}{1.2.3} B_1 A_3.$$

Vereinigt man die Doppel-Reihe in eine, und behandelt in ihr den Ausdruck $C_1\frac{p....(p-3)}{1.2.3.4}\zeta^{-1}y^{p-3}(\Delta x)^3$ nach der Gleichung (77.), bringt Übereinstimmung in die Nenner der Facultäten, so gewinnt man hieraus leicht folgende geordnete Darstellung:

$$\zeta^{-1}y^p = A_0y^p - A_0A_1y^{p-1}\Delta x + A_0B_1\frac{p(p-1)}{1.2}y^{p-2}(\Delta x)^2 + A_0C_1\frac{p(p-1)(p-3)}{1.2.3}y^{p-3}(\Delta x)^3$$
$$+ \quad C_2\Big|\frac{p....(p-3)}{1....4}\zeta^{-1}y^{p-4}(\Delta x)^4$$
$$-\ 4C_1A_1\Big|$$
$$+ \quad C_3\Big|\frac{p(p-1)....(p-4)}{1.2....5}\zeta^{-1}y^{p-5}(\Delta x)^5$$
$$-\frac{4.5}{1.2}C_1A_2\Big|$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Die Bedingungs-Gleichungen für die Vorzahlen sind:

$$D_1 = C_2 - \frac{4}{1}\ C_1A_1,$$
$$D_2 = C_3 - \frac{4.5}{1.2}\ C_1A_2,$$
$$D_3 = C_4 - \frac{4.5.6}{1.2.3}C_1A_3,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Man erkennt aus dem Bisherigen, dafs die allmählige Ausstofsung des Zeichens ζ^{-1} aus den nachfolgenden Gliedern einen festen Gang gewinnt, und dafs allen weiteren Substitutionen das nämliche Ableitungsgesetz zu Grunde liegt. Diese Bemerkung wird den mühsamen Calcul abkürzen. Die Gestalt, unter welcher die zu suchende Reihe erscheinen wird, läfst sich am besten durch folgende Darstellung verdeutlichen:

79. $$\zeta^{-1}y^p = A_0y^p - A_0Q_1py^{p-1}\Delta x$$
$$+ A_0Q_2\frac{p(p-1)}{1.2}y^{p-2}(\Delta x)^2$$
$$+ A_0Q_3\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}y^{p-3}(\Delta x)^3$$
$$+ A_0Q_4\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4}y^{p-4}(\Delta x)^4$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

In dieser Darstellung erscheinen die Buchstaben A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, ... durch Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 dargestellt, es ist also:

$$Q_1 = A_1, \quad Q_2 = B_1, \quad Q_3 = C_1, \ ....$$

Die Bedingungs-Gleichungen für die Vorzahlen aber sind in folgender Zusammenstellung enthalten:

$$A_0 = \tfrac{1}{2}, \quad A_1 = \tfrac{1}{2}, \quad A_2 = \tfrac{1}{2}, \quad \ldots.$$

$$B_1 = -A_2 + 2A_1A_2, \quad B_2 = -A_3 + \frac{2.3}{1.2}A_1A_2, \quad B_3 = -A_4 + \frac{2.3.4}{1.2.3}A_1A_3, \ldots.$$

$$C_1 = B_2 - \tfrac{3}{1}B_1A_1, \quad C_2 = B_3 - \frac{3.4}{1.2}B_1A_2, \quad C_3 = B_4 - \frac{3.4.5}{1.2.3}B_1A_3, \ldots.$$

$$D_1 = C_2 - \tfrac{4}{1}C_1A_1, \quad D_2 = C_3 - \frac{4.5}{1.2}C_1A_2, \quad D_3 = C_4 - \frac{4.5.6}{1.2.3}C_1A_3, \ldots.$$

$$E_1 = D_2 - \tfrac{5}{1}D_1A_1, \quad E_2 = D_3 - \frac{5.6}{1.2}D_1A_2, \quad E_3 = D_4 - \frac{5.6.7}{1.2.3}D_1A_3, \ldots.$$

. . . . . .

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich nun der Werth der bis jetzt noch unbekannten Coefficienten. Mit ihrer Werthbestimmung wird die vorliegende Reihe, die bis jetzt nur formell war, Bedeutung erhalten.

Aus (80.) haben wir nun unmittelbar:

$$A_0 = \tfrac{1}{2},$$
$$Q_1 = A_1 = \tfrac{1}{2},$$
$$Q_2 = B_1 = -A_2 + 2.A_1Q_1,$$
$$Q_3 = C_1 = B_2 - \tfrac{3}{1}B_1A_1.$$

Nun ist $B_1 = Q_2$ und nach (80.) $B_2 = -A_3 + \frac{2.3}{1.2}A_1.A_2 = -A_3 + \frac{2.3}{1.2}Q_1A_2$, also durch Substitution:

$$Q_3 = -A_3 + \frac{2.3}{1.2}Q_1A_2 - \frac{3}{1}Q_2A_1.$$

Auf gleiche Weise läfst sich Q_4 durch Q_1, Q_2, Q_3 mittelst Substitution aus (80.) darstellen. Es ist

$$Q_4 = D_1 = C_1 - \tfrac{4}{1}C_1A_1 = C_2 - \tfrac{4}{1}Q_2A_1,$$
$$C_2 = B_3 - \frac{3.4}{1.2}B_1A_2 = B_3 - \frac{3.4}{1.2}Q_2A_1,$$
$$B_3 = -A_4 + \frac{2.3.4}{1.2.3}A_1A_3 = -A_4 + \frac{2.3.4}{1.2.3}Q_1A_3,$$

also

$$Q_4 = -A_4 + \frac{2.3.4}{1.2.3}Q_1A_3 - \frac{3.4}{1.2}Q_2A_2 - \frac{4}{1}Q_3A_1.$$

Eben so erhalten wir

$$Q_5 = -A_5 + \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}Q_1A_4 - \frac{3.4.5}{1.2.3}Q_2A_3 - \frac{4.5}{1.2}Q_3A_2 - \frac{5}{1}Q_4A_1.$$

Das Bildungsgesetz läfst sich leicht hieraus erkennen. Es ist im Allgemeinen:

81. $$Q_m = -A_m + \frac{2.3....m}{1.2....(m-1)} Q_2 A_{m-1} - \frac{3.4....m}{1.2....(m-2)} Q_2 A_{m-2} - .... - \frac{(m-1)m}{1.2} Q_{m-2} A_2 - \frac{m}{1} Q_{m-1} A_1 .$$

Die gewonnene Bildungsweise kündigt sich als eine zurücklaufende an, und die Darstellung der Vorzahl des $(m+1)^{ten}$ Gliedes verlangt die aller vorhergehenden Glieder. Um die Zahlenwerthe der Coefficienten zu bestimmen, ist zu berücksichtigen, dafs die sämmtlichen Q_1, Q_2, Q_3, ... mit $A_0 = \frac{1}{2}$ vervielfacht sind. Es ist demnach

$$A_0 = \tfrac{1}{2},$$
$$A_0 Q_1 = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},$$

die Vorzahl des dritten Gliedes ist:

$$A_0 Q_2 = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2} + 2.\tfrac{1}{4}) = 0,$$

die Vorzahl des vierten ist:

$$A_0 Q_3 = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3.1}{4} - \tfrac{3}{1}.0) = \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8},$$

die Vorzahl des fünften Gliedes ist:

$$A_0 Q_4 = \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{4}{4} - 0 - \tfrac{4}{8}) = 0,$$

u. s. w. Die weitere Fortsetzung dieser Berechnung zeigt, dafs die Vorzahlen der Glieder, welche mit den geraden Potenzen von Δx verbunden sind, verschwinden. Hieraus ergiebt sich folgende Darstellung für die erste negative Aufstufung der Potenzialfunction y^p:

82. $$\zeta^{-1} y^p = \frac{y^p}{2} - \frac{1}{4}.\frac{p}{1} y^{p-1}\Delta x + \frac{1}{8}.\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y^{p-3}(\Delta x)^3 - \frac{1}{4}.\frac{p(p-1)....(p-4)}{1.2....5} y^{p-5}(\Delta x)^5 + \frac{17}{16}.\frac{p(p-1)....(p-6)}{1.2....7} y^{p-7}(\Delta x)^7 - \frac{31}{4}.\frac{p(p-1)....(p-8)}{1.2....9} y^{p-9}(\Delta x)^9 + \frac{691}{8}.\frac{p(p-1)....(p-10)}{1.2....11} y^{p-11}(\Delta x)^{11} - \frac{5461}{4}.\frac{p(p-1)....(p-12)}{1.2....13} y^{p-13}(\Delta x)^{13} + \frac{929569}{32}.\frac{p(p-1)....(p-14)}{1.2....15} y^{p-15}(\Delta x)^{15} . . . . . .$$

Das Bildungsgesetz dieser Reihe für die Potenzen von y und Δx, und die

Facultäten von p ergiebt sich leicht. Die Vorzahlen

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{17}{16} - \tfrac{31}{4} \ldots .$$

bilden eine Reihe, die anfangs convergirt, dann divergirt. Die Reihe selbst ist ihrer Form nach unendlich. Sie bricht ab, wenn eine Facultät von p in 0 übergeht.

Die zweite negative Aufstufung wird gewonnen, wenn (82.) mit ζ^{-1} vervielfacht und jedes Glied auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach (82.) selbst in eine Reihe entwickelt wird. Es ist vorerst:

$$\zeta^{-2} y^p = \tfrac{1}{2}\zeta^{-1} y^p - \tfrac{1}{4} p \Delta x \zeta^{-1} y^{p-1} + \tfrac{1}{8} \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} (\Delta x)^3 \zeta^{-1} y^{p-3} + \ldots .$$

Die Entwickelung der genannten Glieder führt zu folgenden Darstellungen:

$$\frac{1}{2}\zeta^{-1} y^p = \frac{1}{4} y^p - \frac{1}{8} \cdot \frac{p}{1} y^{p-1} \Delta x \qquad + \frac{1}{2.8} \cdot \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y^{p-3} (\Delta x)^3$$

$$-\frac{1}{4} p \Delta x \zeta^{-1} y^{p-1} = \qquad -\frac{1}{4.2} p y^{p-1} \Delta x + \frac{1}{4.4} \cdot \frac{p(p-1)}{1.1} y^{p-2} (\Delta x) + \ldots . - \ldots .$$

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \zeta^{-1} y^{p-3} (\Delta x)^3 = \qquad + \frac{1}{2.8} \cdot \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y^{p-3} (\Delta x)^3$$

u. s. w. Werden die entwickelten Darstellungen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nach den steigenden Potenzen von Δx geordnet und zusammengezählt, so vereinigen sie sich zu folgender Reihe für die Darstellung der zweiten negativen Aufstufung:

83.
$$\begin{aligned}
\zeta^{-2} y^p = {} & \frac{y^p}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{1} y^{p-1} \Delta x + \frac{1}{8} \cdot \frac{p(p-1)}{1.2} y^{p-2} (\Delta x)^2 \\
& + \frac{1}{8} \cdot \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} y^{p-3} (\Delta\ x \\
& - \frac{1}{4} \cdot \frac{p \ldots . (p-3)}{1 \ldots 4} y^{p-4} (\Delta x)^4 \\
& - \frac{1}{4} \cdot \frac{p \ldots . (p-4)}{1 \ldots . 5} y^{p-5} (\Delta x)^5 \\
& + \frac{17}{16} \cdot \frac{p \ldots . (p-5)}{1 \ldots . 6} y^{p-6} (\Delta x)^6 \\
& + \frac{17}{16} \cdot \frac{p \ldots . (p-6)}{1 \ldots . 7} y^{p-7} (\Delta x)^7 \\
& - \frac{31}{4} \cdot \frac{p \ldots . (p-7)}{1 \ldots . 8} y^{p-8} (\Delta x)^8 \\
& - \frac{31}{4} \cdot \frac{p(p-1) \ldots . (p-8)}{1.2 \ldots . 9} y^{p-9} (\alpha x)^9 \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

Die dritte negative Aufstufung wird aus der zweiten eben so abgeleitet, wie die zweite aus der ersten. Werden daher die Glieder der Gleichung

(83.) eben so nach (82.) entwickelt, dann zusammen gezählt, so führen sie zu folgender Darstellung:

$$84.\quad \zeta^{-3}y^p = \frac{y^p}{8} - \frac{3}{16}\cdot\frac{p}{1}y^{p-1}\Delta x + \frac{3}{16}\cdot\frac{p(p-1)}{1.2}y^{p-2}(\Delta x)^2$$
$$- \frac{3}{8}\cdot\frac{p\ldots.(p-3)}{1\ldots.4}y^{p-4}(\Delta x)^4$$
$$+ \frac{9}{32}\cdot\frac{p\ldots.(p-4)}{1\ldots.5}y^{p-5}(\Delta x)^5$$
$$- \frac{17}{8}\cdot\frac{p\ldots.(p-5)}{1\ldots.6}y^{p-6}(\Delta x)^6$$
$$+ \frac{91}{32}\cdot\frac{p\ldots.(p-6)}{1\ldots.7}y^{p-7}(\Delta x)^7$$
$$- \frac{93}{8}\cdot\frac{p\ldots.(p-7)}{1\ldots.8}y^{p-8}(\Delta x)^8$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

u. s. w.

Die hier gewonnenen Reihen gelten zwar nur vorerst von dem Falle, wenn p eine ganze positive Zahl bedeutet. Sie gelten jedoch auch, wenn p eine gebrochene positive oder negative Zahl ist, denn diese Beschränkung ist nicht in der Natur der Sache gegründet, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Gleichung

$$\zeta\frac{1}{y^p} = \frac{1}{y^p} + \frac{1}{(y+\Delta x)^p},$$

welche die erste Aufstufung von y^{-p} ist, entwickelt, und dann das gegebene Verfahren auf den vorliegenden Fall anwendet. Es entsteht dann:

$$85.\quad \zeta^{-1}\frac{1}{y^p} = \frac{1}{2y^p} + \frac{p\Delta x}{4.y^{p+1}} - \frac{1}{8}\cdot\frac{p(p+1)(p+2)}{1.2.3}\cdot\frac{(\Delta x)^3}{y^{p+3}}$$
$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{p(p+1)\ldots.(p+4)}{1.2\ldots.5}\cdot\frac{(\Delta x)^5}{y^{p+5}}$$
$$- \frac{17}{16}\cdot\frac{p(p+1)\ldots.(p+6)}{1.2\ldots.7}\cdot\frac{(\Delta x)^7}{y^{p+7}}$$
$$+ \frac{31}{4}\cdot\frac{p(p+1)\ldots.(p+8)}{1.2\ldots.9}\cdot\frac{(\Delta x)^9}{y^{p+9}}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

u. s. w.

§. 14.

Darstellung der negativen Aufstufungen der Exponentialgröfsen.

Wir haben §. 9. gesehen, dafs die Facultäten zu keinen einfachen Darstellungen der positiven Aufstufungen führen, daher werden sie auch keine für die negativen gewähren. Sie müssen daher nöthigenfalls auf

die Potenzialgröfsen zurückgeführt werden. Desto einfachere Darstellungen werden die Exponentialgröfsen erzeugen.

Um die negativen Aufstufungen zu gewinnen, gehen wir von der Gleichung (55.), indem wir y statt x setzen, aus. Es ist

$$\zeta a^y = (1 + a^{\Delta x}) a^y.$$

Vervielfachen wir mit ζ^{-1}, so erhalten wir:

$$a^y = (1 + a^{\Delta x}) \zeta^{-1} a^y,$$

und hieraus also durch Messen und Umstellen:

$$86. \quad \zeta^{-1} a^y = \frac{a^y}{1 + a^{\Delta x}}.$$

Durch Vervielfachen dieser Gleichung mit ζ^{-1} gewinnen wir die zweite negative Aufstufung:

$$\zeta^{-2} a^y = \frac{1}{1 + a^{\Delta x}} \zeta^{-1} a^y = \frac{1}{1 + a^{\Delta x}} \cdot \frac{1}{1 + a^{\Delta x}} \cdot a^y = \frac{a^y}{(1 + a^{\Delta x})^2},$$

eben so aus dieser die dritte:

$$\zeta^{-2} a^y = \frac{1}{(1 + a^{\Delta x})^2} \zeta^{-1} a^y = \frac{1}{(1 + a^{\Delta x})^2} \cdot \frac{1}{(1 + a^{\Delta x})} \cdot a^y = \frac{a^y}{(1 + a^{\Delta x})^3}.$$

Die weiteren Ableitungen unterliegen demselben Bildungsgesetz. Es ist also allgemein:

$$87. \quad \zeta^{-m} a^y = \frac{a^y}{(1 + a^{\Delta x})^m}.$$

Um die negativen Aufstufungen der Function $\frac{1}{a^y}$ zu erhalten, gehen wir von der Gleichung (59.) §. 11. aus, wonach, wenn $y = x$ und $m = 1$ gesetzt wird, ist:

$$\zeta \frac{1}{a^y} = \frac{1 + a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \frac{1}{a^y}.$$

Das Vervielfachen mit ζ^{-1} erzeugt:

$$\frac{1}{a^y} = \frac{1 + a^{\Delta x}}{a^{\Delta x}} \zeta^{-1} \frac{1}{a^y},$$

also

$$88. \quad \zeta^{-1} \frac{1}{a^y} = \frac{a^{\Delta x}}{1 + a^{\Delta x}} \cdot \frac{1}{a^y}.$$

Wiederholt man das Geschäft der ersten negativen Aufstufungen an dieser Gleichung, so entsteht;

$$\zeta^{-2} \frac{1}{a^y} = \frac{a^{\Delta x}}{1 + a^{\Delta x}} \zeta^{-1} \frac{1}{a^y} = \frac{a^{\Delta x}}{1 + a^{\Delta x}} \cdot \frac{a^{\Delta x}}{1 + a^{\Delta x}} \cdot \frac{1}{a^y} = \left(\frac{a^{\Delta x}}{1 + a^{\Delta x}}\right)^2 \frac{1}{a^y}.$$

Eben so erhalten wir:

$$\zeta^{-3} \frac{1}{a^y} = \left(\frac{a^{\Delta x}}{1 + a^{\Delta x}}\right)^3 \frac{1}{a^y},$$

und allgemein, da der Entwicklungsgang unverändert bleibt:

$$89. \quad \zeta^{-m}\frac{1}{a^y} = \left(\frac{a^{\Delta x}}{1+a^{\Delta x}}\right)^m \frac{1}{a^y}.$$

§. 15.

Darstellung der negativen Aufstufungen des Sinus.

Wir gehen, um die negativen Aufstufungen für $\sin y$ zu gewinnen, von der positiven Aufstufung des Sinus §. 11. No. 23. aus, und setzen dort y statt x, dann wird:

$$\zeta \sin y = 2\sin\left(y+\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\frac{\Delta x}{2}.$$

Diese Gleichung vervielfachen wir mit ζ^{-1}. Dadurch entsteht

$$\sin y = 2\cos\frac{\Delta x}{2}\zeta^{-1}\left(y+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

oder

$$\zeta^{-1}\sin y\left(y+\frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin y}{2\cos\frac{\Delta x}{2}}.$$

Wird hierin $y-\frac{\Delta x}{2}$ statt y gesetzt, so führt dies zu der gesuchten Darstellung:

$$90. \quad \zeta^{-1}\sin y = \frac{\sin\left(y-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cos\frac{\Delta x}{2}}.$$

Diese Gleichung enthält folgende Vorschrift: **Die erste negative Aufstufung des Sinus wird gefunden, wenn die veränderliche Gröfse y um die halbe Zunahme verkleinert, und der Sinus der so verkleinerten Function durch den doppelten Cosinus der halben Zunahme gemessen wird.**

Von der ersten negativen Aufstufung gehen wir nach dieser Vorschrift auf die zweite über. Es ist also

$$\zeta^{-2}\sin y = \frac{1}{2\cos\frac{\Delta x}{2}}\zeta^{-1}\left(y-\frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{1}{2\cos\frac{\Delta x}{2}}\cdot\frac{1}{2\cos\frac{\Delta x}{2}}\sin\left(y-\Delta x\right)$$

$$= \frac{\sin\left(y-\Delta x\right)}{2^2\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2}.$$

Wird hievon die Aufstufung genommen, so erhalten wir folgende Darstellung:

$$\zeta^{-3}\sin y = \frac{\sin\left(y-\frac{3\Delta x}{2}\right)}{2^3\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^3}.$$

Man erkennt aus den vorstehenden Fällen das allgemeine Gesetz. Es ist

$$91.\quad \zeta^{-m}\sin y = \frac{\sin\left(y-\frac{m\Delta x}{2}\right)}{2^m\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^m}.$$

Gehen wir bei diesen Ableitungen der negativen Aufstufungen von der Gleichung (66.) aus, die auf einer andern Anordnung beruht, so erhalten wir zwar dieselben Resultate, jedoch abwechselnde Zeichen, und es ist

$$92.\quad \begin{cases} \zeta^{-1}\sin y = -\dfrac{\sin\left(y-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cos\frac{\Delta x}{2}}, \\ \zeta^{-2}\sin y = \dfrac{\sin(y-\Delta x)}{2^2\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2}, \\ \zeta^{-3}\sin y = -\dfrac{\sin\left(x-\frac{3\Delta x}{2}\right)}{2^3\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^3}, \end{cases}$$

und allgemein:

$$93.\quad \zeta^{-m}\sin y = (-)^m\frac{\sin\left(y-\frac{m\Delta x}{2}\right)}{2^m\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)}.$$

§. 16.

Darstellung der negativen Aufstufungen des Cosinus.

Um die negativen Aufstufungen der Cosinus-Functionen zu gewinnen, gehen wir von der ersten positiven Aufstufung für dieselbe §. 12. No. 70. aus, und setzen y statt x. Dadurch wird:

$$\zeta\cos y = 2\cos\left(y+\tfrac{\Delta x}{2}\right)\cos\tfrac{\Delta x}{2}.$$

Wird mit ζ^{-1} vervielfacht, so geht hervor:

$$\cos y = 2\cos\tfrac{\Delta x}{2}\,\zeta^{-1}\cos\left(y+\tfrac{\Delta x}{2}\right),$$

oder

$$94.\quad \zeta^{-1}\cos\left(y+\tfrac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\cos y}{2\cos\frac{\Delta x}{2}}.$$

Wird hierin $y-\frac{\Delta x}{2}$ statt y gesetzt, so ergiebt sich:

$$94.\quad \zeta^{-1}\cos y = \frac{\cos\left(y-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cos\frac{\Delta x}{2}}.$$

Diese Grundgleichung giebt folgendes Ableitungsgesetz: Die negative Aufstufung der Cosinus-Function wird gewonnen, wenn man die veränderliche Gröfse um die halbe Zunahme vermindert (die so verminderte Cosinus-Function durch den doppelten Cosinus der halben Zunahme theilt).

Wird (94.) mit ζ^{-1} vervielfacht, so entsteht:

$$\zeta^{-2}\cos y = \frac{1}{2\cos\frac{\Delta x}{2}}\zeta\cos\left(y-\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{1}{2\cos\frac{\Delta x}{2}}\cdot\frac{\cos(y-\Delta x)}{2\,.\cos\frac{\Delta x}{2}} = \frac{\cos(y-\Delta x)}{2^2\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2}.$$

Eben so gewinnt man:

$$\zeta^{-3}\cos y = \frac{1}{2^2\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2}\zeta^{-1}\cos(x-\Delta x) = \frac{\cos\left(y-\frac{3\Delta x}{2}\right)}{2^3\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^3},$$

und hieraus allgemein:

$$95.\quad \zeta^{-m}\cos y = \frac{\cos\left(y-\frac{m\Delta x}{2}\right)}{2^m\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^m}.$$

Legen wir die Gleichung (73.) §. 12. zu Grunde, so erhalten wir eine andere Anordnung und abwechselnde Zeichen, und es wird:

$$99.\quad \begin{cases} \zeta^{-1}\cos y = -\dfrac{\cos\left(y-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cos\frac{\Delta x}{2}}, \\ \zeta^{-1}\cos y = \dfrac{\cos(x-\Delta x)}{2^2\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^2}. \end{cases}$$

Hieraus endlich allgemein:

$$97.\quad \zeta^{-m}\cos y = (-)^m\frac{\cos\left(y-\frac{m\Delta x}{2}\right)}{2^m\left(\cos\frac{\Delta x}{2}\right)^m}.$$

II. Darstellung der Aufstufungen der einfachen Functionen durch Differenziale.

A. Darstellung der positiven Aufstufungen der einfachen Functionen.

§. 17.

Formelle Darstellung der Aufstufungen der einfachen Functionen.

Der Taylorsche Lehrsatz stellt eine veränderliche Function durch eine Reihe dar, deren Glieder nach den Potenzen der Zunahme und den Differenzialen der Function geordnet sind. Diese Reihe ist bekanntlich

$$98.\quad f(x+\Delta x)=X_1=\frac{\Delta x.\partial X}{1.\partial x}+\frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X}{1\,2.(\partial x)^2}+\frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3}+\ldots.$$

wenn $X_1=f(x+\Delta x)$ ist, oder wenn X die Grundfunction von fx, und Δx ihre Zunahme ist. Berücksichtigen wir, dafs die Zahl, deren Logarithme die Einheit, eine ähnliche Reihe erzeugt:

$$e^z=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots,$$

so können wir die Reihe (98.) nach dieser Gleichung, wenn die Function X allenthalben ausgeschieden und $z=\frac{\Delta x}{\partial x}$ gesetzt wird, so vorstellen:

$$f(x+\Delta x)=X_1=e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}X.$$

Die erste Aufstufung einer Function wird nach (38.) durch folgende Gleichung gefunden:

$$99.\quad \zeta fx=fx+f(x+\Delta x)=X+X_1=X_0+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}X_0=\left(1+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)X_0,$$

oder, wenn man die entwickelte Reihe einführt:

$$100.\quad \zeta X=2X+\frac{\Delta x.\partial X}{1.\partial x}+\frac{\Delta x^2}{1.2}\cdot\frac{\partial^2 X}{(\partial x)^2}+\frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3}+\ldots.$$

Mittelst der Gleichung (99.) lassen sich die höhern Aufstufungen der Functionen sehr leicht durch Differenziale ableiten. Nimmt man nemlich die Aufstufung von der ersten Aufstufung, so ist

$$\zeta^2 X=\left(1+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)\zeta X.$$

Nun ist nach (99.) $\zeta X=\left(1+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)X$, also hat man durch Einführung dieses Werthes:

$$\zeta^2 X = \left(1+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)\left(1+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)X = \left(1+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)^2 X.$$

Auf gleiche Weise gewinnt man die dritte Aufstufung, und es ist

$$\zeta^3 X = \left(1+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)^2 \zeta X = \left(1+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)^2 \left(1+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)X = \left(1+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)^3 X.$$

Hieraus ergiebt sich allgemein:

$$101. \quad \zeta^m X = \left(1+e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)^m X,$$

oder auch

$$102. \quad \zeta^m X = \left(2+\frac{\Delta x}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{1.2.(\partial x)^2}+\frac{(\Delta x)^3}{1.2.3.(\partial x)^3}+\ldots.\right)^m X.$$

§. 18.

Entwickelte Darstellung der Aufstufungen der einfachen Functionen durch Differenziale.

Die entwickelte Darstellung der Aufstufungen durch Differenziale beruht auf der Gleichung (100.) des vorhergehenden §. Wir vervielfachen diese Gleichung mit ζ, wodurch entsteht:

$$\zeta^2 X = 2\zeta X + \frac{\Delta x.\partial}{1.\partial x}\zeta X + \frac{(\Delta x)^2.\partial^2}{1.2.(\partial x)^2}\zeta X + \frac{(\Delta x)^3.\partial^3}{1.2.3.(\partial x)^3}\zeta X + \ldots.$$

Wir haben daher ζX nach (100.) zu entwickeln, und die hieraus entstehende Reihe mit den verschiedenen Coefficienten zu verbinden, und dann sämmtliche Entwickelungen zusammenzuzählen. Die Ausführung dieser Geschäfte führt zu folgender Darstellung:

$$\begin{aligned}
\zeta^2 X = 2^2 X &+ 2\frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + 2\frac{(\Delta x)^2}{1.2}\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + 2\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \ldots. \\
&+ 2\frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{1.1}\cdot\frac{\partial^2 X}{(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{1.2.1.(\partial x)^2} + \ldots. \\
&+ 2\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X}{1.1.2.(\partial x)^3} + \ldots. \\
&+ 2\frac{(\Delta x)^3\partial X}{1.2.3.(\partial x)^2} + \ldots.
\end{aligned}$$

Die Glieder dieser entwickelten Reihen stimmen vollkommen überein, wenn man sie in vertikaler Richtung zusammenstellt, und sind nur in den Nennern der Facultäten, wie die Darstellung des §. 7. verschieden. Bringen wir auch hier, wie dort, Übereinstimmung in diese Facultäten, so ziehen wir hieraus folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
\zeta^2 X = 2^2 X &+ 2\left|\frac{\Delta x}{1}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} + 2\right|\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + 2\left|\frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \ldots.\right. \\
&+ 2\left|\begin{matrix} \\ +\frac{2}{1} \\ +\ 2\end{matrix}\right|\begin{matrix} \\ +\frac{3}{1} \\ +\frac{3.2}{2} \\ +\ 2\end{matrix}\Bigg|
\end{aligned}$$

An den Vorzahlen der hier gefundenen Reihe, die wir A_1, A_2, A_3, ... nennen wollen, entdeckt sich folgendes Bildungsgesetz:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 2^2 \\
A_2 &= 2.1 + 2.1 \\
A_3 &= 2.1 + \frac{2}{1} + \frac{2.1}{1.2}.2 \\
A_4 &= 2.1 + \frac{3}{1} + \frac{3.2}{1.2} + \frac{3.2.1}{1.2.3}.2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{n+1} &= 2.1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots + \frac{n}{1} + 2.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun statt der gefundenen Zahlen die Coefficienten A_1, A_2, A_3, A_4, ..., vervielfachen dann die hierdurch entstandene Reihe mit ζ, so entsteht:

$$\zeta^3 X = A_1 \zeta X + A_2 \frac{\Delta x . \partial}{1 . \partial x} \zeta X + A_3 \frac{(\Delta x)^2 . \partial^2}{1.2 (\partial x)} \zeta X + \ldots.$$

Wird statt ζX die Reihe (100.) mit jedem Gliede der vorstehenden Gleichung verbunden, so ergiebt sich folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
\zeta^3 X = 2A_1 X &+ A_1 \frac{\Delta x \partial X}{1.\partial x} + \frac{A_1 (\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{A_1 (\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \ldots. \\
&+ 2A_2 \frac{\Delta x \partial X}{1.\partial x} + A_2 \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.1.(\partial x)^2} + A_2 \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.1.(\partial x)^3} + \ldots. \\
&+ 2A_3 \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + A_3 \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.1.(\partial x)^3} + \ldots. \\
&+ 2A_4 \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \ldots.
\end{aligned}$$

Die Glieder der Vertikal-Reihen geben eine gleiche Bildungsweise zu erkennen, von der sich nur die Nenner der Facultäten ausschliefsen. Bringt man diese in Übereinstimmung, so wird:

$$\zeta^3 X = 2A_1 X + \begin{vmatrix} A_1 \\ 2A_2 \end{vmatrix} \frac{\Delta x . \partial X}{1 . \partial x} + \begin{vmatrix} A_1 \\ 2A_2 \\ 2A_3 \end{vmatrix} \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + \begin{vmatrix} A_1 \\ 3A_2 \\ \frac{3.2}{1.2} A_3 \\ \frac{3.2.1}{1.2.3} 2A_4 \end{vmatrix} \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \ldots.$$

Werden die Vorzahlen dieser Reihe B_1, B_2, B_3, ... genannt, so entdeckt sich hieran folgendes gemeinschaftliche Gesetz:

$$103.\quad \begin{cases} B_1 = 2A_1, \\ B_2 = A_1 + 2A_2, \\ B_3 = A_1 + 2A_2 + \frac{2.1}{1.2}2A_3, \\ B_4 = A_1 + \frac{3}{1}A_2 + \frac{3.2}{1.2}A_3 + \frac{3.2.1}{1.2.3}2A_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{n+1} = A_1 + \frac{n}{1}A_2 + \frac{n(n-1)}{1.2}A_3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}A_4 + \ldots + nA_{n-1} + 2A_n. \end{cases}$$

Dieses Bildungsgesetz ist zurücklaufend. Denn um die Vorzahlen irgend eines Gliedes einer spätern Aufstufung zu gewinnen, mufs man die Vorzahlen der vorhergehenden Aufstufung kennen.

Ob nun gleich die aufgefundene Bildungsweise für B_{n+1} vorerst nur für die Ableitung der dritten Aufstufung aus der zweiten gilt, so ist sie doch allgemein, wenn berücksichtigt wird, dafs die Glieder der nachfolgenden Aufstufung aus den Vorzahlen B_1, B_2, B_3, ... gerade auf die nämliche Weise gebildet werden. Wir sind daher der besonderen Darstellung für spätere Aufstufungen enthoben. Die wirkliche Berechnung der nöthigen Vorzahlen führt zu folgender Zusammenstellung:

$$104.\quad \begin{cases} \zeta X = 2X + \frac{\Delta x.\partial X}{1.\partial x} + \frac{(\Delta x)^2\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{(\Delta x)^3.\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \ldots. \\ \zeta^2 X = 4X + \frac{4\Delta x.\partial X}{1.\partial x} + \frac{6(\Delta x)^2.\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{10(\Delta x)^3.\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \ldots. \\ \zeta^3 X = 8X + \frac{12\Delta x.\partial X}{1.\partial x} + \frac{24(\Delta x)^2.\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{54(\Delta x)^3.\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \ldots. \\ \zeta^4 X = 16X + \frac{32.\Delta x\partial X}{1.\partial x} + \frac{80(\Delta x)^2.\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{224(\Delta x)^3.\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \ldots. \\ \zeta^5 X = 32X + \frac{80\Delta x.\partial X}{1.\partial x} + \frac{240(\Delta x)^2.\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2} + \frac{800(\Delta x)^3.\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3} + \ldots. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Vergleichen wir diese Entwickelungen mit denen von (45.) §. 7., so erkennen wir leicht die Übereinstimmung, die zwischen den Vorzahlen der einzelnen Entwickelungen herrscht.

§. 19.

Macht man von der ersten Gleichung von (104.) eine Anwendung auf die Winkelfunctionen $\sin x$ und $\cos x$, so wird $X = \sin x$ und $X = \cos x$. Man hat daher die verschiedenen Differenziale des Sinus und Cosinus nöthig. Die Differenziale von $\sin x$ sind:

$$\partial \sin x = \cos x\,\partial x,\quad \partial^2 \sin x = -\sin x(\partial x)^2,\quad \partial^3 \sin x = -\cos x(\partial x)^3,$$
$$\partial^4 \sin x = \sin x(\partial x)^4, \ldots,$$

die Differenziale von $\cos x$ sind:

$$\partial \cos x = -\sin x\,\partial x,\quad \partial^2 \cos x = -\cos x(\partial x)^2,\quad \partial^3 \cos x = \sin x(\partial x)^3,$$
$$\partial^4 \cos x = \cos x(\partial x)^4, \ldots.$$

Führt man diese Werthe ein, so entsteht für die Darstellung der ersten Aufstufungen von $\sin x$ durch eine Reihe:

$$105.\quad \zeta \sin x = 2\sin x + \frac{\Delta x}{1}\cos x - \frac{(\Delta x)^2}{1.2}\cos x - \frac{(\Delta x)^3}{1.2.3}\cos x + \ldots,$$

für die der ersten Aufstufung von $\cos x$ durch eine Reihe:

$$106.\quad \zeta \cos x = 2\cos x - \frac{\Delta x}{1}\sin x - \frac{\Delta x^2}{1.2}\cos x + \frac{(\Delta x)^3}{1.2.3}\sin x + \frac{(\Delta x)^4}{1.2.3.4}\cos x - \ldots.$$

Beide Reihen sind unendlich, da die Differenziale auf einer unendlichen Darstellung beruhen. Berücksichtigt man, dafs ferner nach der Gleichung (38.):

$$\zeta \sin x = \sin x + \sin(x + \Delta x) \quad \text{und} \quad \zeta \cos x = \cos x + \cos(x + \Delta x),$$

so ergeben sich aus (105.) und (106.) auch folgende Gleichungen:

$$\sin x + \sin(x + \Delta x) = 2\sin x - \frac{\Delta x}{1}\cos x - \frac{(\Delta x)^2}{1.2}\sin x - \frac{(\Delta x)^3}{1.2.3}\cos x + \ldots.$$

$$\cos x + \cos(x + \Delta x) = 2\cos x - \frac{\Delta x}{1}\sin x - \frac{(\Delta x)^2}{1.2}\cos x + \frac{(\Delta x)^3}{1.2.3}\sin x + \ldots.$$

und hieraus folgt:

$$106.\quad \sin(x + \Delta x) = \sin x + \frac{\Delta x}{1}\cos x - \frac{(\Delta x)^2}{1.2}\sin x - \frac{(\Delta x)^3}{1.2.3}\cos x + \ldots.$$

$$107.\quad \cos(x + \Delta x) = \cos x - \frac{\Delta x}{1}\sin x - \frac{(\Delta x)^2}{1.2}\cos x + \frac{(\Delta x)^3}{1.2.3}\sin x + \ldots.$$

Hierin kann x und Δx jeden Werth bedeuten. Wird $x = 0$ und $\Delta x = y$ gesetzt, so ist zu berücksichtigen, dafs $\sin 0^0 = 0$ und $\cos 0^0 = 1$ wird, und hieraus folgen die bekannten Gleichungen:

$$108.\quad \sin y = y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \frac{y^7}{1.2.\ldots.7} + \ldots.$$

$$109.\quad \cos y = 1 - \frac{y}{1.2} + \frac{y^2}{1.2.3.4} - \frac{y^6}{1.2.\ldots.6} + \ldots.$$

Die Gleichungen (104.) lassen sich noch zu andern Entwickelungen benutzen.

B. Darstellung der negativen Aufstufungen der einfachen Functionen.

§. 20.

Formelle Darstellung der negativen Aufstufungen der einfachen Functionen.

Die Gleichung (99.) §. 17. führt sehr leicht auf die Darstellung der negativen Aufstufungen einfacher Functionen. Vervielfacht man nemlich mit ζ^{-1}, so entsteht:

$$X = \left(1 + e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right) \zeta^{-1} X_0,$$

also hieraus:

$$110. \quad \zeta^{-1} X = \frac{X}{1 + e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}}.$$

Wird hiervon die zweite Aufstufung genommen, so wird

$$\zeta^{-2} X = \frac{1}{1 + e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}} \zeta^{-1} X = \frac{1}{\left(1 + e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)} \cdot \frac{X}{\left(1 + e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)} = \frac{X}{\left(1 + e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)^2}.$$

Eben so wird gewonnen:

$$\zeta^{-3} X = \frac{X}{\left(1 + e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)^3},$$

und allgemein:

$$111. \quad \zeta^{-m} X = \frac{X}{\left(1 + e^{\frac{\Delta x}{\partial x}}\right)^m},$$

oder

$$112. \quad \zeta^{-m} X = \frac{X}{\left(1 + \frac{\Delta x \,.\, \partial}{1 \,.\, \partial x} + \frac{(\Delta x)^2 \,\partial^2}{1.2} + \ldots.\right)^m}.$$

§. 21.

Entwickelte Darstellung der negativen Aufstufungen der einfachen Functionen.

Aus der Reihe (100.) leitet sich durch Vervielfachen mit ζ^{-1} und Umstellung leicht folgende Reihe ab:

$$113. \quad \zeta^{-1} X = \frac{X}{2} - \frac{\Delta x \,.\, \partial}{2 \,.\, \partial x} \zeta^{-1} X - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^2 \,.\, \partial^2}{1.2.(\partial x)^2} \zeta^{-1} X - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta x)^3 \,.\, \partial^3}{1.2.3.(\partial x)^3} \zeta^{-1} X - \ldots.,$$

worin alle Glieder mit Ausnahme des ersten mit $\zeta^{-1} X$ verbunden sind. Bezeichnen wir die Vorzahlen dieser Reihe, obwohl sie sämmtlich $= \frac{1}{2}$ sind, durch A_0, A_1, A_2, A_3, ..., so ergiebt sich hieraus

$$\zeta^{-1} X = A_0 X - A_1 \frac{\Delta x \,.\, \partial}{\partial x} \zeta^{-1} X - A_2 \frac{(\Delta x)^2 \,.\, \partial^2}{1.2 \,.\, (\Delta x)} \zeta^{-1} X - \ldots.$$

Behandeln wir allmählig die mit ζ^{-1} verbundenen Glieder nach der Glei-

chung (113.), und führen wir die hieraus hervorgehenden Entwickelungen in die Gleichung (113.) ein, so wird sich allmählig das Zeichen ζ^{-1} von allen Gliedern wegbringen lassen, und die vorgelegte Aufgabe wird gelöst sein. Die Entwickelung des ersten Gliedes führt zu folgender Darstellung:

$$-A_1\frac{\Delta x.\partial}{1.\partial x}\zeta^{-1}X = -A_0A_1\frac{\Delta x.\partial X}{1.\partial x}+A_1A_1\frac{(\Delta x)^2.\partial^2}{1.2.(\partial x)^2}\zeta^{-1}X+....$$

Die Einführung dieser Entwickelung in (113.) erzeugt:

$$\zeta^{-1}X = A_0X-A_0A_1\frac{\Delta x.\partial X}{1.\partial x}+A_1A_1\frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X}{1.1.(\partial x)^2}+A_1A_2\frac{(\Delta x)^3\partial^3}{1.2.1.(\partial x)^3}\zeta^{-1}X+....$$
$$-A_2\frac{(\Delta x)^2.\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2}-A_3\frac{(\Delta x)^3.\partial^3}{1.2.3.(\partial x)^3}\zeta^{-1}X-....$$

Bringt man in den Gliedern der Doppelreihe die Facultäten der Nenner in Übereinstimmung, so zieht man hieraus:

$$\zeta^{-1}X = A_0X-A_0A_1\frac{\Delta x.\partial X}{1.\partial x}-\left|\begin{matrix}A_2 & \frac{(\Delta x)^2.\partial^2\zeta^{-1}X}{1.2.(\partial x)^2}\\ +2A_1A_1 & -A_3\\ & +\frac{2.3}{1.2}A_1A_2\end{matrix}\right|\frac{(\Delta x)^3.\partial^3\zeta^{-1}X}{1.2.3.(\partial x)^3}-....$$

Nennt man die Glieder dieser Reihe, von da an, wo die Doppelreihe beginnt, B_1, B_2, B_3, ..., so erkennt man leicht folgendes Gesetz für die Bedingungsgleichungen:

$$B_1 = -A_2+2A_1A_1,\quad B_2 = -A_3-\frac{2.3}{1.2}A_1A_2,\quad B_3 = -A_4-\frac{2.3.4}{1.2.3}A_1A_3,\quad ....$$

Entwickelt man nun in der vereinigten Reihe den Ausdruck $B_1\frac{(\Delta x)^2.\partial^2\zeta^{-1}X}{1.2.(\partial x)^2}$ nach der Gleichung (113.), führt die gewonnene Entwickelung ein, bringt die Facultäten der Nenner in Übereinstimmung, so erhält man hieraus folgende Darstellung:

$$\zeta^{-1}X = A_0X-A_0A_1\frac{\Delta x.\partial X}{1.\partial x}+A_0B_1\frac{(\Delta x)^2\partial^2 X}{1.2.(\partial x)^2}$$
$$\left|\begin{matrix}+B_2 & \frac{(\Delta x)^3\partial^3 X}{1.2.3.(\partial x)^3}\\ -\frac{3}{1}A_1B_1 & \\ +B_3 & \frac{(\Delta x)^4.\partial^4 X}{1.2.3.4.(\partial x)^4}\\ -\frac{3.4}{1.2}A_1A_2 & \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . & \end{matrix}\right.$$

Nennt man die Vorzahlen dieser Reihe von da an, wo die Doppelreihe beginnt, C_1, C_2, C_3, C_4, ..., so unterliegen diese Vorzahlen folgendem Ableitungsgesetze:

$$C_1 = B_2 - \frac{3}{1} A_1 B_1, \qquad C_3 = B_4 - \frac{3.4.5}{1\,2.3} B_1 A_3,$$

$$C_2 = B_3 - \frac{3.4}{1.2} B_1 A_2, \qquad C_4 = B_5 - \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4} B_1 A_4,$$

. . . . . .

Die angegebene Entwickelungsmethode behält ihren bestimmten Gang. Man erkennt leicht, dafs sie mit der des §. 13., die für Potenzialgröfsen gilt, zusammenfällt. Es wäre daher überflüssig, die Untersuchung für die Auffindung der gesuchten Vorzahlen weiter verfolgen zu wollen. Das Bildungsgesetz der Gleichung (81.) gilt auch hier; und daher haben wir die dort gefundenen Zahlenwerthe in unsere Gleichung überzutragen.

Die entwickelte Darstellung der ersten negativen Aufstufung einer einfachen Function durch Differenziale liegt daher in folgender Gleichung:

$$\text{114.} \quad \zeta^{-1} X = \frac{X}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta x . \partial X}{1 . \partial x} + \frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^3 . \partial^3 X}{1.2.3 . (\partial x)^3}$$
$$- \frac{1}{4} \cdot \frac{(\Delta x)^5 . \partial^5 X}{1.2....5 . (\partial x)^5}$$
$$+ \frac{17}{16} \cdot \frac{(\Delta x)^7 . \partial^7 X}{1.2....7 . (\partial x)^7}$$
$$- \frac{31}{4} \cdot \frac{(\Delta x)^9 . \partial^9 X}{1.2....9 . (\partial x)^9}$$
$$+ \frac{691}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^{11} . \partial^{11} X}{1.2....11 . (\partial x)^{11}}$$
. . . . . .

Eben stimmten die Vorzahlen der 2ten und 3ten negativen Aufstufungen mit denen von (83.) und (84.) §. 13. überein, und es ist:

$$\text{115.} \quad \zeta^{-2} X = \frac{X}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta x . \partial X}{1 . \partial x} + \frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2 (\partial x)^2}$$
$$+ \frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^3 \partial^3 X}{1.2.3 (\partial x)^3}$$
$$- \frac{1}{4} \cdot \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X}{1.2.3.4 (\partial x)^4}$$
$$- \frac{1}{4} \cdot \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 X}{1.2....5 (\partial x)^5}$$
. . . . . .

und

$$\text{116.} \quad \zeta^{-3} X = \frac{X}{8} - \frac{3}{16} \cdot \frac{\Delta x . \partial X}{1 . \partial x} + \frac{3}{16} \cdot \frac{(\Delta x)^2 \partial^2 X}{1.2 (\partial x)^2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^4 \partial^4 X}{1.2.3.4 (\partial x)^4}$$
$$+ \frac{9}{32} \cdot \frac{(\Delta x)^5 \partial^5 X}{1.2....5 (\partial x)^5}$$
$$+ \frac{17}{8} \cdot \frac{(\Delta x)^6 \partial^6 X}{1.2....6 (\partial x)^6}$$
. . . . . .

15.

Exemplum usus functionum iteratarum in theoria functionum integraliter transcendentium.

(Auct. *Hill,* prof. math. Lond. Goth.)

Functiones iteratae maximum habent usum in unacunque fere analyseos parte, praecipue in summando aequationes ad differentias, nec minorem in integrando aequationibus differentialibus. In problemate vero quadrandi et ad multipla transcendentium invenienda et ad comparationem rite instuendam maximi conducunt. Cujus rei in praesenti tantummodo exempla proponamus aliqua. Primum vero exemplum idoneae substitutionis exhibeamus.

Sit functio gx ejusmodi, ut $g(gx)$ seu $g^2x = x$ sit, atque ponatur $\int gx\,dx = Gx$, eritque universim

$$Gx + G(gx) = xgx + \text{Const.}$$

Est enim $d(xgx) = dx.gx + x\,d(gx)$, atque $dG(gx) = dgx.G_1(gx) = dgx.g(gx)$ seu $dG(gx) = x.dgx$, ideoque $d(xgx) = dGx + dG(gx)$, unde integrando formula proposita sponte fluit. Sit ex. gr. $gx = \sqrt[n]{(a^n - x^n)}$, quo casu $(gx)^n = a^n - x^n$, $g^2x = g(gx) = \sqrt[n]{(a^n - (gx)^n)}$ seu $g^2x = \sqrt[n]{x^n} = x$. Si itaque statuimus $Gx = \int_0^x dx \sqrt[n]{(a^n - x^n)}$, $(G0 = 0)$, erit

$$Gx + G(\sqrt[n]{(a^n - x^n)}) = x.\sqrt[n]{(a^n - x^n)} + Ga,$$

speciatimque, si $x = \sqrt[n]{(a^n - x^n)} = \frac{a}{\sqrt[n]{2}} = c$, $2Gc = c^2 + Ga$. Sin vero ponis $n = -r$, formulam habebis similem, specialem quidem, pro functione $\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[r]{(x^r - a^r)}}$ comparanda. Has speciales formulas quis facile immediate conjiciat, attamen generalis nostra formula latissime patet. Sit enim γx functio quaecunque ipsius x, atque $\bar{\gamma}x$ ipsius inversa, ponaturque $gx = \bar{\gamma}(-\gamma x)$, eritque gx indolis ab initio desideratae, nempe $g^2x = gx$. Est enim $g^2x = g(gx) = \bar{\gamma}(-\gamma gx) = \bar{\gamma}(\gamma x) = x$, quoniam $\gamma(gx) = \gamma\bar{\gamma}(-\gamma x) = -\gamma x$. Si igitur γx neque par neque impar fuerit functio, innumerae dabuntur functiones gx, atque transcendentes $Gx \left(= \int_0^x gx\,dx\right)$ correspon-

dentes, quarum aliqua saltem proprietas innotuerit: haec nempe

$$Gx + Ggx = x.gx + Gg0.$$

At ulterius progrediamur.

Si nempe similiter fuerit functio g ejusmodi ut $g^3x = x$ sit, ponaturque $Gx = \int_0^x (dx.gx.g^2x)$, erit

$$Gx + Ggx + G(g^2x) = x.gx.g^2x + \text{Const.}$$

Quoniam enim $dGx = dx.gx.g^2x$, erit substituendo gx in locum ipsius x, $dGgx = dgx.ggx.g^2gx = dgx.g^2x.x$, (ob $g^2(gx) = g^3x = x$), iterumque $dGg^2x = dggx.g^2gx.gx = dg^2x.x.gx$; ideoque

$$dGx + dGgx + dGg^2x = dx.gx.g^2x.x + dgx.g^2x.x + dg^2x.x.gx,$$

quod aperte $= d(x.gx.g^2x)$ aequatur, unde integrando formula modo proposita consequitur. Constante vero rite definito erit

$$Gx + Ggx + Gg^2x = xgx\,g^2x + Gg0 + Gg^20.$$

Iam vero accipiendo $c =$ radici ex aequatione $x = gx$, erit $gc = c$, atque $g^2c = ggc = gc = c$, ideoque

$$Gc + Ggc + Gg^2c = 3Gc = c.gc.g^2c + Gg0 + Gg^20,$$

seu $3Gc = c^3 + Gg0 + Gg^20$. Sin vero $g0 = 0$ fuerit, erit $Gc = \frac{1}{3}c^3$ seu $\int_0^c dx.gx.g^2x = \frac{1}{3}c^3$, quod integrale definitum est satis memorabile, cum ad innumeras functionum formas quadret.

Iam vero patet, universim fore

$$Gx + Ggx + G(g^2x) + \ldots + G(g^{r-1}x) = x.gx.g^2x \ldots g^{r-1}x + \text{Const.},$$

si fuerit $g^rx = x$ atque $Gx = \int_0^x dx.gx.g^2x \ldots g^{r-1}x$; eritque Const. $= 0$, si $g0 = 0$, alias vero

$$\text{Const.} = Gg0 + Gg^20 + \ldots + Gg^{r-1}0.$$

Huius vero formulae demonstrandi ars ex antecedentibus facile colligitur. Speciatem vero, si fuerit $c = gc$, similiter colligitur, fore $rGc = c^r + \text{Const.}$, ideoque $\int_0^c dx.gx.g^2x \ldots g^{r-1}x = \frac{1}{r}c^r$, si $g0 = 0$ fuerit; alias vero, si altera datur radix c' aequationis $x = gx$, erit similiter $rGc' = c'^r + \text{Const.}$, ideoque $r(Gc' - Gc) = c'^r - c^r$, seu $\int_c^{c'} dx.gx.g^2x \ldots g^{r-1}x = \frac{c'^r - c^r}{r}$, quod est integrale definitum maxime momenti, utut et latissime patens, (cum gx arbitraria fere sit functio), et haudquaquam antiquorum indolis, cum horum pleraque, ni valde fallimur, ad extremum eo nituntur, ut functio differentialis nihilo vel infinito aequetur. Rei vero amplitudinem ita comprobamus. Sit γx functio quaecunque (coefficientibus imaginariis

praedita, si placet), ejusque inversa $\bar{\gamma}x$ (i. e. si aequatio $\gamma x = y$ dissolvitur, praebeat $x = \bar{\gamma}y$, seu $x = \gamma^{(-1)}y$, exsistente -1 iterationis exponente), ponaturque ad interim $gx = \bar{\gamma}e\gamma x$, eritque $g(gx) = \bar{\gamma}e\gamma gx$, seu $g^2x = \bar{\gamma}e^2\gamma x$, cum $\gamma gx = e\gamma x$ sit; similiter erit ulterius $g^2(gx) = \bar{\gamma}e^2(\gamma gx)$, seu $g^3x = \bar{\gamma}e^3\gamma x$, generatimque igitur $g^rx = \bar{\gamma}e^r\gamma x$. Ut vero jam $g^rx = x$ sit, ponatur $e^r = 1$, quo facto erit $g^rx = \bar{\gamma}\gamma x = x$. Si igitur accipiamus $e = \sqrt[r]{1}$ = radici imaginarii ex unitate, et γ et g, ut modo diximus, erit equidem $g^rx = x$, ideoque gx et $Gx\left(= \int_0^x dx\, gx\, g^2x \ldots g^{r-1}x\right)$ indolis modo explicatae. Patet vero, partim coefficientes functionis γx ita (imaginaria forsan) determinari posse, ut gx realis evadit, partim Gx semper realem esse, cum ejus differentiale symmetrica sit functio radicis solius imaginariae $\sqrt[r]{1}$.

Nemo vero non videt, ex universalibus modo exhibitis formulis innumera consequi tum integralia definita tum integralia comparandi regulas. Tantum igitur exempli causa unum alterumve exponamus.

Sit videlicet $gx = \sqrt[n]{(a + bx^n)}$, eritque $g^rx = \sqrt[n]{\left(a.\frac{1-b^r}{1-b} + b^rx\right)}$, quandoquidem

$$g^{r+1}x = g^rx = \sqrt[n]{\left(a.\frac{1-b^r}{1-b} + b^r(a+bx^n)\right)} = \sqrt[n]{\left(a.\frac{1-b^{r+1}}{1-b} + b^{r+1}x^n\right)}.$$

Iam vero accipiatur $b^m = 1$, nec $b = 1$, eritque $g^mx = \sqrt[n]{x^n} = x$, ideoque, ponendo $dGx = dx.gx.g^2x \ldots g^{m-1}x$, ex modo dictis

$$Gx + Ggx + Gg^2x + \ldots + Gg^{m-1}x = xgx.g^2x \ldots g^{m-1}x + \text{Const.}$$

Iam vero, si fuerit $c = gc = \sqrt[n]{(a + bc^n)}$, seu $c = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{1-b}\right)}$, aut etiam $a = (1-b)c^n$, erit

$$\int_0^c dx \sqrt[m]{\left[(a+bx^n)(a(1+b)+b^2x^n)(a(1+b+b^2)+b^3x^n)\ldots\left(a.\frac{1-b^r}{1-b}+b^rx^n\right)\right]} = \frac{1}{m}\left(\frac{a}{1-b}\right)^{\frac{m}{n}} + \text{Const.}$$

seu $Gc = \frac{1}{m}(c^m + \text{Const.})$, ubi $r = m-1$, atque $\text{Const.} = Gg0 + Gg^20 + \ldots + Gg^r0$.

Hoc vero integrale definitum satis abstrusum (nam n valorem quemvis admittit), quamquam speciale, tamen latissime patet. Primum vero observamus, si capiatur $\frac{a}{1-b} = \alpha =$ reale, id quod sub radicis signo est, cum symmetrica ipsorum b sit functio, fore reale; sin vero ponatur $a = (1-b)c^n$, erit factoris cujusvis forma haec:

$$c^n(1-b^r) + b^rx \quad \text{seu} \quad c^n + b^r(x^n - c^n).$$

Ex. gr. si ponamus $n=2$, $r=2$, $m=3$, erit integrale nostrum

$$\int dx\sqrt{[(c^2+b(x^2-c^2))(c^2+b^2(x^2-c^2))]} = \int dx\sqrt{(3c^4-3c^2x^2+x^4)}.$$

Sin vero ponatur $n=-2$, atque $m=3$, erit

$$\int \frac{c^2x^2\,dx}{\sqrt{(c^4-3c^2x^2+3x^4)}}.$$

Si igitur $x=cz$, vel, quod eodem redit, $c=1$, et

$$\int_0^z dz\sqrt{(3-3z^2+z^4)} = Ez, \text{ atque } \int_0^z \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-3z^2+3z^4)}} = Gz,$$

erit

$$Ez+Egz+Eg^2z = z.gz.g^2z+Eg0+Eg^20,$$
$$Gz+Ggz+Gg^2z = z.gz.g^2z+Gg0+Gg^20,$$

speciatimque

$$3.E1 = 1+Eg0+Eg^20$$

atque

$$3.G1 = 1+Gg0+Gg^20,$$

ubi $g0=\sqrt{(1-b)}$, $g^20=\sqrt{(1-b^2)}$, existente $b=\sqrt[3]{1}=\frac{-1\pm\sqrt{(-3)}}{2}$. Calculanti vero mox patebit, integralia definita $E1$ et $G1$ ad ipsa attinere Elliptica, quae cel. Legendre in *Exc. d. c. int. T. I. p.* 54. pertractavit. Patet vero alteram radicem aequationis $z=gz\,[=\sqrt{(1+b(z^2-1))}]$, fore -1, ideoque

$$\int_{-1}^{+1} \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(3z^4-3z^2+1)}} = \tfrac{1}{3}, \text{ atque } \int_{-1}^{+1} dz\sqrt{(3-3z^2+z^4)} = \tfrac{1}{3}.$$

Si vero posueris $n=2$, $m=4$, vel $=5$ etc., casum habebis in functionibus Abelianis aeque memorabilem, ac istum in Ellipticis.

Ulterius ponendo $gx=\sqrt[n]{\left(\frac{a+a_1x^n}{b+b_1x^n}\right)}$, certamque relationem inter coefficientes a, a_1, b et b_1 (exsistente exponente n arbitrario), habebis $g^rx=x$, indeque theoremata similia de functione

$$\int dx\sqrt[n]{\left[\left(\frac{a+a_1x^n}{b+b_1^0x^n}\right).\left(\frac{a^1+a_1^1x^n}{b^1+b_1^1x^n}\right)\ldots.\left(\frac{a^r+a_1^rx^n}{b^r+b_1^{r-1}x^n}\right)\right]};$$

ubi ibidem casus $r=2$ ellipticas, r vero $=3$, 4 etc. Abelianas tangit functiones. Haec vero indicasse sufficiat, cum particularia in praesenti minus curemus *).

---

*) Indicasse igitur sufficiat, alia obtineri integralia definita, ponendo $c=g^2c$, vel $c=g^3c$ etc. Ex. gr. $c=g^2c$, et $g^mx=x$, erit $g^3c=gc$, $g^4c=g^2c=c$, generatimque $g^{2r}c=c$ atque $g^{2r+1}c=gc$; ideoque $n(Gc+Ggc)=(cgc)^n+\text{Const.}$, si $m=2n$.

Nemo vero non videt, hanc theoriam pleniorem functionum iteratarum cognitionem postulare; quare et completam de his doctrinam jam octo abhinc annis composuimus, quam et jam nobis publicis faciendi juris est animus, dummodo editor idoneus sumtus suppeditat.

Londini Gothorum d. V. ante cal. Jul. 1833.

Sin vero $m = 2n+1$ impar fuerit, erit $(n+1)Gc + nGgc = c^{n+1}(gc)^n + \text{Const.}$, ubi Const. idem ac antea.

In exemplis allatis nonnisi speciales functionum comparandarum regulas obtinuimus. Attamen rem hac via accuratius adgrediendo generales quidem comparandi formulas obtinuimus, idque ita, ut non modo, quidquid hucusque in arte quadrandi calluerimus, hinc quasi ex proprio fonte explicetur, sed etiam novae regulae investigentur.

Hinc enim vel integrale indefinitum, seu inter limites arbitrarias x et y sumtum, aequatione quadam resolvendo definimus, vel generales ipsum comparandi formulas elicimus. Prioris rei, comprobandae causa heic absque explicatione apponimus formulas:

1. $$\int_x^y \frac{dx}{f'^0 x} = r, \quad \text{si } y = f^r x \text{ fuerit;}$$

2. $$\int_u^x \frac{\varphi'^0 x\, dx}{(f'^0 x)^2} = \frac{\varphi^r x}{f'^0 u}, \quad \text{si } u = f^r x;$$

quae theoremata aeque memorabilia constituunt, de quibus aliquando posthac agemus.

16.
Théorie des parallèles.

On sait que pour compléter cette théorie, il ne s'agit qu'à démontrer la proposition suivante, présentée par Euclide comme axiome:

Prop. Si la somme des angles opposés *ECB* et *DBC* (Taf. III. Fig. 11.), que deux droites *EC* et *BD* font avec une troisième *CP* qu'elles coupent, est moindre que la somme de deux angles droits, ces droites, prolongées suffisamment, se couperont nécessairement.

En voici une démonstration très simple.

Faites l'angle *ACB* égal au supplément *DBI* de l'angle *DBC*, et égaux entre eux les angles *ACE*, *ECF*, *FCG* etc. de sorte que $ACF = 2\,ACE$, $ACG = 3\,ACE$ etc.: il est clair qu'il existera toujours quelque multiple $ACH = n.ACE$ de l'angle *ACE*, *n* étant un nombre entier fini, qui est ou égal à l'angle *ACP* ou plus grand que cet angle, cést-à-dire: qui n'est pas plus petit que l'angle *ACP*, quel que soit l'angle *ACE*.

De l'autre côté faites $CB = BI = IL$ etc. et tous les angles *ACB*, *DBI*, *KIL* etc. égaux entre eux: les figures *ACBD*, *DBIK*, *KILM* seront congruentes, et on aura $ACIK = 2\,ACBD$, $ACLM = 3\,ACBD$ etc.

Soit $ACNO = n.ACBD$, *n* ayant la même valeur numérique que ci-dessus dans l'expression $ACH = n.ACE$: on voit que *ACNO* est toujours plus petit que l'angle *ACP*, puisque *ACNO* ne comprend pas l'angle *ONP*, compris dans *ACP*. Donc aussi *ACBD* est nécessairement plus petit que *ACE*. Ou bien on voit que l'angle *ACP* n'est pas compris dans *ACNO*, de sorte que par suite l'angle *ACH* non moindre que *ACP* ne pourra y être compris non plus; donc aussi l'angle *ACE*, n^{me} partie de *ACH* ne pourra être compris dans *ACBD*, n^{me} partie de *ACNO*.

Donc *CE* coupera nécessairement *BD*.

17.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

(Von Herrn Prof. *Gudermann* zu Münster.)

Aufgaben.

1. Wenn man nach der in meiner Theorie der Potenzial-Functionen gebrauchten Bezeichnungs-Art die Facultät $x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ bezeichnet mit $[x]^n$, so kann man die Grundzahl x und den natürlichen Logarithmen derselben in eine Reihe entwickeln, welche nach Potenzen von $[x]^n$ fortschreitet. Die zuletzt genannte Reihe ist z. B.

$$\log x = \log\sqrt[n]{[x]^n} + \frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{[x]^n}} - \frac{(n-1)(n-2)}{12}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt[n]{[x]^n}}\right]^2$$
$$+ \frac{(n-1)^2(n-3)}{48}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt[n]{[x]^n}}\right]^3 - \frac{(n-1)(n-2)(n-4)(2n-1)}{360}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt[n]{[x]^n}}\right]^4\ldots.$$

Wie heifst die erste Reihe, und nach welchen Gesetzen schreiten die beiden Reihen fort?

2. Unter den mit ${}^n f^r$ bezeichneten Facultäten-Coefficienten giebt es fast zahllose Relationen, und unter diesen eine, in welcher der Grad n der Facultäten derselbe ist, nemlich:

$$r\,.\,{}^n f^r = [n-r+1]^2_{(2)}\,.\,{}^n f^{r-1} + [n-r+2]^3_{(3)}\,.\,{}^n f^{r-2}\ldots. + [n-r+\alpha]^{\alpha+1}_{(\alpha+1)}\,.\,{}^n f^{r-\alpha}\ldots. + [n]^{r+1}_{(r+1)}\,{}^n f^0;$$

wie kann diese Relation bewiesen werden?

3. Wenn sich die drei Scheitellinien AP, BQ, Cm (Taf. III. Fig. 12.) eines Dreiecks (sphärischen) ABC in einem Puncte M schneiden, und man zur Abkürzung die Winkel des Dreiecks mit A, B, C, ihre Gegenseiten mit a, b, c bezeichnet, ferner setzt:

$$\frac{\sin CP}{\sin PB} = x, \quad \frac{\sin CQ}{\sin AQ} = y, \quad \frac{\sin CM}{\sin Mm} = z \quad \text{und} \quad Cm = v,$$

so ist:

1. $z^2 = x^2 + 2xy\cos C + y^2,$
2. $z\cos v = x\cos a + y\cos b,$
3. $z\sin v = \sqrt{(x^2\sin a^2 + 2xy\sin a\sin b\cos C + y^2\sin b^2}.$

Diese drei Formeln sind die Grundformeln einer allgemeineren Coordinaten-Methode in der Sphärik.

(Von einem Ungenannten.)

Aufgabe.

4. Welche Form erhält ein vollkommen biegsamer und gleichmäfsig schwerer Faden, welchen die Oberfläche einer absolut glatten Kugel trägt, durch die Schwere, wenn die beiden Endpuncte des Fadens auf der Kugelfläche befestigt sind?

(Vom Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen.)

Lehrsatz.

5. Es werde das Product aus n Factoren $\frac{1+a_m}{1+b_m}\cdot\frac{1+a_{m+1}}{1+b_{m+1}}\cdot\ldots\cdot\frac{1+a_{m+n-1}}{1+b_{m+n-1}}$ durch $\frac{(1+a_{m|n})}{(1+b_{m|n})}$ angedeutet, so hat man

$$\frac{1+a_{1|n})}{1+b_{1|n})}=1+\frac{a_n-b_n}{1+b_n}+\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{1+b_{n-1}}\cdot\frac{(1+a_{n|1})}{(1+b_{n|1})}+\frac{a_{n-2}-b_{n-2}}{1+b_{n-2}}\cdot\frac{(1+a_{n-1|2})}{(1+b_{n-1|2})}+\frac{a_{n-3}-b_{n-3}}{1+b_{n-3}}\cdot\frac{(1+a_{n-2|3})}{(1+b_{n-2|3})}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{a_1-b_1}{1+b_1}\cdot\frac{(1+a_{2|n-1})}{(1+b_{2|n-1})}.$$

Einige Druckfehler im 10. Bande.

Seite 25. Zeile 9. statt $y.A.\partial t-x.A.\partial t$ lies $y.A.\partial t-x.B.\partial t$

— 25. — 23. st. $\cos e-u$ l. $\cos u-e$

— 26. — 14. st. $e.\cos u=\psi$ l. $e.\cos u=\cos\psi$

— 26. — 23. st. $\frac{(1-e)^2}{pee}$ l. $\frac{(1+e)^3}{pee}$

— 27. — 3. st. $\frac{2\sqrt{e}}{1+1}$ l. $\frac{2\sqrt{e}}{1+e}$

— 27. — 23. st. $\frac{u}{\sqrt{(1-ee.\cos u^2)}}$ l. $\frac{u.\partial u}{\sqrt{(1-ee.\cos u^2)}}$

— 28. — 23. st. $V_2=\int\frac{\partial u}{[1-ee.\cos u^2\sqrt{(1-ee.\cos u^2)}}$ l.
$V_2=\int\frac{\partial u}{[1-ee.\cos u^2]^2.\sqrt{(1-ee.\cos u^2)}}$

— 29. — 18. st. $\int_0^x\triangle^2\,\mathrm{am}\,\partial x$ l. $\frac{2K}{\pi}.\int_0^x\triangle^2\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}.\partial x$

— 30. — 5. st. $\frac{2K}{\pi}\int_0^x\partial.\mathrm{coam}\frac{2Kx}{\pi}$ l. $\frac{2K}{\pi}\int_0^x x.\partial.\mathrm{coam}\frac{2Kx}{\pi}$

— 30. — 9. st. $-\frac{2q^3.\sin 6x}{3.(1+q^6)}$ l. $+\frac{2q^3.\sin 6x}{3.(1+q^6)}$

— 30. — 15. st. $\Sigma\frac{(-q)^n.\sin nx^2}{n.m.(1+q^{2n})}$ l. $\Sigma\frac{(-q)^n.\sin nx^2}{n.n.(1+q^{2n})}$

— 32. — 16. st. $-\frac{q^{2n}(1+q^{4n})}{(1+q^{4n})^2}$ l. $-\frac{q^{2n}(1-q^{4n})}{(1+q^{4n})^2}$

— 34. — 20. st. $\Sigma\frac{(1-q)^n.\sin 2nx}{n(1+q^{2n})}$ l. $\Sigma\frac{(-q)^n.\sin 2nx}{n.(1+q^{2n})}$

17.

Resolutio algebraica aequationis $x^{257}-1=0$.

(Auctore *A. Fischer* Regiomontano.)

Introductio.

Aequatio $x^n-1=0$ unam tantummodo radicem habet realem, si n est impar, et praeterea $(n-1)$ valoribus imaginariis ei satisfieri potest; cujusvis autem radicis potestas n^{ta} erit aequalis 1. Si radicis cujuscunque imaginariae ad aequationem $x^n-1=0$ pertinentis potestates

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots.\ (n-1)^{tam}$$

fingimus, dignitates n^{tae} harum quantitatum etiam 1 fiunt, et faciamus, has quantitates inter se alioquin esse diversas, jure concludimus, easdem cum aequationis radicibus convenire. Sit itaque n numerus primus, et r quaelibet radix imaginaria, generalius potestates

$$1,\ r^e,\ r^{2e},\ r^{3e},\ \ldots.\ r^{(n-1)e}$$

cum n radicibus coincident, denotante e integrum per n non divisibilem.

Jam $(n-1)$ radices imaginariae per dignitates $r^e,\ r^{2e},\ r^{3e},\ \ldots.\ r^{(n-1)e}$ exprimantur, manifestum est, summam exhiberi posse per expressionem $\Sigma\{r^{me}+r^{(n-m)e}\}$ vel $\Sigma\left(r^{me}+\frac{1}{r^{me}}\right)$, in qua m valores $1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ \frac{n-1}{2}$ accipiat; sed seriei valor numericus semper erit aequalis -1. Porro patet, si g sit radix primitiva seu quivis e numeris n minoribus, quorum potestas $(n-1)^{ta}$ nec ulla inferior nisi 0ta, per n divisa residuum $+1$ habeat, seriem

$$r,\ r^g,\ r^{g^2},\ r^{g^3},\ \ldots.\ r^{g^{(n-2)}}$$

identicam esse cum aequationis $(n-1)$ radicibus imaginariis.

Cujus seriei summa designari potest

$$\Sigma\left\{r^{g^m}+r^{g^{\left(m+\frac{n-1}{2}\right)}}\right\}\quad\text{vel}\quad\Sigma\left(r^{g^m}+\frac{1}{r^{g^m}}\right)$$

(quia $g^{\frac{n-1}{2}}$ semper habet residuum -1), ubi pro m sunt valores $0,\ 1,\ 2,\ \ldots.\ \frac{n-3}{2}$ substituendi.

Radice quavis primitiva introducta, inter certa radicum aggregata relationes emergunt, quae ad aequationis solutionem a vulgari genere differentem ducunt; ita ut in casu speciali, existente numero primo $n=2^p+1$, functiones trigonometricae evitari possint, et radicum valores aequationibus quadraticis enotescant.

Duabus solutionibus inter se collatis in hoc casu pro $\cos\frac{2\pi}{n}$ valorem radices tantum quadraticas continentem invenimus; quocirca pro radio quolibet est $\cos\frac{2\pi}{n}$ quantitas ad geometricam constructionem accommodata.

Numerus $(n-1)$ factores primos α, β, γ, δ, ... contineat, quorum sit ultimus numerus 2.

Primo jam $(n-1)$ radices imaginariae

$$r,\ r^g,\ r^{g^2},\ r^{g^3},\ \ldots.\ r^{g^{n-2}}$$

dividantur in α periodos $\frac{n-1}{\alpha}$ terminorum secundum schema:

$$\begin{aligned}
r + r^{g^{\alpha}} + r^{g^{2\alpha}} + r^{g^{3\alpha}} + \ldots. + r^{g^{(m-1)\alpha}} &= (m, 1),\\
r^g + r^{g^{\alpha+1}} + r^{g^{2\alpha+1}} + r^{g^{3\alpha+1}} + \ldots. + r^{g^{(m-1)\alpha+1}} &= (m, g),\\
r^{g^2} + r^{g^{\alpha+2}} + r^{g^{2\alpha+2}} + r^{g^{3\alpha+2}} + \ldots. + r^{g^{(m-1)\alpha+2}} &= (m, g^2),\\
\ldots\ldots\ldots

Porro radices cujusque periodi $\frac{n-1}{\alpha.\beta}$ terminorum in γ periodos $\frac{n-1}{\alpha\,\beta.\gamma}$ terminorum distribuimus. Schema pro γ periodis, quarum summa cum $(p, 1)$ est identica, erit

$$\begin{aligned}
&r + r^{g^{\gamma\beta\alpha}} + r^{g^{2\gamma\beta\alpha}} + r^{g^{3\gamma\beta\alpha}} + \ldots + r^{g^{(q-1)\gamma\beta\alpha}} &&= (q, 1),\\
&r^{g^{\beta\alpha}} + r^{g^{(\gamma+1)\beta\alpha}} + r^{g^{(2\gamma+1)\beta\alpha}} + r^{g^{(3\gamma+1)\beta\alpha}} + \ldots + r^{g^{[(q-1)\gamma+1]\beta\alpha}} &&= (q, g^{\beta\alpha}),\\
&r^{g^{2\beta\alpha}} + r^{g^{(\gamma+2)\beta\alpha}} + r^{g^{(2\gamma+2)\beta\alpha}} + r^{g^{(3\gamma+2)\beta\alpha}} + \ldots + r^{g^{[(q-1)\gamma+2]\beta\alpha}} &&= (q, g^{2\beta\alpha}),\\
&\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots

Resolutio aequationis $x^{257}-1=0$.

Ratiocinium contrahi existimo, si radicem primitivam 10 supponam. — Cunctae aequationes auxiliariae fiunt in hoc exemplo quadraticae, quia $(n-1)$ est 2^8.

Primo valores pro (128,1) et (128,10) sunt quaerendi, in quas periodos aequationis 256 radices imaginariae sunt collectae.

Si quantitati r numeros adscriptos cum signo duplici ut exponentes tribuimus, omnes 128 terminos periodi (128,1) accipimus.

Ut ex aequatione $x^2-Ax+B=0$ valores pro (128,1) et (128,10) sequantur, sunt (128,1)+(128,10) vel -1 pro A et (128,1).(128,10) vel -64 pro B substituendi. Facto enim calculo, fit productum

$$(128,1).(128,10)=64\{(128,1)+(128,10)\}=-64.$$

Valores autem aequationis $x^2+x-64=0$ sunt

$$\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{257}) \text{ et } \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{257});$$

priorem statuam $=(128,1)=7.5156097710$
unde sequitur $(128,10)=-8.5156097710$

(128,1)	
1	60
2	61
4	62
8	64
9	67
11	68
13	70
15	72
16	73
17	79
18	81
21	84
22	88
23	89
25	92
26	95
29	98
30	99
31	100
32	104
34	111
35	113
36	114
42	116
44	117
46	118
49	120
50	121
52	122
57	123
58	124
59	128

Quaeque jam periodorum 128 terminos continentium e duabus periodis 64 terminorum constat

$$(128,1) = (64,1)+(64,100),$$
$$(128,10) = (64,10)+(64,28).$$

Aequationes ad has quatuor periodos pertinentes inventae sunt

1. $x^2-(128,1)x-16 = 0,$
2. $x^2-(128,10)x-16 = 0.$

Fit enim:

$$(64,1).(64,100)$$
$$= 16\{(64,1)+(64,100)+(64,10)+(64,28)\}$$
$$= -16$$

sic etiam

$$(64,10).(64,28) = -16.$$

Ex aequatione (1.) valores numerici pro (64,1) et (64,100) cognoscuntur

$$(64,1) = 9.2460739712,$$
$$(64,100) = -1.7304642002.$$

Hoc posito, valores pro (64,10) et (64,28) ex altera aequatione recta via nondum derivari possunt. Differentiae (64,10)—(64,28) signum prius quaerendum est. Sed hujus differentiae signum producto

$$\{(64,1)-(64,100)\}.\{(64,10)-(64,28)\}$$

enotescit, quod necessario generis antecedentis periodis exprimi potest.

Productum fit quantitas negativa, aequalis

$$8\{(128,10)-(128,1)\}.$$

Eruitur enim:

$$(64,1).(64,10)$$
$$= 12(64,1)+16(64,100)+20(64,10)+16(64,28)$$
$$+(64,100).(64,28)$$
$$= 16(64,1)+12(64,100)+16(64,10)+20(64,28)$$
$$-(64,1).(64,28)$$
$$= -20(64,1)-16(64,100)-16(64,10)-12(64,28)$$
$$-(64,100).(64,10)$$
$$= -16(64,1)-20(64,100)-12(64,10)-16(64,28),$$

(64,1)	(64,100)	(64,10)	(64,28)
1	9	5	3
2	13	10	6
4	18	20	7
8	21	27	12
11	25	37	14
15	26	39	19
16	29	40	24
17	31	41	28
22	36	43	33
23	42	54	38
30	49	55	45
32	50	63	47
34	52	71	48
35	57	74	51
44	58	75	53
46	59	78	56
60	61	80	65
64	62	82	66
67	72	83	69
68	79	85	76
70	84	86	77
73	89	87	90
81	98	91	94
88	99	93	96
92	100	97	102
95	104	101	103
111	113	107	105
117	114	108	106
120	116	109	112
121	118	110	119
123	122	115	125
128	124	126	127

quarum aequationum summa fit:

$$\{(64,1)-(64,100)\}.\{(64,10)-(64,28)\} = 8\{(128,10)-(128,1)\}.$$

Ergo differentiae $(64,10)-(64,28)$ signum negativum erit tribuendum, et sequuntur

$$(64,10) = -10.0997996169,$$
$$(64,28) = \quad 1.5841898459.$$

Generis proximi 8 periodos tabula sequens continet in qua rursus tantum exponentes quantitatis r propositae sunt, quibus signum duplex est adjiciendum.

(32,1)	(32,23)	(32,100)	(32,13)	(32,10)	(32,27)	(32,28)	(32,127)
1	11	21	9	5	27	7	3
2	22	25	13	10	37	14	6
4	23	29	18	20	39	19	12
8	35	42	26	40	41	28	24
15	44	50	31	43	54	33	45
16	46	57	36	63	55	38	48
17	67	58	49	75	71	47	51
30	70	59	52	80	74	56	53
32	73	79	61	83	78	66	65
34	81	84	62	85	82	69	77
60	88	89	72	86	93	76	90
64	92	99	98	87	101	94	96
68	95	100	104	91	108	105	102
120	111	114	113	97	109	112	103
121	117	116	122	107	110	119	106
128	123	118	124	126	115	125	127

Ad valores numeriços harum 8 periodorum computandos quatuor aequationes sunt necessariae; quantuscunque sit autem aequationum numerus, semper omnes reliquas a prima derivare poterimus.

Quatuor illae aequationes ut formentur, producta sequentia per periodos generis antecedentis exprimenda sunt:

$$(32,1)\ (32,23) = 2(64,1)+4(64,100)+5(64,10)+5(64,28),$$
$$(32,100)(32,13) = 4(64,1)+2(64,100)+5(64,10)+5(64,28),$$
$$(32,10)\ (32,27) = 5(64,1)+5(64,100)+2(64,10)+4(64,28),$$
$$(32,28)\ (32,127) = 5(64,1)+5(64,100)+4(64,10)+2(64,28).$$

Expressiones autem, per quas ipsae radices dantur, fiunt:

1. pro $(32,1)$ et $(32,23)$ $\ldots. x = \frac{1}{2}\{(64,1) \pm \sqrt{[64+7(64,1) -8(64,10)]}\}$,
2. pro $(32,100)$ et $(32,13)$ $\ldots. x = \frac{1}{2}\{(64,100) \pm \sqrt{[64+7(64,100)-8(64,28)]}\}$,
3. pro $(32,10)$ et $(32,27)$ $\ldots$ $x = \frac{1}{2}\{(64,10) \pm \sqrt{[64+7(64,10) -8(64,100)]}\}$,
4. pro $(32,28)$ et $(32,127)\ldots x = \frac{1}{2}\{(64,28) \pm \sqrt{[64+7(64,28) -8(64,1)]}\}$.

Aequationis (1.) radix prior statuatur $=(32,1) = 11{,}8604556333$

ergo $=(32,23)=-2{,}6143816621.$

Productum $\{(32,1)-(32,23)\}.\{(32,100)-(32,13)\}$ fit quantitas negativa. Quatuor enim producta $(32,1).(32,100)$; $(32,23).(32,13)$; $(32,1).(32,13)$; $(32,23).(32,100)$ fiunt:

1. $2(32,1)+4(32,23)+6(32,100)+4(32,13)+5(64,10)+3(64,28)$,
2. $4(32,1)+2(32,23)+4(32,100)+6(32,13)+5(64,10)+3(64,28)$,
3. $6(32,1)+4(32,23)+4(32,100)+2(32,13)+3(64,10)+5(64,28)$,
4. $4(32,1)+6(32,23)+2(32,100)+4(32,13)+3(64,10)+5(64,28)$;

summatis primo et secundo, atque subductis tertio et quarto, prodit:

$$\{(32,1)-(32,23)\}.\{(32,100)-(32,13)\}$$
$$=-4(64,1)+4(64,100)+4(64,10)-4(64,28).$$

Quam expressionem ex supra inventis patet esse negativam; unde etiam differentia $(32,100)-(32,13)$ est quantitas negativa. Hinc prodit:

$$(32,100) = -3{,}9962555682,$$
$$(32,13) = 2{,}2657913680.$$

Porro jam productum $\{(32,1)-(32,23)\}.\{(32,10)-(32,27)\}$ est positivum. Quatuor enim producta

$(32,1).(32,10)$; $(32,23).(32,27)$; $-(32,1).(32,27)$; $-(32,23).(32,10)$

fiunt:

1. $2(32,1)+5(32,23)+5(32,100)+3(32,13)+4(32,10)+5(32,27)+3(32,28)+5(32,127)$,
2. $5(32,1)+2(32,23)+3(32,100)+5(32,13)+5(32,10)+4(32,27)+5(32,28)+3(32,127)$,
3. $-5(32,23)-5(32,100)-3(32,13)-5(32,10)-6(32,27)-5(32,28)-3(32,127)$,
4. $-5(32,1)-3(32,100)-5(32,13)-6(32,10)-5(32,27)-3(32,28)-5(32,127)$,

quarum quantitatum summa invenitur

$$2(64,1)-2(64,10) = \{(32,1)-(32,23\}.\{(32,10)-(32,27)\}.$$

Quam expressionem ex supra inventis esse positivam, perspicuum est; unde etiam differentia $(32,10)-(32,27)$ fit quantitas positiva, et valores numerici eruuntur:

$$(32,10) = -3{,}7133822924,$$
$$(32,27) = -6{,}3864173245.$$

Tandem fit productum $\{(32,10)-(32,27)\}.\{(32,28)-(32,127)\}$ positivum. Quatuor enim producta

$(32,10).(32,28)$; $(32,27).(32,127)$; $-(23,10).(32,127)$; $-(32,27).(32,28)$

sunt:

1. $3(64,1)+5(64,100)+2(32,10)+4(32,27)+6(32,28)+4(32,127)$,
2. $3(64,1)+5(64,100)+4(32,10)+2(32,27)+4(32,28)+6(32,127)$,

3. $-5(64,1)-3(64,100)-6(32,10)-4(32,27)-4(32,28)-2(32,127)$,
4. $-5(64,1)-3(64,100)-4(32,10)-6(32,27)-2(32,28)-4(32,127)$.

quibus expressionibus summatis, prodit:

$$\{(32,10)-(32,27)\}.\{(32,28)-(32,127)\}$$
$$=-4(64,1)+4(64,100)-4(64,10)+4(64,28).$$

Quam expressionem ex supra inventis patet esse positivam; unde etiam differentia $(32,28)-(32,127)$ est quantitas positiva. Hinc prodit

$$(32,28) = 1{,}3214192922,$$
$$(32,127) = 0{,}2627705537.$$

Ad valores pro 16 periodis investigandos progredior. Hic exponentium tabula sequitur:

a_1	(16,1).....	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64, 128.
	(16,15)....	15,	17,	30,	34,	60,	68,	120, 121.
a_2	(16,23)....	23,	35,	46,	70,	73,	92,	111, 117.
	(16,88)....	11,	22,	44,	67,	81,	88,	95, 123.
a_3	(16,100)...	25,	29,	50,	57,	58,	100,	114, 116.
	(16,42)....	21,	42,	59,	79,	84,	89,	99, 118.
a_4	(16,13)....	13,	26,	49,	52,	61,	98,	104, 122.
	(16,62)....	9,	18,	31,	36,	62,	72,	113, 124.
a_5	(16,10)....	5,	10,	20,	40,	63,	80,	97, 126.
	(16,107)...	43,	75,	83,	85,	86,	87,	91, 107.
a_6	(16,27)....	27,	41,	54,	71,	82,	93,	108, 115.
	(16,109)...	37,	39,	55,	74,	78,	101,	109, 110.
a_7	(16,28)....	7,	14,	28,	33,	56,	66,	112, 125.
	(16,94)....	19,	38,	47,	69,	76,	94,	105, 119.
a_8	(16,127)...	3,	6,	12,	24,	48,	59,	96, 127.
	(16,106)...	45,	51,	53,	77,	90,	102,	103, 106.

Prima aequatio quadratica, qua valores pro (16,1) et (16,15) inveniuntur, est:

$$x^2-(32,1)x+2(32,1)+(32,23)+(32,100)+2(32,13)+2(32,28)=0;$$

ipsae autem radices fiunt:

$$x=\tfrac{1}{2}\{(32,1)\pm\sqrt{[34+3(32,1)+4(32,10)+2(32,27)+6(32,127)]}\}$$

et priorem valorem cum (16,1) identicum esse ponam. Accipimur igitur

$$(16,1) = 9{,}2291528841,$$
$$(16,15) = 2{,}6313027492.$$

Signis productorum antecedentibus similium investigatis, aequationes sequentes pro reliquis 16 terminorum periodis locum habent:

$$\left.\begin{matrix}(16,88)\\(16,23)\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{(32,23) \pm \sqrt{[34+3(32,23)+4(32,27)+2(32,10)+6(32,28)]}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}(16,100)\\(16,42)\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{(32,100) \pm \sqrt{[34+3(32,100)+4(32,28)+2(32,127)+6(32,10)]}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}(16,62)\\(16,13)\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{(32,13) \pm \sqrt{[34+3(32,13)+4(32,127)+2(32,28)+6(32,27)]}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}(16,10)\\(16,107)\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{(32,10) \pm \sqrt{[34+3(32,10)+4(32,100)+2(32,13)+6(32,1)]}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}(16,27)\\(16,109)\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{(32,27) \pm \sqrt{[34+3(32,27)+4(32,13)+2(32,100)+6(32,23)]}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}(16,28)\\(16,94)\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{(32,28) \pm \sqrt{[34+3(32,28)+4(32,23)+2(32,1)+6(32,100)]}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}(16,127)\\(16,106)\end{matrix}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{(32,127) \pm \sqrt{[34+3(32,127)+4(32,1)+2(32,23)+6(32,13)]}\right\}.$$

Sed alia methodo quantitatum [(16,23)—(16,88)]; [(16,100)—(16,42)]; etc. investigandarum hic commode uti potest.

Differentiis enim (16,1)—(16,15)]; (16,23)—(16,88)]; (16,100)—(16,42)]; etc. per b_1, b_2, b_3, ... b_8 **designatis et summis respective per** a_1, a_2, a_3, ... a_8, **relationes sequentes exstant:**

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 &= b_1 - 2b_4 + 2b_5 + 2b_7 + 4b_8,\\
a_2 b_2 &= b_2 + 2b_3 + 2b_6 + 2b_8 - 4b_7,\\
a_3 b_3 &= b_3 - 2b_1 + 2b_7 + 2b_6 - 4b_5,\\
a_4 b_4 &= b_4 + 2b_2 + 2b_8 - 2b_5 - 4b_6,\\
a_5 b_5 &= b_5 - 2b_8 + 2b_3 + 2b_2 - 4b_1,\\
a_6 b_6 &= b_6 + 2b_7 + 2b_4 - 2b_1 - 4b_2,\\
a_7 b_7 &= b_7 + 2b_5 + 2b_2 + 2b_4 - 4b_3,\\
a_8 b_8 &= b_8 + 2b_6 - 2b_1 - 2b_3 - 4b_4,
\end{aligned}$$

et quum quantitas b' **sit cognita, manifestum est, ceteras quantitates** b **his aequationibus computari posse; unde signorum ratio innotescit, qualem supra exhibuimus.**

Hisce pro periodis 16 terminorum valores sequentes numericos inveni:

$$\left.\begin{matrix}(16,1) &= & 9.22915\ 28841,\\ (16,15) &= & 2.63130\ 27492,\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(16,23) &= -1.83466\ 99500,\\ (16,88) &= -0.77971\ 17120,\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(16,100) &= -0.82103\ 83846,\\ (16,42) &= -3.17521\ 71835,\end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases}(16,13) = -0.10935\ 94182,\\ (16,62) = \ \ 2.37515\ 07862,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(16,10) = \ \ 2.68668\ 72054,\\ (16,107) = -6.40006\ 94978,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(16,27) = -2.95597\ 86107,\\ (16,109) = -3.43043\ 87138,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(16,28) = \ \ 3.27079\ 15007,\\ (16,94) = -1.94937\ 22085,\end{cases}$$

$$\begin{cases}(16,127) = \ \ 4.89048\ 49571,\\ (16,106) = -4.62771\ 44034.\end{cases}$$

Exponentium tabula pro 32 periodis 8 terminorum.

c_1 $\begin{cases}(8,1) = 1, 4, 16, 64.\\ (8,32) = 2, 8, 32, 128.\end{cases}$

c_2 $\begin{cases}(8,15) = 15, 17, 60, 68.\\ (8,34) = 30, 34, 120, 121.\end{cases}$

c_3 $\begin{cases}(8,23) = 23, 70, 92, 111.\\ (8,35) = 35, 46, 73, 117.\end{cases}$

c_4 $\begin{cases}(8,88) = 22, 88, 95, 123.\\ (8,11) = 11, 44, 67, 81.\end{cases}$

c_5 $\begin{cases}(8,100) = 25, 58, 100, 114.\\ (8,116) = 29, 50, 57, 116.\end{cases}$

c_6 $\begin{cases}(8,42) = 42, 89, 99, 118.\\ (8,59) = 21, 59, 79, 84.\end{cases}$

c_7 $\begin{cases}(8,13) = 13, 49, 52, 61.\\ (8,98) = 26, 98, 104, 122.\end{cases}$

c_8 $\begin{cases}(8,62) = 9, 36, 62, 113.\\ (8,72) = 18, 31, 72, 124.\end{cases}$

c_9 $\begin{cases}(8,10) = 10, 40, 97, 126.\\ (8,63) = 5, 20, 63, 80.\end{cases}$

c_{10} $\begin{cases}(8,107) = 86, 87, 91, 107.\\ (8,83) = 43, 75, 83, 85.\end{cases}$

c_{11} $\begin{cases}(8,27) = 27, 71, 82, 108.\\ (8,93) = 41, 54, 93, 115.\end{cases}$

c_{12} $\begin{cases}(8,109) = 37, 55, 78, 109,\\ (8,110) = 39, 74, 101, 110.\end{cases}$

c_{13} $\begin{cases}(8,28) = 7, 28, 66, 112.\\ (8,125) = 14, 33, 56, 125.\end{cases}$

c_{14} $\begin{cases}(8,94) = 38, 94, 105, 119.\\ (8,76) = 19, 47, 69, 76.\end{cases}$

c_{15} $\begin{cases}(8,127) = 6, 24, 96, 127.\\ (8,48) = 3, 12, 48, 65.\end{cases}$

c_{16} $\begin{cases}(8,106) = 90, 102, 103, 106.\\ (8,51) = 45, 51, 53, 77.\end{cases}$

Aequationes quadraticae, quarum auxilio valores numerici pro 32 periodis inveniuntur, sunt sequentes 16:

$$x^2-(16,1)x+(16,1)+(16,62)+(16,28)+(16,127)=0,$$
$$x^2-(16,15)x+(16,15)+(16,13)+(16,94)+(16,106)=0,$$
$$x^2-(16,23)x+(16,23)+(16,100)+(16,94)+(16,127)=0,$$
$$x^2-(16,88)x+(16,88)+(16,42)+(16,28)+(16,106)=0,$$
$$x^2-(16,100)x+(16,1)+(16,100)+(16,107)+(16,27)=0,$$

$$x^2-(16,42)x+(16,15)+(16,42)+(16,10)+(16,109)=0,$$
$$x^2-(16,13)x+(16,23)+(16,13)+(16,107)+(16,109)=0,$$
$$x^2-(16,62)x+(16,88)+(16,62)+(16,10)+(16,27)=0,$$
$$x^2-(16,10)x+(16,15)+(16,23)+(16,10)+(16,106)=0,$$
$$x^2-(16,107)x+(16,1)+(16,88)+(16,107)+(16,127)=0,$$
$$x^2-(16,27)x+(16,15)+(16,88)+(16,27)+(16,28)=0,$$
$$x^2-(16,109)x+(16,1)+(16,23)+(16,109)+(16,94)=0,$$
$$x^2-(16,28)x+(16,42)+(16,13)+(16,10)+(16,28)=0,$$
$$x^2-(16,94)x+(16,100)+(16,62)+(16,107)+(16,94)=0,$$
$$x^2-(16,127)x+(16,42)+(16,62)+(16,27)+(16,127)=0,$$
$$x^2-(16,106)x+(16,100)+(16,13)+(16,109)+(16,106)=0.$$

Ipsae radices dantur per formulas:

1. $x=\frac{1}{2}\{(16,1)\pm\sqrt{[16-(16,1)-2(16,62)+2(16,15)+2(16,10)-2(16,28)]}\}$,
2. $x=\frac{1}{2}\{(16,15)\pm\sqrt{[16-(16,15)-2(16,13)+2(16,1)+2(16,107)-2(16,94)]}\}$,
3. $x=\frac{1}{2}\{(16,23)\pm\sqrt{[16-(16,23)-2(16,100)+2(16,88)+2(16,27)-2(16,127)]}\}$,
4. $x=\frac{1}{2}\{(16,88)\pm\sqrt{[16-(16,88)-2(16,42)+2(16,23)+2(16,109)-2(16,106)]}\}$,
5. $x=\frac{1}{2}\{(16,100)\pm\sqrt{[16-(16,100)-2(16,1)+2(16,42)+2(16,28)-2(16,27)]}\}$,
6. $x=\frac{1}{2}\{(16,42)\pm\sqrt{[16-(16,42)-2(16,15)+2(16,100)+2(16,94)-2(16,109)]}\}$,
7. $x=\frac{1}{2}\{(16,13)\pm\sqrt{[16-(16,13)-2(16,23)+2(16,62)+2(16,127)-2(16,107)]}\}$,
8. $x=\frac{1}{2}\{(16,62)\pm\sqrt{[16-(16,62)-2(16,88)+2(16,13)+2(16,106)-2(16,10)]}\}$,
9. $x=\frac{1}{2}\{(16,10)\pm\sqrt{[16-(16,10)-2(16,106)+2(16,107)+2(16,100)-2(16,23)]}\}$,
10. $x=\frac{1}{2}\{(16,107)\pm\sqrt{[16-(16,107)-2(16,127)+2(16,10)+2(16,42)-2(16,88)]}\}$,
11. $x=\frac{1}{2}\{(16,27)\pm\sqrt{[16-(16,27)-2(16,28)+2(16,109)+2(16,13)-2(16,15)]}\}$,
12. $x=\frac{1}{2}\{(16,109)\pm\sqrt{[16-(16,109)-2(16,94)+2(16,27)+2(16,62)-2(16,1)]}\}$,
13. $x=\frac{1}{2}\{(16,28)\pm\sqrt{[16-(16,28)-2(16,10)+2(16,94)+2(16,23)-2(16,13)]}\}$,
14. $x=\frac{1}{2}\{(16,94)\pm\sqrt{[16-(16,94)-2(16,107)+2(16,28)+2(16,88)-2(16,62)]}\}$,
15. $x=\frac{1}{2}\{(16,127)\pm\sqrt{[16-(16,127)-2(16,27)+2(16,106)+2(16,15)-2(16,42)]}\}$,
16. $x=\frac{1}{2}\{(16,106)\pm\sqrt{[16-(16,106)-2(16,109)+2(16,127)+2(16,1)-2(16,100)]}\}$.

Si $d_1, d_2, \ldots d_{16}$ **differentias** $(8,1)-8,32)$, $(8,15)-(8,34)$, **etc. vocamus, et summas respective** $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{16}$, **aequationes sequentes locum habent:**

$$c_1d_1=-d_1+2d_2-2d_9-2d_{15}, \qquad c_5d_5=-d_5+2d_6-2d_{13}-2d_{10},$$
$$c_2d_2=-d_2-2d_1-2d_{10}-2d_{16}, \qquad c_6d_6=-d_6-2d_5-2d_{14}+2d_9,$$
$$c_3d_3=-d_3+2d_4-2d_{11}-2d_{14}, \qquad c_7d_7=-d_7+2d_8-2d_{15}-2d_{12},$$
$$c_4d_4=-d_4-2d_3-2d_{12}+2d_{13}, \qquad c_8d_8=-d_8-2d_7-2d_{16}+2d_{11},$$

$c_9 d_9 = -d_9 + 2d_{10} - 2d_5 - 2d_2$, $c_{13} d_{13} = -d_{13} + 2d_{14} - 2d_3 - 2d_6$,
$c_{10} d_{10} = -d_{10} - 2d_9 - 2d_6 + 2d_1$, $c_{14} d_{14} = -d_{14} - 2d_{13} - 2d_4 + 2d_5$,
$c_{11} d_{11} = -d_{11} + 2d_{12} - 2d_7 - 2d_4$, $c_{15} d_{15} = -d_{15} + 2d_{16} - 2d_2 - 2d_8$,
$c_{12} d_{12} = -d_{12} - 2d_{11} - 2d_8 + 2d_3$, $c_{16} d_{16} = -d_{16} - 2d_{15} + 2d_1 + 2d_7$.

Quantitatem d_1 statuam, quomodo ex aequatione prima quadratica recta via prodit, puta

$$d_1 = +\sqrt{[16-(16,1)-2(16,62)+2(16,15)+2(16,10)-2(16,28)]};$$

tunc ceterae quantitates d aequationibus linearibus appositis computari possunt.

Valores numericos accipio:

$(8,1) = 5.85099\ 69258.$ $(8,10) = -0.37391\ 18920.$
$(8,32) = 3.37815\ 59582.$ $(8,63) = 3.06059\ 90974.$

$(8,15) = 3.72107\ 89497.$ $(8,107) = -5.01672\ 56314.$
$(8,34) = -1.08977\ 62005.$ $(8,83) = -1.38334\ 38663.$

$(8,23) = -1.66305\ 54587.$ $(8,27) = -1.34364\ 47419.$
$(8,35) = -0.17161\ 44912.$ $(8,93) = -1.61233\ 38687.$

$(8,88) = -2.72734\ 15542.$ $(8,109) = -0.75225\ 23645.$
$(8,11) = 1.94762\ 98422.$ $(8,110) = -2.67818\ 63492.$

$(8,100) = -1.46714\ 57195.$ $(8,28) = 1.59518\ 19225.$
$(8,116) = 0.64610\ 73349.$ $(8,125) = 1.67560\ 95781.$

$(8,42) = -3.53906\ 11229.$ $(8,94) = -3.75773\ 16127.$
$(8,59) = 0.36384\ 39394.$ $(8,76) = 1.80835\ 94042.$

$(8,13) = 3.37716\ 05334.$ $(8,127) = 0.24415\ 84659.$
$(8,98) = -3.48651\ 99516.$ $(8,48) = 4.64632\ 64912.$

$(8,62) = 1.47772\ 64674.$ $(8,106) = -6.10100\ 46864.$
$(8,72) = 0.89742\ 43187.$ $(8,51) = 1.47329\ 02829.$

Exponentes pro 64 periodis 4 terminorum tabula sequens continet.

a_1 $(4,1) = 1, 16,$ $(4,4) = 4, 64,$
a_2 $(4,32) = 2, 32,$ $(4,128) = 8, 128,$
a_3 $(4,15) = 15, 17,$ $(4,60) = 60, 68,$
a_4 $(4,34) = 30, 34,$ $(4,121) = 120, 121,$
a_5 $(4,23) = 23, 111,$ $(4,92) = 70, 92,$
a_6 $(4,35) = 35, 46,$ $(4,117) = 73, 117,$
a_7 $(4,88) = 88, 123,$ $(4,95) = 22, 95,$
a_8 $(4,11) = 11, 81,$ $(4,44) = 44, 67,$

$$\alpha_9 \begin{cases}(4,100) = 58, 100,\\ (4,114) = 25, 114,\end{cases} \qquad \alpha_{21} \begin{cases}(4,27) = 27, 82,\\ (4,108) = 71, 108,\end{cases}$$

$$\alpha_{10} \begin{cases}(4,116) = 57, 116,\\ (4,50) = 29, 50,\end{cases} \qquad \alpha_{22} \begin{cases}(4,93) = 54, 93,\\ (4,115) = 41, 115,\end{cases}$$

$$\alpha_{11} \begin{cases}(4,42) = 42, 99,\\ (4,89) = 89, 118,\end{cases} \qquad \alpha_{23} \begin{cases}(4,109) = 55, 109,\\ (4,78) = 37, 78,\end{cases}$$

$$\alpha_{12} \begin{cases}(4,59) = 59, 84,\\ (4,21) = 21, 79,\end{cases} \qquad \alpha_{24} \begin{cases}(4,110) = 39, 110,\\ (4,74) = 74, 101,\end{cases}$$

$$\alpha_{13} \begin{cases}(4,13) = 13, 49,\\ (4,52) = 52, 61,\end{cases} \qquad \alpha_{25} \begin{cases}(4,28) = 28, 66,\\ (4,112) = 7, 112,\end{cases}$$

$$\alpha_{14} \begin{cases}(4,98) = 26, 98,\\ (4,122) = 104, 122,\end{cases} \qquad \alpha_{26} \begin{cases}(4,125) = 56, 125,\\ (4,14) = 14, 33,\end{cases}$$

$$\alpha_{15} \begin{cases}(4,62) = 36, 62,\\ (4,9) = 9, 113,\end{cases} \qquad \alpha_{27} \begin{cases}(4,94) = 38, 94,\\ (4,119) = 105, 119,\end{cases}$$

$$\alpha_{16} \begin{cases}(4,72) = 72, 124,\\ (4,31) = 18, 31,\end{cases} \qquad \alpha_{28} \begin{cases}(4,76) = 69, 76,\\ (4,47) = 19, 47,\end{cases}$$

$$\alpha_{17} \begin{cases}(4,10) = 10, 97,\\ (4,40) = 40, 126,\end{cases} \qquad \alpha_{29} \begin{cases}(4,127) = 24, 127,\\ (4,6) = 6, 96,\end{cases}$$

$$\alpha_{18} \begin{cases}(4,63) = 20, 63,\\ (4,5) = 5, 80,\end{cases} \qquad \alpha_{30} \begin{cases}(4,48) = 3, 48,\\ (4,65) = 12, 65,\end{cases}$$

$$\alpha_{19} \begin{cases}(4,107) = 87, 107,\\ (4,86) = 86, 91,\end{cases} \qquad \alpha_{31} \begin{cases}(4,106) = 103, 106.\\ (4,90) = 90, 102,\end{cases}$$

$$\alpha_{20} \begin{cases}(4,83) = 43, 83,\\ (4,75) = 75, 85,\end{cases} \qquad \alpha_{32} \begin{cases}(4,51) = 45, 51,\\ (4,53) = 53, 77.\end{cases}$$

Valoribus numericis periodorum computandis inserviunt aequationes 32 quadraticae, quarum radices formam sequentem accipiunt:

1. $x = \frac{1}{2}\{(8,1) \pm \sqrt{[8+(8,32)-2(8,63)-2(8,48)+2(8,15)]}\}$,

2. $x = \frac{1}{2}\{(8,32) \pm \sqrt{[8+(8,1)-2(8,10)-2(8,127)+2(8,34)]}\}$,

3. $x = \frac{1}{2}\{(8,15) \pm \sqrt{[8+(8,34)-2(8,83)-2(8,51)+2(8,32)]}\}$,

4. $x = \frac{1}{2}\{(8,34) \pm \sqrt{[8+(8,15)-2(8,107)-2(8,106)+2(8,1)]}\}$,

5. $x = \frac{1}{2}\{(8,23) \pm \sqrt{[8+(8,35)-2(8,93)-2(8,76)+2(8,88)]}\}$,

6. $x = \frac{1}{2}\{(8,35) \pm \sqrt{[8+(8,23)-2(8,27)-2(8,94)+2(8,11)]}\}$,

7. $x = \frac{1}{2}\{(8,88) \pm \sqrt{[8+(8,11)-2(8,110)-2(8,28)+2(8,35)]}\}$,

8. $x = \frac{1}{2}\{(8,11) \pm \sqrt{[8+(8,88)-2(8,109)-2(8,125)+2(8,23)]}\}$,

9. $x = \frac{1}{2}\{(8,100) \pm \sqrt{[8+(8,116)-2(8,125)-2(8,83)+2(8,42)]}\}$,
10. $x = \frac{1}{2}\{(8,116) \pm \sqrt{[8+(8,100)-2(8,28)-2(8,107)+2(8,59)]}\}$,
11. $x = \frac{1}{2}\{(8,42) \pm \sqrt{[8+(8,59)-2(8,76)-2(8,10)+2(8,116)]}\}$,
12. $x = \frac{1}{2}\{(8,59) \pm \sqrt{[8+(8,42)-2(8,94)-2(8,63)+2(8,100)]}\}$,
13. $x = \frac{1}{2}\{(8,13) \pm \sqrt{[8+(8,98)-2(8,48)-2(8,110)+2(8,62)]}\}$,
14. $x = \frac{1}{2}\{(8,98) \pm \sqrt{[8+(8,13)-2(8,127)-2(8,109)+2(8,72)]}\}$,
15. $x = \frac{1}{2}\{(8,62) \pm \sqrt{[8+(8,72)-2(8,51)-2(8,27)+2(8,98)]}\}$,
16. $x = \frac{1}{2}\{(8,72) \pm \sqrt{[8+(8,62)-2(8,106)-2(8,93)+2(8,13)]}\}$,
17. $x = \frac{1}{2}\{(8,10) \pm \sqrt{[8+(8,63)-2(8,116)-2(8,34)+2(8,107)]}\}$,
18. $x = \frac{1}{2}\{(8,63) \pm \sqrt{[8+(8,10)-2(8,100)-2(8,15)+2(8,83)]}\}$,
19. $x = \frac{1}{2}\{(8,107) \pm \sqrt{[8+(8,83)-2(8,59)-2(8,1)+2(8,63)]}\}$,
20. $x = \frac{1}{2}\{(8,83) \pm \sqrt{[8+(8,107)-2(8,42)-2(8,32)+2(8,10)]}\}$,
21. $x = \frac{1}{2}\{(8,27) \pm \sqrt{[8+(8,93)-2(8,98)-2(8,11)+2(8,109)]}\}$,
22. $x = \frac{1}{2}\{(8,93) \pm \sqrt{[8+(8,27)-2(8,13)-2(8,88)+2(8,110)]}\}$,
23. $x = \frac{1}{2}\{(8,109) \pm \sqrt{[8+(8,110)-2(8,72)-2(8,23)+2(8,93)]}\}$,
24. $x = \frac{1}{2}\{(8,110) \pm \sqrt{[8+(8,109)-2(8,62)-2(8,35)+2(8,27)]}\}$,
25. $x = \frac{1}{2}\{(8,28) \pm \sqrt{[8+(8,125)-2(8,35)-2(8,59)+2(8,94)]}\}$,
26. $x = \frac{1}{2}\{(8,125) \pm \sqrt{[8+(8,28)-2(8,23)-2(8,42)+2(8,76)]}\}$,
27. $x = \frac{1}{2}\{(8,94) \pm \sqrt{[8+(8,76)-2(8,11)-2(8,100)+2(8,125)]}\}$,
28. $x = \frac{1}{2}\{(8,76) \pm \sqrt{[8+(8,94)-2(8,88)-2(8,116)+2(8,28)]}\}$,
29. $x = \frac{1}{2}\{(8,127) \pm \sqrt{[8+(8,48)-2(8,34)-2(8,72)+2(8,106)]}\}$,
30. $x = \frac{1}{2}\{(8,48) \pm \sqrt{[8+(8,127)-2(8,15)-2(8,62)+2(8,51)]}\}$,
31. $x = \frac{1}{2}\{(8,106) \pm \sqrt{[8+(8,51)-2(8,1)-2(8,13)+2(8,48)]}\}$,
32. $x = \frac{1}{2}\{(8,51) \pm \sqrt{[8+(8,106)-2(8,32)-2(8,98)+2(8,127)]}\}$.

Si differentiae $(4,1)-(4,4)$; $(4,32)-(4,128)$; etc. per $\beta_1, \beta_2, \ldots \ldots \beta_{32}$ designantur, et summae per $\alpha_1, \alpha_1, \ldots . \alpha_{32}$, hic inter quantitates β relationes sequentes exstant:

$$\alpha_1\beta_1 = \beta_2 + 2\beta_3, \qquad \alpha_9\beta_9 = \beta_{10} + 2\beta_{11},$$
$$\alpha_2\beta_2 = -\beta_1 + 2\beta_4, \qquad \alpha_{10}\beta_{10} = -\beta_9 + 2\beta_{12},$$
$$\alpha_3\beta_3 = \beta_4 + 2\beta_2, \qquad \alpha_{11}\beta_{11} = \beta_{12} + 2\beta_{10},$$
$$\alpha_4\beta_4 = -\beta_3 + 2\beta_1, \qquad \alpha_{12}\beta_{12} = -\beta_{11} - 2\beta_9,$$

$$\alpha_5\beta_5 = \beta_6 + 2\beta_7, \qquad \alpha_{13}\beta_{13} = \beta_{14} + 2\beta_{15},$$
$$\alpha_6\beta_6 = -\beta_5 + 2\beta_8, \qquad \alpha_{14}\beta_{14} = -\beta_{13} + 2\beta_{16},$$
$$\alpha_7\beta_7 = \beta_8 + 2\beta_6, \qquad \alpha_{15}\beta_{15} = \beta_{16} + 2\beta_{14},$$
$$\alpha_8\beta_8 = -\beta_7 + 2\beta_5, \qquad \alpha_{16}\beta_{16} = -\beta_{15} + 2\beta_{13},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{17}\beta_{17} &= \beta_{18}+2\beta_{19}, & \alpha_{25}\beta_{25} &= \beta_{26}+2\beta_{27},\\
\alpha_{18}\beta_{18} &= -\beta_{17}+2\beta_{20}, & \alpha_{26}\beta_{26} &= -\beta_{25}+2\beta_{28},\\
\alpha_{19}\beta_{19} &= \beta_{20}+2\beta_{18}, & \alpha_{27}\beta_{27} &= \beta_{28}+2\beta_{26},\\
\alpha_{20}\beta_{20} &= -\beta_{19}-2\beta_{17}, & \alpha_{28}\beta_{28} &= -\beta_{27}-2\beta_{25},\\
\hline
\alpha_{21}\beta_{21} &= \beta_{22}+2\beta_{23}, & \alpha_{29}\beta_{29} &= \beta_{30}+2\beta_{31},\\
\alpha_{22}\beta_{22} &= -\beta_{21}+2\beta_{24}, & \alpha_{30}\beta_{30} &= -\beta_{29}+2\beta_{32},\\
\alpha_{23}\beta_{23} &= \beta_{24}+2\beta_{22}, & \alpha_{31}\beta_{31} &= \beta_{32}+2\beta_{30},\\
\alpha_{24}\beta_{24} &= -\beta_{23}-2\beta_{21}, & \alpha_{32}\beta_{32} &= -\beta_{31}-2\beta_{29}.
\end{aligned}$$

Si quis ex his aequationibus quantitates β computare vellet, octo earum necessario indeterminatae manerent. Signa saltem quantitatum β his aequationibus inveni.

Qua de re producta insuper septem $\beta_1.\beta_5$; $\beta_5.\beta_9$; etc. investigavi:

$$\begin{aligned}
\beta_1.\beta_5 &= (8,88)+(8,127)+(8,110)+(8,28)-(8,76)-(8,107)-(16,27),\\
\beta_5.\beta_9 &= (8,35)+(16,88)+(8,51)-(8,48)-(8,32)-(8,34)-(8,107),\\
\beta_9.\beta_{13} &= (8,51)+(8,27)+(8,107)+(8,62)-(8,94)-(8,110)-(16,127),\\
\beta_{13}.\beta_{17} &= (8,48)+(8,23)+(8,110)+(8,59)-(8,42)-(8,62)-(8,51)-(8,27),\\
\beta_{17}.\beta_{21} &= (8,15)+(8,109)+(8,72)+(8,23)-(8,11)-(8,42)-(16,13),\\
\beta_{21}.\beta_{25} &= (8,1)+(16,109)+(8,93)-(8,83)-(8,42)-(8,63)-(8,34),\\
\beta_{25}.\beta_{29} &= (8,1)+(8,13)+(8,42)+(8,106)-(8,88)-(8,72)-(16,15),
\end{aligned}$$

Unde jam, unius differentiae β, signo ex arbitrio accepto, reliquae determinatae sunt.

Sunt autem valores numerici pro 64 periodis 4 terminorum:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (4,1) = 3.84832\ 87128, & \gamma_{14} &= (4,95) = 0.35173\ 07561,\\
\gamma_2 &= (4,4) = 2.00266\ 82129, & \gamma_{15} &= (4,11) = 1.13179\ 67585,\\
\gamma_3 &= (4,32) = 3.41613\ 84271, & \gamma_{16} &= (4,44) = 0.81583\ 30836,\\
\gamma_4 &= (4,128) = -0.03798\ 24689, & \gamma_{17} &= (4,100) = -1.22941\ 90217,\\
\gamma_5 &= (4,15) = 3.69674\ 77128, & \gamma_{18} &= (4,114) = -0.23772\ 66977,\\
\gamma_6 &= (4,60) = 0.02433\ 12368, & \gamma_{19} &= (4,116) = -1.55468\ 63023,\\
\gamma_7 &= (4,34) = 2.83366\ 68353, & \gamma_{20} &= (4,50) = 2.20079\ 36372,\\
\gamma_8 &= (4,121) = -3.92344\ 30358, & \gamma_{21} &= (4,42) = -0.46692\ 12969,\\
\gamma_9 &= (4,23) = -0.12767\ 20348, & \gamma_{22} &= (4,89) = -3.07213\ 98260,\\
\gamma_{10} &= (4,92) = -1.53538\ 34238, & \gamma_{23} &= (4,59) = -0.67261\ 18898,\\
\gamma_{11} &= (4,35) = 2.17444\ 47739, & \gamma_{24} &= (4,21) = 1.03645\ 58297,\\
\gamma_{12} &= (4,117) = -2.34605\ 92651, & \gamma_{25} &= (4,13) = 2.62834\ 78841,\\
\gamma_{13} &= (4,88) = -3.07907\ 23103, & \gamma_{26} &= (4,52) = 0.74881\ 26493,
\end{aligned}$$

$\gamma_{27} = (4,98) = 0.14010\ 11796$, $\gamma_{46} = (4,78) = 0.57629\ 28685$,
$\gamma_{28} = (4,122) = -3.62662\ 11312$, $\gamma_{47} = (4,110) = -0.64119\ 73730$,
$\gamma_{29} = (4,62) = 1.38405\ 57114$, $\gamma_{48} = (4,74) = -2.03698\ 89761$,
$\gamma_{30} = (4,9) = 0.09367\ 07559$, $\gamma_{49} = (4,28) = 1.46386\ 55773$,
$\gamma_{31} = (4,72) = -2.36459\ 21542$, $\gamma_{50} = (4,112) = 0.13131\ 63451$,
$\gamma_{32} = (4,31) = 3.26201\ 64729$, $\gamma_{51} = (4,125) = -1.59066\ 69067$,
$\gamma_{33} = (4,10) = 0.50486\ 87365$, $\gamma_{52} = (4,14) = 3.26627\ 64848$,
$\gamma_{34} = (4,40) = -0.87878\ 06285$, $\gamma_{53} = (4,94) = -0.13254\ 03559$,
$\gamma_{35} = (4,63) = 1.82675\ 10266$, $\gamma_{54} = (4,119) = -3.62519\ 12567$,
$\gamma_{36} = (4,5) = 1.23384\ 80708$, $\gamma_{55} = (4,76) = -0.79839\ 92733$,
$\gamma_{37} = (4,107) = -2.78592\ 92933$, $\gamma_{56} = (4,47) = 2.60675\ 86775$,
$\gamma_{38} = (4,86) = -2.23079\ 63380$, $\gamma_{57} = (4,127) = -0.33317\ 36863$,
$\gamma_{39} = (4,83) = 0.10789\ 99701$, $\gamma_{58} = (4,6) = 0.57733\ 21522$,
$\gamma_{40} = (4,75) = -1.49124\ 38364$, $\gamma_{59} = (4,48) = 2.76845\ 19714$,
$\gamma_{41} = (4,27) = 0.73893\ 46617$, $\gamma_{60} = (4,65) = 1.87787\ 45197$,
$\gamma_{42} = (4,108) = -2.08257\ 94036$, $\gamma_{61} = (4,106) = -3.32872\ 36341$,
$\gamma_{43} = (4,93) = -0.79688\ 52144$, $\gamma_{62} = (4,90) = -2.77228\ 10523$,
$\gamma_{44} = (4,115) = -0.81544\ 86542$, $\gamma_{63} = (4,51) = 1.54349\ 70845$,
$\gamma_{45} = (4,109) = -1.32854\ 52330$, $\gamma_{64} = (4,53) = -0.07020\ 68016$.

Aequationum systema sequens, si n valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 accipit, 128 expressiones pro periodis 2 terminorum dat:

1. $x = \frac{1}{2}\{\gamma_{(1+8n)} \pm \sqrt{[4-2\gamma_{(5+8n)}+\gamma_{(3+8n)}]}\}$,
2. $x = \frac{1}{2}\{\gamma_{(2+8n)} \pm \sqrt{[4-2\gamma_{(6+8n)}+\gamma_{(4+8n)}]}\}$,
3. $x = \frac{1}{2}\{\gamma_{(3+8n)} \pm \sqrt{[4-2\gamma_{(7+8n)}+\gamma_{(2+8n)}]}\}$,
4. $x = \frac{1}{2}\{\gamma_{(4+8n)} \pm \sqrt{[4-2\gamma_{(8+8n)}+\gamma_{(1+8n)}]}\}$,
5. $x = \frac{1}{2}\{\gamma_{(5+8n)} \pm \sqrt{[4-2\gamma_{(3+8n)}+\gamma_{(7+8n)}]}\}$,
6. $x = \frac{1}{2}\{\gamma_{(6+8n)} \pm \sqrt{[4-2\gamma_{(4+8n)}+\gamma_{(8+8n)}]}\}$,
7. $x = \frac{1}{2}\{\gamma_{(7+8n)} \pm \sqrt{[4-2\gamma_{(2+8n)}+\gamma_{(6+8n)}]}\}$,
8. $x = \frac{1}{2}\{\gamma_{(8+8n)} \pm \sqrt{[4-2\gamma_{(1+8n)}+\gamma_{(5+8n)}]}\}$,

et pro differentiis δ_1, δ_2, etc. puta $(2,1)-(2,16)$; $(2,4)-(2,64)$; etc. relationes exstant:

$$\gamma_{(1+4n)} \cdot \delta_{(1+4n)} = -\delta_{(3+4n)},$$
$$\gamma_{(2+4n)} \cdot \delta_{(2+4n)} = -\delta_{(4+4n)},$$
$$\gamma_{(3+4n)} \cdot \delta_{(3+4n)} = -\delta_{(2+4n)},$$
$$\gamma_{(4+4n)} \cdot \delta_{(4+4n)} = +\delta_{(1+4n)},$$

ubi pro n quantitates 0, 1, 2, ... 15 sunt substituendae. Ut ipsae differentiae δ inveniantur praeterea signis quindecim productorum sequentium opus est:

$$\delta_1.\delta_5 = (4,14) - (4,31), \qquad \delta_{29}.\delta_{33} = (4,52) + (4,72) - (4,98) - (4,35),$$
$$\delta_5.\delta_9 = (4,94) + (4,128) - (4,6) - (4,40), \qquad \delta_{33}.\delta_{37} = (4,117) - (4,53),$$
$$\delta_9.\delta_{13} = (4,65) - (4,100), \qquad \delta_{37}.\delta_{41} = (4,5) + (4,88) - (4,60) - (4,114),$$
$$\delta_{13}.\delta_{17} = (4,65) + (4,76) - (4,23) - (4,34), \qquad \delta_{41}.\delta_{45} = (4,121) - (4,28),$$
$$\delta_{17}.\delta_{21} = (4,115) - (4,1), \qquad \delta_{45}.\delta_{49} = (4,11) + (4,121) - (4,27) - (4,83),$$
$$\delta_{21}.\delta_{25} = (4,50) + (4,109) - (4,112) - (4,86), \qquad \delta_{49}\,\delta_{53} = (4,122) - (4,10),$$
$$\delta_{25}.\delta_{29} = (4,75) - (4,23), \qquad \delta_{53}.\delta_{57} = (4,14) + (4,62) - (4,92) - (4,89),$$
$$\delta_{57}.\delta_{61} = (4,21) - (4,27).$$

Unde valores numerici inveniuntur:

$$\delta_1.\delta_5 = 0{,}00426\ 00119,$$
$$\delta_{33}.\delta_{37} = -2{,}27585\ 24635,$$
$$\delta_5.\delta_9 = 0{,}13092\ 56515,$$
$$\delta_{37}.\delta_{41} = -1{,}63182\ 87786,$$
$$\delta_9.\delta_{13} = 3{,}10729\ 35414,$$
$$\delta_{41}.\delta_{45} = -5{,}38730\ 86131,$$
$$\delta_{13}.\delta_{17} = -1{,}62651\ 95541,$$
$$\delta_{45}.\delta_{49} = -3{,}63848\ 09091,$$
$$\delta_{17}.\delta_{21} = -4{,}66377\ 73670,$$
$$\delta_{49}.\delta_{53} = -4{,}13148\ 98677,$$
$$\delta_{21}.\delta_{25} = 2{,}97172\ 83971,$$
$$\delta_{53}.\delta_{57} = 9{,}25785\ 54460,$$
$$\delta_{25}.\delta_{29} = -1{,}36357\ 18016,$$
$$\delta_{57}.\delta_{61} = 0{,}29752\ 11680.$$
$$\delta_{29}.\delta_{33} = -3{,}93032\ 54584,$$

Quarum relationum auxilio ad valores pro 128 periodis 2 terminorum pervenimus, et quaelibet periodus $(2, k)$ cum quantitate $2.\cos\frac{2k\pi}{257}$ coincidit.

$2.\cos\frac{2\pi}{257}=(2,1)=1.99940\ 23145$	$(2,100)=-1.53383\ 35900$	$(2,10)=1.94052\ 57174$	$(2,28)=1.54961\ 45429$
$(2,16)=1.84892\ 63982$	$(2,58)=0.30441\ 45683$	$(2,97)=-1.43565\ 69809$	$(2,66)=-0.08574\ 89656$
$(2,4)=1.99044\ 41935$	$(2,114)=-1.87564\ 11726$	$(2,40)=1.11748\ 48209$	$(2,112)=-1.83937\ 85067$
$(2,64)=0.01222\ 40194$	$(2,25)=1.63791\ 44749$	$(2,126)=-1.99626\ 54494$	$(2,7)=1.97069\ 48518$
$(2,32)=1.41852\ 88268$	$(2,116)=-1.90733\ 17663$	$(2,63)=0.06111\ 09664$	$(2,125)=-1.99200\ 74786$
$(2,2)=1.99760\ 96002$	$(2,57)=0.35264\ 54640$	$(2,20)=1.76564\ 00601$	$(2,56)=0.40134\ 05719$
$(2,128)=-1.99985\ 05671$	$(2,50)=0.68276\ 38099$	$(2,5)=1.98507\ 57456$	$(2,14)=1.88331\ 22929$
$(2,8)=1.96186\ 80982$	$(2,29)=1.51802\ 98272$	$(2,80)=-0.75122\ 76748$	$(2,33)=1.38296\ 42418$
$(2,15)=1.86701\ 50815$	$(2,42)=1.03507\ 79511$	$(2,107)=-1.73000\ 98650$	$(2,94)=-1.32949\ 36874$
$(2,17)=1.82973\ 26313$	$(2,99)=-1.50199\ 92480$	$(2,87)=-1.05591\ 94283$	$(2,38)=1.19695\ 33315$
$(2,60)=0.20743\ 58811$	$(2,89)=-1.13767\ 67168$	$(2,86)=-1.01408\ 18056$	$(2,119)=-1.94879\ 92514$
$(2,68)=-0.18310\ 46443$	$(2,118)=-1.93446\ 31092$	$(2,91)=-1.21671\ 45324$	$(2,105)=-1.67639\ 20052$
$(2,34)=1.34792\ 25860$	$(2,59)=0.25600\ 17389$	$(2,83)=-0.88503\ 41627$	$(2,76)=-0.56666\ 31050$
$(2,30)=1.48574\ 42493$	$(2,84)=-0.92861\ 36287$	$(2,43)=0.99293\ 41328$	$(2,69)=-0.23173\ 61682$
$(2,121)=-1.96647\ 24941$	$(2,21)=1.74214\ 75145$	$(2,75)=-0.51960\ 57498$	$(2,47)=0.81868\ 13685$
$(2,120)=-1.95697\ 05417$	$(2,79)=-0.70569\ 16848$	$(2,85)=-0.97163\ 80866$	$(2,19)=1.78807\ 73089$
$(2,23)=1.69205\ 33152$	$(2,13)=1.89983\ 37743$	$(2,27)=1.57986\ 03715$	$(2,127)=-1.99865\ 52943$
$(2,111)=-1.81972\ 53500$	$(2,49)=0.72851\ 41097$	$(2,82)=-0.84092\ 57098$	$(2,24)=1.66548\ 16080$
$(2,92)=-1.25515\ 43316$	$(2,52)=0.59006\ 65649$	$(2,108)=-1.75402\ 48575$	$(2,6)=1.97852\ 08497$
$(2,70)=-0.28022\ 90921$	$(2,61)=0.15874\ 60844$	$(2,71)=-0.32855\ 45461$	$(2,93)=-1.40118\ 86975$
$(2,35)=1.31140\ 03626$	$(2,98)=-1.46926\ 71939$	$(2,93)=-1.29284\ 39911$	$(2,48)=0.77382\ 89872$
$(2,46)=0.86304\ 44113$	$(2,26)=1.60936\ 83735$	$(2,54)=0.49595\ 87767$	$(2,3)=1.99462\ 29842$
$(2,117)=-1.92147\ 16473$	$(2,122)=-1.97479\ 96814$	$(2,115)=-1.89205\ 18359$	$(2,65)=-0.03667\ 02325$
$(2,73)=-0.42458\ 76178$	$(2,104)=-1.65182\ 14497$	$(2,41)=1.07660\ 31817$	$(2,12)=1.91454\ 47522$
$(2,88)=-1.09712\ 59352$	$(2,62)=0.10996\ 13890$	$(2,109)=-1.77699\ 14776$	$(2,106)=-1.70496\ 08983$
$(2,123)=-1.98194\ 63750$	$(2,36)=1.27409\ 43223$	$(2,55)=0.44844\ 62446$	$(2,103)=-1.62376\ 27358$
$(2,95)=-1.36588\ 29488$	$(2,9)=1.95178\ 01760$	$(2,78)=-0.65973\ 38762$	$(2,90)=-1.17754\ 75260$
$(2,22)=1.71761\ 37049$	$(2,113)=-1.85810\ 94201$	$(2,37)=1.23602\ 67447$	$(2,102)=-1.59473\ 35263$
$(2,11)=1.92811\ 14319$	$(2,72)=-0.37668\ 36614$	$(2,110)=-1.79889\ 59904$	$(2,51)=0.63660\ 54299$
$(2,81)=-0.79631\ 46734$	$(2,124)=-1.98790\ 84927$	$(2,39)=1.15769\ 86174$	$(2,45)=0.90689\ 16546$
$(2,44)=0.95019\ 68566$	$(2,31)=1.45257\ 06121$	$(2,74)=-0.47223\ 78076$	$(2,53)=0.54317\ 50223$
$(2,67)=-0.13436\ 37730$	$(2,18)=1.80944\ 58608$	$(2,101)=-1.56475\ 11684$	$(2,77)=-0.61338\ 18239$

Unde etiam ipsae radices imaginariae aequationis $x^{257}=1$ facile constant.

19.

Analytisch-geometrische Aphorismen.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 15. im 3ten Hefte, No. 24. im 4ten Hefte X. Bandes, No, 3. im 1sten Heft und No. 9. im vorigen Hefte dieses Bandes.)

(Von dem Herrn Professor *Plücker* zu Berlin.)

V.

Über ein neues Übertragungs-Princip.

1. „Alle Sätze, welche auf eine beliebige Zusammenstellung von belie-„bigen Kreisen mit geraden Linien oder von geraden Linien unter sich „Bezug haben, und blofse Situations- und Winkel-Beziehungen enthal-„ten, lassen sich unmittelbar auf eine Zusammenstellung von beliebigen „Kreisen mit solchen Kreisen, die alle durch einen festen Punct gehen, „oder von letztbezeichneten Kreisen unter sich übertragen."

Ich werde hier, wo ich einzig und allein Constructionen der Elementar-Geometrie im Auge habe, nur diesen besondern Fall eines allgemeinen Übertragungs-Principes discutiren, und andeuten, wie er aus bekannten Sätzen und Constructionen neue finden lehrt. Die nachfolgenden analytischen Betrachtungen könnte man auch mit leichter Mühe durch rein geometrische ersetzen.

2. Man weifs, dafs, wenn ein Kreis gegeben ist, irgend zwei Puncte, welche beide auf derselben durch den Mittelpunct dieses Kreises gehenden geraden Linie liegen und die Eigenschaft haben, dafs einer derselben auf der Polaren des andern liegt, zugeordnete Pole in Beziehung auf den gegebenen Kreis genannt werden. Der geometrische Ort für die zugeordneten Pole aller Puncte, die auf dem Umfange irgend eines gegebenen Kreises liegen, ist ein neuer Kreis. Die Beziehung der beiden Kreise zu einander ist eine durchaus gegenseitige; ich nenne dieselben in dem Folgenden zugeordnete Kreise, und sage, der eine Kreis sei der Polar-Kreis des andern.

Wenn

$$1. \quad y^2 + x^2 = R^2$$

die Gleichung des gegebenen Kreises ist, so stellen, wie in der 181. Num-

mer des ersten Bandes meiner „Entwicklungen" gezeigt worden ist, die beiden Gleichungen:

$$2. \quad (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho^2,$$

$$3. \quad \left(y-\frac{R^2\beta}{\gamma}\right)^2+\left(x-\frac{R^2\alpha}{\gamma}\right)^2=\frac{R^4}{\gamma^2}\varrho^2,$$

irgend zwei zugeordnete Kreise dar, indem wir zugleich in der letzten Gleichung, der Kürze halber,

$$\beta^2+\alpha^2-\varrho^2=\gamma$$

setzen. Am angeführten Orte ist nachgewiesen worden, dafs die beiden zugeordneten Kreise (2.) und (3.) mit dem Kreise (1.) dieselbe gemeinschaftliche Chorde haben, und dafs der Mittelpunct des Kreises (1.) entweder der äufsere oder innere homologe Punct (Ähnlichkeitspunct) der beiden Kreise (2.) und (3.) ist, so dafs es im Allgemeinen zwei Kreise giebt, in Beziehung auf welche zwei gegebene Kreise zugeordnete sind.

Die Durchschnittspuncte irgend zweier Kreise sind offenbar die zugeordneten Pole der Durchschnittspuncte ihrer beiden Polar-Kreise. Wenn also mehrere Kreise durch denselben Punct gehen, so thun ihre Polar-Kreise ein Gleiches. Wenn zwei oder mehrere Kreise sich berühren, so berühren sich ebenfalls ihre Polar-Kreise. Wenn vier oder mehrere Puncte auf dem Umfange desselben Kreises liegen, so thun ihre zugeordneten Pole ein Gleiches. Wir sehen ferner, dafs wenn überhaupt irgend eine Construction vorliegt, die sich auf Kreise bezieht und von Gränzen-Bestimmungen unabhängig ist, wir sogleich eine entsprechende Construction in der Polar-Figur erhalten. Die nähere Discussion dieser Bemerkung giebt das in Rede stehende Princip.

3. Wenn $\gamma=0$ ist, so geht der Kreis (2.) durch den Anfangspunct der Coordinaten, und die Gleichung (3.) verwandelt sich alsdann in folgende:

$$2\beta y+2\alpha x=R^2,$$

und stellt folglich eine gerade Linie dar, nemlich die gemeinschaftliche Chorde der beiden Kreise (1.) und (2.).

Zu einem Kreise, der durch den Anfangspunct der Coordinaten, den Mittelpunct des Hülfs-Kreises, geht, gehört also als zugeordneter Ort eine gerade Linie, und umgekehrt, zu irgend einer gegebenen geraden Linie gehört als zugeordneter Ort ein solcher Kreis, der durch einen festen Punct, den Mittelpunct des Hülfs-Kreises, geht. Wenn die gegebene ge-

rade Linie ein Durchmesser des letztgenannten Kreises ist, so ist sie ihr eigner zugeordneter Ort.

Wir sehen hieraus sogleich, dafs jedem Satze über gerade Linien, der blofs Situations-Beziehungen enthält, ein zweiter entspricht, der sich unmittelbar aus dem ersten ergiebt, wenn man statt der geraden Linien solche Kreise nimmt, die durch irgend einen festen Punct gehen. Es ist zugleich ersichtlich, dafs der erste Satz sich zugleich auf gerade Linien und beliebige Kreise beziehen kann. Alsdann bezieht sich der zweite entsprechende Satz auf solche Kreise, welche alle durch einen festen Punct gehen und auf beliebige Kreise. Ich begnüge mich hier mit ein paar Beispielen.

I. Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, so gehen die drei gemeinschaftlichen Chorden je zweier dieser drei Kreise durch einen und denselben Punct.

II. Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, so schneiden sich diejenigen drei neuen Kreise, welche durch die beiden (reellen oder imaginären) Durchschnittspuncte je zweier der drei gegebenen, und überdiefs noch durch irgend einen gegebenen Punct gehen, aufserdem noch in einem zweiten festen Puncte.

I. Wenn man um einen gegebenen Kreis ein beliebiges Sechseck beschreibt, so schneiden sich die drei Diagonalen dieses Sechsecks in demselben Punct.

II. Wenn man durch einen festen Punct sechs solche Kreise legt, die einen gegebenen Kreis berühren, so kann man aus den Bogen derselben verschiedene Sechsecke bilden. Legt man durch jenen festen Punct und die dreimal zwei gegenüberliegenden Winkelpuncte eines solchen Sechsecks drei neue Kreise, so schneiden sich dieselben in einem und demselben zweiten festen Puncte.

Auf ähnliche Weise könnten wir den Satz vom eingeschriebenen Sechseck, Monge's Satz über die Durchschnittspuncte der gemeinschaftlichen Tangenten je zweier von drei gegebenen Kreisen, und unzählig viele andere Sätze verdoppeln.

4. Diejenigen beiden Kreise, welche zu irgend zwei gegebenen geraden Linien, als Polar-Kreise gehören und also durch den Mittelpunct

des Hülfs-Kreises gehen, berühren in diesem Puncte offenbar zwei solche gerade Linien, welche den beiden gegebenen parallel sind. Es schneiden sich die beiden Kreise also unter denselben Winkeln als die beiden gegebenen geraden Linien. Zwei Parallellinien entsprechen zwei sich im Mittelpuncte des Hülfs-Kreises berührende gerade Linien. Wir ziehen hieraus den Schlufs, dafs auch alle diejenigen Sätze, die auf Kreise und gerade Linien Bezug haben und Winkel-Beziehungen enthalten, sich übertragen lassen.

I. Die Summe der Innen-Winkel jedes geradlinigen Dreiecks beträgt zwei Rechte.

II. Wenn ein Dreieck aus den Bogen solcher drei Kreise, welche in demselben Puncte sich schneiden, gebildet wird, so beträgt die Summe der drei Winkel dieses Dreiecks zwei Rechte.

Wenn dieser zweite Satz zum unmittelbaren Beweise vorgelegt wäre, so würde man sogleich zum Ziele kommen, wenn man sich des geometrischen Beweises des ersten Satzes erinnerte. Dieser letzte Beweis beruht gewöhnlich darauf, dafs man durch einen Winkelpunct des gegebenen Dreiecks eine gerade Linie, der gegenüberliegenden Seite parallel zieht, und dann die Sätze über Wechsel- und Gegen-Winkel anwendet. Dort erhält man den Beweis ganz ähnlich, wenn man durch den aus den Bogen zweier Kreise gebildeten Winkelpunct einen neuen Kreis legt, der den dritten Kreis in dem festen Puncte berührt.

I. Alle Peripherie-Winkel, die auf demselben Bogen stehen, sind einander gleich.

II. Wenn ein fester Punct und ein Kreis gegeben sind, und man nimmt auf dem Umfange des Kreises zwei neue feste Puncte beliebig an, und beschreibt dann zwei neue Kreise, die sich in irgend einem dritten Puncte des Umfanges des gegebenen Kreises schneiden, und von denen jeder durch den gegebenen festen Punct und durch einen der beiden andern festen Puncte geht, so ist der Durchschnitts-Winkel solcher zwei Kreise ein constanter, wo auch der dritte Punct des Umfanges des gegebenen Kreises angenommen werden mag.

Ich könnte diese Beispiele noch beliebig vervielfältigen, begnüge mich aber, beiläufig nur noch zu erwähnen, wie das in Rede stehende

Übertragungs-Princip unmittelbar die Lösung der Aufgaben liefert: „In und um einen gegebenen Kreis ein solches n Eck zu beschreiben, dessen Seiten Bogen von Kreisen sind, die alle durch einen gegebenen Punct gehen und dessen Winkel einander gleich sind," wenn sich sonst nur in und um einen gegebenen Kreis ein regelmäfsiges Polygon von n Seiten beschreiben läfst.

5. Wenn wir irgend zwei concentrische Kreise durch die beiden Gleichungen:

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho^2,$$
$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho'^2$$

darstellen, so erhalten wir, indem wir der Kürze halber

$$\alpha^2+\beta^2-\varrho^2=\gamma, \quad \alpha^2+\beta^2-\varrho'^2=\gamma'$$

nennen, für ihre Polar-Kreise folgende Gleichungen:

$$\left(y-\frac{R^2\beta}{\gamma}\right)^2+\left(x-\frac{R^2\alpha}{\gamma}\right)^2=\frac{R^4}{\gamma^2}\varrho^2,$$
$$\left(y-\frac{R^2\beta}{\gamma'}\right)^2+\left(x-\frac{R^2\alpha}{\gamma'}\right)^2=\frac{R^4}{\gamma'^2}\varrho'^2,$$

und für die gemeinschaftliche Chorde dieser Kreise, indem wir abziehen und reduciren:

$$4. \quad 2\beta y+2\alpha x=R^2.$$

Aus der Form dieser Gleichung, in der weder ϱ noch ϱ' vorkommt, ist ersichtlich, dafs, wenn beliebige concentrische Kreise gegeben sind, alle ihnen zugeordnete Kreise eine gemeinschaftliche Chorde haben, und dafs diese Chorde auch die gemeinschaftliche Chorde des Hülfs-Kreises und desjenigen jener concentrischen Kreise ist, der durch den Mittelpunct desselben geht. Alle Polar-Kreise haben also dieselben beiden festen Puncte zu zugeordneten Polen. Der eine dieser Puncte ist, was unmittelbar erhellet, derjenige welcher, in Beziehung auf den Hülfs-Kreis, zum Mittelpuncte der concentrischen Kreise als zugeordneter Punct gehört. Er liegt auf der geraden Linie:

$$\beta y+\alpha x=R^2,$$

und steht also von jener gemeinschaftlichen Chorde (4.) so weit ab, als der Anfangspunct der Coordinaten, der Mittelpunct des Hülfs-Kreises. Dieser Mittelpunct ist also der zweite jener beiden festen zugeordneten Puncte.

Alle Sätze, welche sich auf concentrische Kreise beziehen und blofse Situations- und Winkel-Beziehungen enthalten, lassen sich also auf

solche Kreise unmittelbar übertragen, welche eine gemeinschaftliche (ideale) Chorde haben. Ich begnüge mich mit einem einzigen Beispiele.

I. Ein solcher Winkel, dessen Scheitel auf dem Umfange eines von zwei gegebenen concentrischen Kreisen fortrückt, während seine beiden Schenkel den andern derselben berühren, bleibt constant.

II. Derjenige Winkel, welcher von zwei Kreisen gebildet wird, die sich in irgend einem Puncte eines von irgend zwei gegebenen, keinen Punct gemein habenden Kreisen schneiden, den andern dieser Kreise berühren und überdiefs durch einen derjenigen beiden Puncte gehen, die in Beziehung auf die beiden gegebenen Kreise zugeordnete Pole sind, ist von constanter Gröfse.

6. Es seien

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\varrho^2,$$
$$(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2=\varrho'^2,$$

die Gleichungen irgend zweier gegebener Kreise, und hiernach, indem wir

$$\alpha^2+\beta^2-\varrho^2=\gamma, \qquad \alpha'^2+\beta'^2-\varrho'^2=\gamma'$$

setzen, die Gleichungen der Polar-Kreise:

$$\left(y-\frac{R^2\beta}{\gamma}\right)^2+\left(x-\frac{R^2\alpha}{\gamma}\right)^2=\frac{R^4}{\gamma^2}\varrho^2,$$
$$\left(y-\frac{R^2\beta'}{\gamma'}\right)^2+\left(x-\frac{R^2\alpha'}{\gamma'}\right)^2=\frac{R^4}{\gamma'^2}\varrho'^2.$$

Wir wollen untersuchen, welche Lage der Hülfs-Kreis in Beziehung auf die beiden gegebenen Kreise haben mufs, damit die Radien der beiden Polar-Kreise einander gleich seien. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn

$$\frac{\gamma}{\varrho}=\pm\frac{\gamma'}{\varrho'},$$

das heifst, wenn

$$\frac{\alpha^2+\beta^2-\varrho^2}{\varrho}=\pm\frac{\alpha'^2+\beta'^2-\varrho'^2}{\varrho'}.$$

Der Mittelpunct des Hülfs-Kreises ist hierbei der Anfangspunct der Coordinaten. Verlegen wir die Axen so, dafs die Coordinaten jenes Mittelpunctes y und x werden, so kommt:

$$\frac{(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2-\varrho^2}{\varrho}=\pm\frac{(y-\beta')^2+(x-\alpha')^2-\varrho'^2}{\varrho'}.$$

Diese Gleichung stellt also, wenn wir y und x als veränderlich betrachten, den Ort derjenigen Puncte dar, in welchen der Mittelpunct des Hülfs-Kreises angenommen werden mufs, damit die Radien der beiden Polar-Kreise gleich werden. Im zweiten Paragraphen dieser Aphorismen haben wir

gesehen, dafs die letzte Gleichung denjenigen Kreis darstellt, welcher aus einem der beiden homologen Puncte der beiden gegebenen Kreise, als Mittelpuncte beschrieben wird, und mit diesen Kreisen dieselbe gemeinschaftliche Chorde hat.

Da ferner, wenn irgend drei Kreise gegeben sind, diejenigen drei neuen Kreise, welche aus solchen drei homologen Puncten je zweier der drei gegebenen Kreise, die in gerader Linie liegen, als Mittelpuncten, beschrieben werden, und mit den bezüglichen gegebenen Kreisen dieselben gemeinschaftlichen Chorden haben, in denselben beiden Puncten sich schneiden (Aphorismen II.), so können wir einen solchen Durchschnittspunct zum Mittelpuncte des Hülfs-Kreises nehmen, und erhalten alsdann solche drei den gegebenen zugeordnete Kreise, deren Radien einander gleich sind.

Alle Sätze also über zwei und drei beliebige Kreise von gleichen Radien, welche nur Lagen und Winkel-Beziehungen enthalten, lassen sich unmittelbar übertragen auf beliebige Kreise mit beliebigen Radien. Und überhaupt alle möglichen Constructionen, welche sich auf drei gleiche gegebene Kreise beziehen, in welchen, was das End-Resultat betrifft, nur Kreise und gerade Linien in Betracht kommen, lassen sich auch dann ausführen, wenn statt der drei gleichen Kreise irgend drei beliebige gegeben sind.

Es ist znm Beispiel leicht, einen Kreis, zu beschreiben der drei gegebene gleiche Kreise gleichartig berührt. Diese Bemerkung liefert uns eine neue Construction des Apollonischen Problems der Tactionen, wenn irgend drei beliebige Kreise gegeben sind, die von einem vierten berührt werden sollen. Man bestimme auf die eben erwähnte Art den Mittelpunct eines Hülfs-Kreises, so dafs die, den gegebenen zugeordneten Kreise einander gleich werden, und construire dann diejenigen beiden Kreise, welche diese drei gleichen zugeordneten Kreise gleichartig berühren. Die Polar-Kreise der beiden so bestimmten Kreise sind alsdann zwei verlangte.

Ich gehe in kein Detail dieser Construction hier ein, weil in dem folgenden Paragraphen, dem der gegenwärtige hier seine Stelle verdankt, noch ein anderes Beispiel der letzten Übertragungsweise vorkommen wird.

Bonn, Ende October, 1831.

20.

Analytisch-combinatorische Sätze.

(Vom Herrn Prof. *H. F. Scherk* in Halle.)

I. (Vergl. gegenw. Journ. III. Bd. pag. 97.) **Bildet man alle Combinations-Formen ohne Wiederholungen aus den natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ... ... n zur $m$ten Classe, zieht von jeder in der ersten Stelle jeder Form stehenden Zahl 0, von jeder Zahl in der zweiten Stelle 1, in der dritten 2, ..., in der letzten $m-1$ ab, so erhält man alle Combinations-Formen mit gestatteter Wiederholung der Elemente aus den Zahlen 1, 2, 3, ... $n-m+1$ zur $m$ten Classe.**

Beispiel. Es sei $m=3$, $n=3$, so sind alle Combinationen ohne Wiederholung aus den Gröfsen 1, 2, 3, 4, 5, zur 3ten Classe, auf gewöhnliche Weise geordnet:

1.2.3, 1.2.4, 1.2.5, 1.3.4, 1.3.5, 1.4.5, 2.3.4, 2.3.5, 2.4.5, 3.4.5.
Hiervon ab: 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2, 0.1.2,
bleibt: 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3, 1.2.2, 1.2.3, 1.3.3, 2.2.2, 2.2.3, 2.3.3, 3.3.3,

welches alle Combinationen mit gestatteter Wiederholung aus den Gröfsen 1, 2, 3 zur 3ten Classe sind.

Beweis. Denken wir uns die Combinations-Formen auf die gewöhnliche Weise geordnet, so wird es, wie man leicht bemerken kann, zunächst darauf ankommen, zu bestimmen, die wievielste Stelle in der Reihe aller Formen eine aus gegebenen Gröfsen gebildete Form einnimmt. Es ist aber eben so leicht, sogleich die allgemeinere Frage aufzulösen, wie viele Combinations-Formen vor denen vorhergehen, welche eine beliebige Anzahl gegebener Anfangs-Elemente $k_1.k_2.k_3....k_l$ haben.

a) Es seien demnach zuerst alle Combinations-Formen ohne Wiederholungen aus den Gröfsen 1, 2, 3, ... n zur $m$ten Classe gebildet. Kehrt man die Folge aller derselben um, so dafs diejenige Form, welche in der gewöhnlichen Anordnung die letzte Stelle einnahm, jetzt die erste, die vorletzte die zweite wird, u. s. f., — in dem obigen Beispiele 3.4.5; 2.4.5; 2.3.5 etc., — so kommen gegenwärtig zuerst alle Combinations-Formen vor, in denen das erste Element gröfser als k_1 ist, folglich alle Combina-

tionen aus den $n-k_1$ Gröfsen k_1+1, k_1+2, ... n zur $m$ten Classe, deren Anzahl $=\frac{n-k_1 . n-k_1-1 \ldots . n-k_1-m+1}{1.2 \ldots . m}$ ist, welcher Binomialcoefficient durch $P^m_{n-k_1}$ bezeichnet werde.

Hierauf folgen alle Formen, deren erstes Element k_1, deren zweites aber gröfser als k_2 ist, folglich alle Combinationen aus den $n-k_2$ Gröfsen k_2+1, k_2+2, ... n zur $(m-1)$ten Classe, deren Anzahl $=\frac{n-k_2 . n-k_2-1 \ldots . n-k_2-m+2}{1.2 \ldots . m-1}=P^{m-1}_{n-k_2}$ ist, und denen allen k_1 als Anfangs-Element vorgesetzt wurde. Dann kommen alle Formen, deren beide erste Elemente $k_1 . k_2$ sind, deren drittes aber gröfser als k_3 ist, folglich alle Combinationen aus den $n-k_3$ Gröfsen k_3+1, k_3+2, ... n zur $(m-2)$ten Classe, deren Anzahl $=P^{m-2}_{n-k_3}$ ist, und denen allen $k_1 . k_2$ als Anfangs-Elemente vorgesetzt wurden.

So geht es offenbar fort. Endlich kömmt man auf die Formen, deren $l-1$ erste Elemente $k_1 . k_2 \ldots . k_{l-1}$ sind, deren $l$tes Element aber gröfser als k_l ist, folglich auf alle Combinationen aus den $n-k_l$ Gröfsen k_l+1, k_l+2, ... n zur $(m-l+1)$ten Classe, deren Anzahl $=P^{m-l+1}_{n-k_l}$ ist, und denen allen $k_1 . k_2 \ldots . k_{l-1}$ als Anfangs-Elemente vorgesetzt wurden.

Nunmehr folgen die Formen, welche die verlangten l Anfangs-Elemente $k_1 . k_2 \ldots . k_l$ haben, welche man erhält, wenn man allen Combinationen aus den $n-k_l$ Gröfsen k_l+1, k_l+2, ... n zur $(m-l)$ten Classe, deren Anzahl $P^{m-l}_{n-k_l}$ ist, die l Zahlen $k_1 . k_2 \ldots . k_l$ als Anfangs-Elemente vorsetzt. Folglich gehen den $P^{m-l}_{n-k_l}$ Formen, welche die genannten l Anfangs-Elemente haben, bei der gegenwärtigen Anordnung:

$$M = P^m_{n-k_1} + P^{m-1}_{n-k_2} + P^{m-2}_{n-k_3} + \ldots . + P^{m-l+1}_{n-k_l}$$

Formen voran. Da nun die Anzahl aller Combinationen aus den n Gröfsen 1, 2, 3, ... n zur $m$ten Classe $=P^m_n$ ist, so werden, wenn die gegenwärtige Folge wieder umgekehrt, also die gewöhnliche wiederhergestellt wird, den erwähnten $P^{m-l}_{n-k_l}$ Formen, welche die l gegebenen Anfangs-Elemente $k_1 . k_2 \ldots . k_l$ haben,

$$P^m_n - M - P^{m-l}_{n-k_l}$$

Formen vorhergehen, welche diese Anfangs-Elemente noch nicht haben.

Setzt man $l=m$, so werden vor der einzigen Form $k_1 . k_2 \ldots . k_m$

$$P^m_n - N - 1$$

Formen vorhergehen, wobei

$$N = P^m_{n-k_1} + P^{m-1}_{n-k_2} + P^{m-2}_{n-k_3} + \ldots + P^1_{n-k_m}$$

ist, so dafs $k_1 . k_2 . k_3 \ldots . k_m$ in der Reihe aller Formen die $(P^m_n - N)$te ist.

b) Bildet man auf gleiche Weise die Combinationen mit gestatteter Wiederholung aus den Elementen $1 . 2 . 3 \ldots . \nu$ zur μten Classe, und untersucht, wieviele Combinations-Formen vor denen vorhergehen, welche eine bestimmte Anzahl gegebener Anfangs-Elemente $\varkappa_1 . \varkappa_2 . \varkappa_3 \ldots . \varkappa_\lambda$ haben, von denen angenommen wird, dafs $\varkappa_2$ nicht kleiner ist als $\varkappa_1$, $\varkappa_3$ nicht kleiner als $\varkappa_2$ u. s. f., so findet man auf demselben Wege, wie vorher, die Anzahl der Formen, welche die genannten Anfangs-Elemente haben, $= P^{\mu-\lambda}_{\nu-\varkappa_\lambda+\mu-\lambda}$, und die Anzahl der ihnen vorhergehenden Formen $=$

$$P^\mu_{\nu+\mu-1} - M' - P^{\mu-\lambda}_{\nu-\varkappa_\lambda+\mu-\lambda}$$

wo $M' = P^\mu_{\nu-\varkappa_1+\mu-1} + P^{\mu-1}_{\nu-\varkappa_2+\mu-2} + P^{\mu-2}_{\nu-\varkappa_3+\mu-3} + \ldots + P^{\mu-\lambda+1}_{\nu-\varkappa_\lambda+\mu-\lambda}$
angenommen ist.

Setzt man $\lambda = \mu$, so werden der einzigen Form $\varkappa_1 . \varkappa_2 \ldots . \varkappa_\mu$

$$P^\mu_{\nu+\mu-1} - N' - 1,$$

Formen vorhergehen, wobei:

$$N' = P^\mu_{\nu-\varkappa_1+\mu-1} + P^{\mu-1}_{\nu-\varkappa_2+\mu-2} + P^{\mu-2}_{\nu-\varkappa_3+\mu-3} + \ldots + P^1_{\nu-\varkappa_\mu}$$

ist, so dafs $\varkappa_1 . \varkappa_2 . \varkappa_3 \ldots . \varkappa_\mu$ in der Reihe aller Formen die $(P^\mu_{\nu+\mu-1} - N')$te ist.

c) Setzt man nunmehr $\mu = m$ und $\nu = n - m + 1$, so ist $P^\mu_{\nu+\mu-1} = P^m_n$, d. h. die Anzahl der Combinations-Formen mit Wiederholung aus den Gröfsen $1, 2, 3, \ldots . n - m + 1$ zur $m$ten Classe ist eben so grofs als die Anzahl der Combinations-Formen ohne Wiederholung aus den Gröfsen $1, 2, 3, \ldots . n$ zu derselben Classe. Setzt man ferner

$$\varkappa_1 = k_1; \quad \varkappa_2 = k_2 - 1; \quad \varkappa_3 = k_3 - 2; \quad \ldots . \quad \varkappa_\mu = k_m = k_m - m + 1,$$

so sieht man augenblicklich, dafs $N' = N$ wird; da nun auch $P^\mu_{\nu+\mu-1} = P^m_n$ ist, so nimmt folglich die Combinations-Form $k_1 . k_2 - 1 . k_3 - 2 \ldots$ $\ldots k_m - m + 1$ in der Reihe der Combinationen mit Wiederholung dieselbe Stelle ein, als die Form $k_1 . k_2 . k_3 \ldots . k_m$ in der Reihe der Combinationen ohne Wiederholung; wenn folglich die einzelnen Elemente der gleichstelligen Formen von einander abgezogen werden, so ist die Differenz $0.1.2 \ldots$ $\ldots m - 1$ constant für alle Formen w. z. b. w.

II. So innig der so eben angegebene Zusammenhang zwischen Combinationen ohne und mit Wiederholung aus den natürlichen Zahlen

auch genannt werden mufs, so giebt es doch einen andern noch innigeren. Gegenwärtig haben wir nemlich die Formen der einen Art aus denen der andern Art hergeleitet, die Elemente aber sind verschieden, und auf gleiche Weise die Summen welche man erhält, wenn man jede Form als ein Product der dieselbe bildenden Elemente betrachtet, und alle diese Summen addirt (auf welche Weise die Combinationen bekanntlich bei allen analytischen Anwendungen vorkommen) ungleich. Es ist aber eine Möglichkeit, mit beiderlei Combinationen solche einförmige Veränderungen vorzunehmen, dafs Elemente und Endresultate einander gleich werden, und zwar wird das erreicht, wenn man Operationen vornimmt, die den vorigen entgegengesetzt sind, also addirt, wo man vorher subtrahirte, und umgekehrt. Der zu beweisende Satz ist hiernach folgender:

> Bildet man alle Combinations-Formen ohne Wiederholungen aus den Zahlen 1, 2, 3, ... n zur $m$ten Classe, addirt zu jeder in der ersten Stelle jeder Form stehenden Zahl 0, zu jeder in der zweiten Stelle stehenden Zahl 1, zu jeder Zahl in der dritten Stelle 2, ... in der letzten $m-1$, betrachtet die einzelnen Formen als Producte und sucht die Summe derselben; und verfährt man auf gleiche Weise mit allen Combinationen mit Wiederholungen aus denselben Gröfsen und zu derselben Classe, nur mit dem Unterschiede, dafs man gegenwärtig subtrahirt, statt zu addiren, und sucht man auch gegenwärtig die Summe aller Producte, so sind beide Summen einander gleich, nemlich $= 1.3.5 \ldots (2m-1) P_{n+m}^{n-m}$.

Beispiel. Es sei $m = 3$, $n = 4$, so sind alle Combinationen ohne Wiederholungen aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 zur 3ten Classe:

$$\begin{array}{rcccc} & 1.2.3 & + 1.2.4 & + 1.3.4 & + 2.3.4 \\ \text{Hierzu addirt:} & 0.1.2 & 0.1.2 & 0.1.2 & 0.1.2 \\ \hline \text{giebt} & 1.3.5 & + 1.3.6 & + 1.4.6 & + 2.4.6 \end{array}$$

$$= 15 + 18 + 24 + 48 = 105 = 1.3.5.7.$$

Behält man ferner von den Combinationen mit Wiederholungen blofs diejenigen bei, in deren zweiter Stelle nicht 1, oder in deren dritter Stelle nicht 2 steht, da die anderen von selbst verschwinden, so hat man:

$$\begin{array}{rl}
 & 1.2.3+1.2.4+1.3.3+1.3.4+1.4.4+2.2.3+2.2.4+2.3.3+2.3.4 \\
\text{Hiervon ab:} & 0.1.2\quad 0.1.2\quad 0.1.2\quad 0.1.2\quad 0.1.2\quad 0.1.2\quad 0.1.2\quad 0.1.2\quad 0.1.2 \\
\text{bleibt:} & 1.1.1+1.1.2+1.2.1+1.2.2+1.3.2+2.1.1+2.1.2+2.2.1+2.2.2 \\
= & \quad 1+\quad 2+\quad 2+\quad 4+\quad 6+\quad 2+\quad 4+\quad 4+\quad 8
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
 & +2.4.4+3.3.3+3.3.4+3.4.4+4.4.4 \\
\text{ab:} & \quad 0.1.2\quad 0.1.2\quad 0.1.2\quad 0.1.2\quad 0.1.2 \\
 & 2.3.2+3.2.1+3.2.2+3.3.2+4.3.2 \\
 & +\ 12+\quad 6+\quad 12+\quad 18+\quad 24 = 105, \text{ wie vorher.}
\end{array}$$

Der Beweis dieses merkwürdigen Satzes auf rein combinatorischem Wege scheint mit Schwierigkeiten verbunden zu sein, die sich nicht leicht beseitigen lassen. Ich werde daher hier einen aus analytischen Betrachtungen entnommenen mittheilen, und wenn diese Quelle auch eine ziemlich entfernte genannt werden mufs, so gewährt sie doch von der andern Seite den Vortheil, den eigentlichen Grund der Gattung von Veränderungen, die wir hier mit den Combinationen vornehmen, vollständig aufzudecken.

a) Aufgabe. Es sei X eine beliebige Function der veränderlichen Gröfse x, und $x^{-p}\,\partial x = \partial y$, wo p eine beliebige positive oder negative Zahl ist. Den $n$ten Differentialquotienten von X in Beziehung auf y aus den successiven Differentialquotienten von X in Beziehung auf x zu finden.

Auflösung. Es ist

$$\frac{\partial X}{\partial y} = x^p \frac{\partial X}{\partial x} = x^{p-1}.\frac{x\partial X}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \frac{x^p\,\partial\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)}{\partial x} = x^{2p-2}\left\{p\,x\,\frac{\partial X}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right\},$$

$$\frac{\partial^3 X}{\partial y^3} = \frac{x^p\,\partial\left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)}{\partial x} = x^{3p-3}\left\{p.2p-1\,\frac{x\partial X}{\partial x} + (p+2p)x^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial^3 X}{\partial x^3}\right\},$$

$$\frac{\partial^4 X}{\partial y^4} = \frac{x^p\,\partial\left(\frac{\partial^3 X}{\partial y^3}\right)}{\partial x} = x^{4p-4}\left\{p.2p-1.3p-2.\frac{x\partial X}{\partial x} + (p.2p-1+p.3p-1+2p.3p-1)x^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right.$$
$$\left. + (p+2p+3p)x^3\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + x^4\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}\right\},$$

u. s. f.

Hieraus läfst sich bereits sehr leicht übersehen, dafs der $n$te Differentialquotient folgende Form haben wird:

$$\frac{\partial^n X}{\partial y^n} = x^{np-n}\left\{\varphi(1,n)x\frac{\partial X}{\partial x} + \varphi(2,n)x^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \ldots + \varphi(k,n)x^k\frac{\partial^k X}{\partial x^k} + \ldots + \varphi(n,n)x^n\frac{\partial^n X}{\partial x^n}\right\},$$

so, dafs es gegenwärtig nur darauf ankömmt, das allgemeine Bildungsgesetz der von n und p abhängigen Coefficienten $\varphi(1,n)$, $\varphi(2,n)$, ... $\varphi(n,n)$ zu bestimmen.

Differentiirt man nun die letzte Gleichung noch einmal, so hat man:

$$\frac{\partial^{n+1}X}{\partial y^{n+1}} =$$

$$x^{(n+1)p-n-1}\left\{\begin{array}{r} +\varphi(1,n)x^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+....+\varphi(k-1,n)x^k\frac{\partial^k X}{\partial x^k}+....+\varphi(n,n)x^{n+1}\frac{\partial^{n+1}X}{\partial x^{n+1}} \\ (np-n+1)\varphi(1,n)x\frac{\partial X}{\partial x}+(np-n+2)\varphi(2,n)x^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+....+(np-n+k)\varphi(k,n)x^k\frac{\partial^k X}{\partial x^k}+.... \end{array}\right.$$

verwandelt man hingegen in derselben Gleichung n in $n+1$, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial^{n+1}X}{\partial y^{n+1}} = x^{(n+1)p-n-1}\left\{\varphi(1,n+1)x\frac{\partial X}{\partial x}+\varphi(2,n+1)x^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+...+\varphi(k,n+1)x^k\frac{\partial^k X}{\partial x^k}+...+\varphi(n+1,n+1)x^{n+1}\frac{\partial^{n+1}X}{\partial x^{n+1}}\right.$$

und demnach aus der Vergleichung dieser beiden Entwickelungen:

$$\varphi(1,n+1) = (np-n+1)\varphi(1.n),$$
$$\varphi(k,n+1) = \varphi(k-1,n)+(np-n+k)\varphi(k,n),$$
$$\varphi(n+1,n+1) = \varphi(n,n).$$

Aus der letzten Gleichung sieht man, dafs $\varphi(n,n)$ eine Constante, folglich $=\varphi(1.1)=1$ ist. Die Gleichung

$\varphi(1,n+1)=(np-n+1)\varphi(1,n)$ oder $\varphi(1,n)=((n-1)p-n+2)\varphi(1,n-1)$

führt auf

$$\varphi(1,n) = ((n-1)p-n+2)((n-2)p-n+3)....2p-1.p.$$

Man hat also noch die Gleichung

$$\varphi(k,n) = \varphi(k-1,n-1)+((n-1)p-n+k+1)\varphi(k,n-1)$$

aufzulösen. Zu dem Ende bemerke man Folgendes: Die Summe der Combinationen mit Wiederholungen aus den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... k zur $h$ten Classe läfst sich bekanntlich in zwei Theile zerfällen, deren erster das gröfste Element k noch nicht enthält, und folglich aus den Combinationen mit Wiederholungen aus den Zahlen 1, 2, 3, ... $k-1$ zur $h$ten Classe besteht, und deren zweiter das gröfste Element h in jeder einzelnen Form zum Factor hat, so dafs dieser zweite Theil erhalten wird, wenn man alle Combinationen mit Wiederholungen aus den Zahlen 1, 2, 3, ... k zur $(h-1)$ten Classe in k multiplicirt, welche Zahl hierbei überall die Stelle des $h$ten Elements einnimmt. Nunmehr nehme man mit allen genannten Formen folgende Veränderungen vor. Statt des ersten Elements t_1 jeder Form setze man $t_1 p$; statt des zweiten Elements t_2 jeder Form setze man $(t_2+1)p-1$; statt des dritten t_3 werde $(t_3+2)p-2$, ...;

statt des $h$ten t_h werde $(t_h+h-1)p-h+1$ gesetzt, so dafs, wenn

$$t_1 . t_2 . t_3 \ldots . t_h$$

irgend eine beliebige Combinations-Form vorstellt, daraus eine andere

$$t_1 p . [(t_2+1)p-1] . [t_3+2)p-2] \ldots . [(t_h+h-1)p-h+1]$$

gebildet werde. Hierdurch wird, was vorher die Summe der Combinationen mit Wiederholungen zur $h$ten Classe aus den Gröfsen $1, 2, 3, \ldots . k$ war, in eine andere von h und k abhängige Function übergehen, die durch $\psi(h, k)$ angedeutet werde. Auf gleiche Weise geht der erste der beiden oben genannten Theile in $\psi(h, k-1)$ über. Von dem zweiten Theile wird der eine Factor, der vorher die Summe der Combinationen aus k Gröfsen zur $(h-1)$ten Classe gewesen war, gegenwärtig durch $\psi(h-1, k)$ ausgedrückt sein, und statt des andern Factors k, der überall die $h$te Stelle einnahm, mufs nunmehr $(k+h-1)p-h+1$ gesetzt werden. Da nun mit den unzerfällten, und den in die beiden Theile zerfällten Combinationen dieselben Veränderungen vorgenommen worden, so besteht die vorige Gleichheit noch, so dafs

$$\psi(h,k) = \psi(h,k-1)+\psi(h-1,k)[(k+h-1)p-h+1]$$

ist. Setzt man nun hierin $h=n-k$, und vergleicht das Resultat

$$\psi(n-k,k) = \psi(n-k,k-1)+\psi(n-k-1,k)[(n-1)p-n+k+1]$$

mit der allgemeinen Gleichung für die Function φ:

$$\varphi(k,n) = \varphi(k-1,n-1)+\varphi(k,n-1)\,[(n-1)p-n+k+1],$$

so erkennt man leicht aus ihrer Identität, dafs wenn für Einen Werth von k und einen beliebigen von n

$$\varphi(k,n) = \psi(n-k,k)$$

ist, dieselbe Gleichheit auch für den nächst gröfseren Werth von k, und folglich allgemein gilt. Nun ist aber $\psi(n-1, 1)$ so zu bilden, dafs statt der Combinationen zur $(n-1)$ten Classe aus der Zahl 1, d. h. statt des Products aus $n-1$ Factoren, deren jeder $=1$ ist, gesetzt werden mufs:

$$1p . [(1+1)p-1] . [(1+2)p-2] \ldots . [(n-1)p-n+2]$$
$$= [(n-1)p-n+2] . [(n-2)p-n+3] \ldots . (2p-1)p.$$

Dieselbe Quantität ist aber oben $=\varphi(1, n)$ gefunden worden; und demnach ist $\varphi(k, n)=\psi(n-k, k)$ für $k=1$, und folglich auch für jeden Werth von k. Hieraus folgt also folgende allgemeine Auflösung unserer Aufgabe:

> Man bilde die Summe der Combinationen mit Wiederholungen aus den Gröfsen $1, 2, 3, \ldots . k$ zur $(n-k)$ten Classe, bezeichne irgend

eine beliebige der in ihr enthaltenen Formen durch $t_1.t_2.t_3....t_{n-k}$, die Summe aller Formen durch $\Sigma^k t_1.t_2.t_3....t_{n-k}$, und setze

$$\varphi(k,n) = \Sigma^k t_1 p.[(t_2+1)p-1].[(t_3+2)p-2]....[(t_{n-k}+n-k-1)p-n+k+1],$$

so ist

$$\frac{\partial^n X}{\partial y^n} = x^{np-n}\left\{\varphi(1,n)\frac{x\partial X}{\partial x}+\varphi(2,n)x^2\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+....+\varphi(k,n)x^k\frac{\partial^k X}{\partial x^k}+....+\varphi(n,n)x^n\frac{\partial^n X}{\partial x^n}\right\}.$$

b) **Aufgabe.** Wenn Alles wie vorher bleibt, so soll der $n$te Differentialquotient von X in Beziehung auf x aus den successiven Differentialquotienten von X in Beziehung auf y gefunden werden.

Auflösung. Der hier einzuschlagende Weg ist vollständig derselbe, wie in der vorigen Aufgabe. Man findet nemlich sehr leicht, wenn man

$$(-1)^{n-1}\frac{\partial^n X}{\partial x^n} = \frac{f(1,n)}{x^{p+n-1}}\cdot\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{f(2,n)}{x^{2p+n-2}}\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}+....+(-1)^{k-1}\frac{f(k,n)}{x^{kp+n-k}}\cdot\frac{\partial^k X}{\partial y^k}+....$$
$$....+(-1)^{n-1}\frac{f(n,n)}{x^{np}}\cdot\frac{\partial^n X}{\partial y^n}$$

setzt, dafs

$$f(1,n) = (p+n-2)f(1,n-1),$$
$$f(k,n) = f(k-1,n-1)+(kp+n-k-1)f(k,n-1),$$
$$f(n,n) = f(n-1,n-1)$$

sein müsse. Da aber $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{x^p}\cdot\frac{\partial X}{\partial Y}$, und folglich $f(1,1)=1$ ist, so ist die Auflösung der ersten jener 3 Gleichungen

$$f(1,n) = (p+n-2)(p+n-3)....(p+1)p,$$

und der letzten

$$f(n,n) = 1.$$

Zum Behufe der Auflösung der zweiten zerlege man die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen aus den Zahlen 1, 2, 3, ... $n-1$ zur $h$ten Classe in zwei Theile, deren erster das gröfste Element $n-1$ noch nicht enthält, und folglich aus der Summe aller Combinationen ohne Wiederholung aus den Zahlen 1, 2, 3, ... $n-2$ zur $h$ten Classe besteht, und deren zweiter ein Product aus der Summe aller Combinationen ohne Wiederholung aus den Zahlen 1, 2, 3, ... $n-2$ zur $(h-1)$ten Classe in $n-1$ ist. Mit allen Formen nehme man nun die Veränderung vor, dafs wenn

$$u_1.u_2.u_3....,u_h$$

irgend eine beliebige unter ihnen vorstellt, statt derselben

$$u_1 p[(u_2-1)p+1][u_3-2)p+2]....[(u_h-h+1)p+h-1]$$

gesetzt werde. Hierdurch wird die Quantität, die vorher die Summe der

Combinationen ohne Wiederholung aus $1, 2, 3, \ldots . n-1$ zur $h$ten Classe war, in eine andere Function übergehen, die durch $F(h, n)$ ausgedrückt werde, und für welche man hiernach die Gleichung

$$F(h, n) = F(h, n-1) + F(h-1, n-1)\,[(n-h)p + h - 1]$$

haben wird. Wird hierin $h = n - k$ gesetzt, und die resultirende Gleichung

$$F(n-k, n) = F(n-k, n-1) + F(n-k-1, n-1)\,[kp + n - k - 1]$$

mit der allgemeinen Gleichung für f:

$$f(k, n) = f(k-1, n-1) + f(k, n-1)\,[kp + n - k - 1]$$

verglichen, so erhellt, dafs wenn Einmal, nemlich für Einen Werth von k und einen beliebigen Werth von n,

$$f(k, n) = F(n-k, n)$$

gewesen ist, derselbe auch für den nächst gröfseren, und folglich für jeden Werth von k Statt findet. Nun war aber $F(n-1, n)$ so zu bilden, dafs man an die Stelle jeder Combination aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots . n-1$ zur $(n-1)$ten Classe, d. h. an die Stelle der einzigen Form

$$1 . 2 . 3 \ldots . n-1$$

setzen sollte:

$$1p . [(2-1)p+1]\,[(3-2)p+2] \ldots . [p+n-1]$$
$$= (p+n-1)(p+n-2) \ldots . (p+1)p,$$

welchen Ausdruck wir oben auch $= f(1 . n)$ gefunden hatten. Demnach ist $f(k, n) = F(n-k, n)$ für $k = 1$, und daher auch für jeden Werth von k.

Wir haben also von dieser Aufgabe eine der vorigen durchaus analoge Auflösung erhalten; nemlich:

Man bilde die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots . n-1$ zur $(n-k)$ten Classe, bezeichne irgend eine beliebige der in ihr enthaltenen Formen durch $u_1 . u_2 . u_3 \ldots . u_{n-k}$, die Summe aller Formen durch $\Sigma^{n-1} u_1 . u_2 . u_3 \ldots . u_{n-k}$, und setze

$$f(k, n) = \Sigma^{n-1} u_1 p . [(u_2 - 1)p + 1]\,[u_3 - 2)p + 2] \ldots . [(u_{n-k} - n + k + 1)p + n - k - 1],$$

so ist

$$\frac{\partial^n X}{\partial x^n} = \frac{f(n, n)}{x^{np}} \cdot \frac{\partial^n X}{\partial y^n} - \frac{f(n-1, n)}{x^{(n-1)p+1}} \cdot \frac{\partial^{n-1} X}{\partial y^{n-1}} + \ldots . + \frac{(-1)^{n-k} f(k, n)}{x^{kp+n-k}} \cdot \frac{\partial^k X}{\partial y^k} + \ldots .$$
$$\ldots . + \frac{(-1)^{n-1} f(1, n)}{x^{p+n-1}} \cdot \frac{\partial X}{\partial y} .$$

c) Von allen Werthen, die man dem p in den vorigen beiden Sätzen beilegen kann, hat für uns gegenwärtig nur der Werth $p = -1$ Interesse. In diesem Falle ist also $\partial y = x\,\partial x$; ferner

$$\varphi(n, n) = 1,$$

$$\varphi(1,n) = (-1)^{n-1}\,1.3.5....(2n-3),$$
$$\varphi(k,n) = (-1)^{n-k}\,\Sigma^k t_1\,(t_2+2)\,(t_3+4)....(t_{n-k}+2n-2k-2),$$

oder wenn hierin $n-m+1$, $n+1$ resp. für k, n gesetzt wird:

$$\varphi(n-m+1,\ n+1) = (-1)^m\,\Sigma^{n-m+1}\,t_1(t_2+2)(t_3+4)....(t_m+2m-2).$$

Statt, wie hier vorgeschrieben wird, jede einzelne Combinationsform aus den Combinationen mit Wiederholungen so zu verändern, dafs zu jeder ersten Zahl 0, zu jeder zweiten 2, zu jeder dritten 4 u. s. f. addirt werde, kann man natürlich in jeder einzelnen Form zuerst zu jeder ersten Zahl 0, zu jeder zweiten Zahl 1, zu jeder dritten 2, ... zu jeder letzten $m-1$ addiren, und sodann mit dem Resultate abermals dieselben Veränderungen vornehmen, wodurch ein zweites Resultat erhalten wird. Aber eben jenes erste Resultat ist nach dem in I. bewiesenen Satze nichts Anderes, als die Summe aller Combinations-Formen ohne Wiederholungen aus den Zahlen 1, 2, 3, ... n zur $m$ten Classe. Bezeichnen wir also diese Summe, wie wir es schon gethan haben, durch $\Sigma^n u_1 u_2 u_3 .... u_m$, so ist:

$$\varphi(n-m+1,\ n+1) = (-1)^m\,\Sigma^n\,u_1(u_1+1)(u_2+2)....(u_m+m-1).$$

Ferner ist in unserm Falle, wo $p=-1$ gesetzt wurde:

$$f(n,\ n) = 1;$$
$$f(1,\ n) = 0;$$

wenn $n>2$; hingegen $f(1,1)=1$, $f(1,2)=-1$. Endlich wird:

$$f(k,\ n) = (-1)^{n-k}\,\Sigma^{n-1}\,u_1(u_2-2)(u_3-4)....(u_{n-k}-2n+2k+2).$$

Da man aber auch hier, statt sogleich jede einzelne Combinations-Form so zu verändern, dafs man 2 von jeder zweiten, 4 von jeder dritten Zahl u. s. f. abzieht, zuerst 1 von jeder zweiten, 2 von jeder dritten, ... $m-1$ von jeder letzten Zahl abziehen, und sodann dieselbe Operation wiederholen kann, vor dieser letzten Wiederholung aber, wie aus dem in I. bewiesenen Satze hervorgeht, das Resultat nichts Anderes ist, als die Summe der Combinationen mit Wiederholung aus den Zahlen 1, 2, 3, ... n zur $m$ten Classe, welche wir durch $\Sigma^n t_1 t_2 t_3 .... t_m$ bezeichnet haben, so ist:

$$f(n,\ n+m) = (-1)^m\,\Sigma^n\,t_1(t_2-1)(t_3-2)....(t_m-m+1).$$

Diese Gleichung zeigt, dafs nicht blofs $f(1,n)=0$ ist, wenn $n>2$, sondern dafs allgemein $f(n,\ n+m)=0$ ist, wenn $m>n$ ist. Denn da jede Form $t_1(t_2-1)(t_3-2)....(t_m-m+1)$ verschwindet, wenn nicht mindestens $t_2=2$, $t_3=3$, ... $t_m=m$ ist, so würde die erste nicht ver-

schwindende Combinations-Form sein 1, 2 3, ... m. Diese kömmt aber unter den Combinationen aus den Zahlen 1, 2, 3, ... n, wo $n<m$ ist, offenbar nicht vor. Dasselbe Resultat wird aber sogleich noch auf einem andern Wege erhellen.

Die allgemeinen Gleichungen für φ und f gestatten nemlich in dem vorliegenden Falle noch eine andere, bei weitem leichtere Auflösung. Setzt man nemlich in die Gleichung:

$$\varphi(k, n) = \varphi(k-1, n-1) + ((n-1)p - n + k + 1)\varphi(k, n-1)$$

$p = -1$, so hat man:

$$\varphi(k, n) = \varphi(k-1, n-1) - (2n - k - 2)\varphi(k, n-1).$$

Dieser Gleichung wird aber Genüge geleistet, wenn man

$$\varphi(k, n) = (-1)^{n-k} 1.3.5....(2n-2k-1) P_{2n-k-1}^{k-1}$$

setzt. Denn setzt man diesen Werth in die obige Gleichung, so erhält man, dafs

$$(2n-2k-1) P_{2n-k-1}^{k-1} = (2n-2k-1) P_{2n-k-2}^{k-2} + (2n-k-2) P_{2n-k-3}^{k-1}$$

für jeden Werth von k und n sein müsse, was sich in der That so verhält, und folglich ist $(-1)^{n-k} 1.3.5....(2n-2k-1) P_{2n-k-1}^{k-1}$ der richtige Werth von $\varphi(k, n)$, wenn man nur zeigen kann, dafs er es für Einen Werth von k und einen beliebigen Werth von n ist. Für $k = 1$ erhält man aber hieraus

$$\varphi(1, n) = (-1)^{n-1} 1.3.5....(2n-3),$$

was mit dem oben gefundenen Werth von $\varphi(1, n)$ vollständig übereinstimmt. Demnach gilt die gefundene Auflösung für jeden Werth von k.

Auf gleiche Weise geht die allgemeine Gleichung für f:

$$f(k, n) = f(k-1, n-1) + (kp + n - k - 1) f(k, n-1),$$

wenn $p = -1$ gesetzt wird, in die:

$$f(k, n) = f(k-1, n-1) + (n - 2k - 1) f(k, n-1)$$

über, welcher Genüge geleistet wird, wenn man

$$f(k, n) = (-1)^{n-k} 1.3.5....(2n-2k-1) P_n^{2n-2k}$$

setzt. Wird nemlich dieser Werth in die obige Gleichung gesetzt, so ergiebt sich, dafs erstlich für jeden Werth von k und n,

$$(2n-2k-1) P_n^{2n-2k} = (2n-2k-1) P_{n-1}^{2n-2k} + (2k-n+1) P_{n-1}^{2n-2k-2}$$

sein müsse, welche Gleichung in der That immer richtig ist, und dafs zweitens, für $k = 1$,

$$f(1, n) = (-1)^{n-1} 1.3....(2n-3) P_n^{2n-2} = (-1)^{n-1} 1.3....(2n-3) P_n^{2-n}$$

sein müsse, was sich gleichfalls so verhält, da wir oben gesehen haben,

dafs $f(1,n) = +1, -1$, oder 0 ist, je nachdem $n = 1, 2$ oder > 2 angenommen wird, und der Ausdruck $(-1)^{n-1} 1.3....2n-3\, P_n^{2-n}$ ganz dieselben Eigenschaften hat.

d) Nunmehr ist es sehr leicht, den Hauptsatz, um dessenwillen wir zunächst diese Untersuchungen angestellt haben, zu beweisen. Setzt man nemlich $n-m+1$ und $n+1$ resp. statt k, n in den Ausdruck für $\Phi(k,n)$, und n, $n+m$ resp. statt k, n in den Ausdruck für $f(k,n)$, so erhält man

$$\Phi(n-m+1, n+1) = (-1)^m 1.3.5....(2m-1)\, P_{n+m}^{n-m},$$

$$f(n, n+m) = (-1)^m 1.3.5....(2m-1)\, P_{n+m}^{2m} = (-1)^m 1.3.5....(2m-1)\, P_{n+m}^{n-m},$$

folglich ist

$$\Phi(n-m+1, n+1) = f(n, n+m).$$

Für den ersten Theil dieser Gleichung haben wir aber (in II, *c*) den Ausdruck

$$(-1)^m \Sigma^n u_1 (u_2+1)(u_3+2)....(u_m+m-1),$$

und für den zweiten Theil derselben den Ausdruck

$$(-1)^m \Sigma^n t_1 (t_2-1)(t_3-2)....(t_m-m+1)$$

gefunden. Folglich ist

$$\Sigma^n u_1(u_2+1)(u_3+2)....(u_m+m-1) = \Sigma^n t_1(t_2-1)(t_3-2)....(t_m-m+1)$$
$$= 1.3.5....(2m-1)\, P_{n+m}^{n-m},$$

welches der Satz ist, den zu beweisen wir uns vorgesetzt hatten.

e) Die in diesem Abschnitte entwickelten Formeln enthalten die Mittel, den vorgelegten Satz noch auf einem andern Wege zu beweisen, und obgleich dieser Beweis mit dem oben gegebenen grofse Aehnlichkeit hat, so sei es doch erlaubt, ihn in Kurzem anzugeben. Setzt man nemlich $p = \frac{1}{2}$, so gehen die allgemeinen Gleichungen für die Functionen Φ und f, die wir gegenwärtig zum Unterschiede von den Werthen, die wir durch die Annahme $p = -1$ erhalten, durch Φ' und f' bezeichnen wollen, in folgende über:

$$\Phi'(k,n) = \Phi'(k-1, n-1) - \left(\frac{n-1}{2} - k\right) \Phi'(k, n-1),$$

$$f'(k,n) = f'(k-1, n-1) + (n-1-\tfrac{1}{2}k)\, \Phi'(k, n-1).$$

Die Auflösungen dieser Gleichungen aber sind:

$$\Phi'(k,n) = \frac{1.3.5....(2n-2k-1)}{2^{n-k}} P_n^{2n-2k} = \frac{(-1)^{n-k} f(k,n)}{2^{n-k}},$$

$$f'(k,n) = \frac{1.3.5....(2n-2k-1)}{2^{n-k}} P_{2n-k-1}^{k-1} = \frac{(-1)^{n-k} \varphi(k,n)}{2^{n-k}},$$

wie man sehr leicht aus der Zusammenstellung der Gleichung für Φ' mit der für f, und der Gleichung für f' mit der für Φ erkennt. Setzt man nun n, $n+m$ resp. statt k, n in $\Phi'(k, n)$, und $n-m+1$, $n+1$ resp. statt k, n in $f'(k, n)$, so hat man:

$$\Phi'(n, n+m) = \frac{1.3.5....(2m-1)}{2^m} P_{n+m}^{n-m} = \frac{(-1)^m f(n, n+m)}{2^m},$$

$$f'(n-m+1, n+1) = \frac{1.2.3....(2m-1)}{2^m} P_{n+m}^{n-m} = \frac{(-1)^m \varphi(n-m+1, n+1)}{2^m}.$$

Da nun die mittelsten Glieder dieser beiden Gleichungen identisch sind, so folgt hieraus:

$$\Phi'(n, n+m) = f'(n-m+1, n+1) = \frac{1.3.5....(2m-1)}{2^m} P_{n+m}^{n-m},$$

$$f(n, n+m) = \Phi(n-m+1, n+1) = (-1)^m 1.3.5....(2m-1) P_{n+m}^{n-m}.$$

Setzt man aber in die allgemeinen oben (II., *a.* und *b.*) gefundenen Werthe von $\Phi(k, n)$ und $f(k, n)$, $p = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich:

$$\Phi'(n, n+m) = \frac{1}{2^m} \Sigma^n t_1(t_2-1)(t_3-2)....(t_m-m+1),$$

$$f'(n-m+1, n+1) = \frac{1}{2^m} \Sigma^n u_1(u_2+1)(u_3+2)....(u_m+m-1),$$

und da diese beiden Quantitäten gleich sind, so hat man:

$$\Sigma^n t_1(t_2-1)(t_3-2)....(t_m-m+1) = \Sigma^n u_1(u_2+1)(u_3+2)....(u_m+m-1)$$
$$= 1.3.5....(2m-1) P_{n+m}^{n-m},$$

welches abermals der in II. aufgestellte Hauptsatz ist, der nun auf eine von der vorigen verschiedene Art bewiesen ist, da wir zu seiner Herleitung gegenwärtig des in I. bewiesenen Satzes nicht bedurften.

f) Es ist nicht ohne Interesse, zu bemerken, wie wir hier auf Functionen gekommen sind, aus denen die Combinationen ohne und mit Wiederholungen aus den natürlichen Zahlen, und die Binomialcoefficienten zugleich abzuleiten sind, jene, wenn man $p = 1$, diese, wenn man $p = -1$ oder $= \frac{1}{2}$ setzt. Es ist nicht unsere Absicht, hier auf eine fernere Untersuchung der Eigenschaften dieser Functionen einzugehen; nur dies bleibe nicht unerwähnt, dafs es leicht ist, die Function f aus mehreren Functionen Φ, und umgekehrt, Φ aus mehreren f herzuleiten.

Wir haben nemlich oben (II., *a.* und *b.*) $\frac{\partial^n X}{\partial y^n}$ aus den successiven Differentialquotienten

$$\frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial^n X}{\partial x^n},$$

und umgekehrt

$$\frac{\partial^n X}{\partial x^n} \text{ aus } \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial^n X}{\partial y^n}$$

ausgedrückt erhalten. Bezeichnen wir kurz das erste Resultat so:

$$\frac{\partial^p X}{\partial y^p} = \sum_1^n{}_k \Phi(k, n)\, x^{np-n+k} \frac{\partial^k X}{\partial x^k},$$

und das zweite, in welchem n und k resp. mit k und l verwechselt werde, auf ähnliche Weise durch:

$$\frac{\partial^k X}{\partial x^k} = \sum_1^k{}_l (-1)^{k-l} f(l, k)\, x^{l-lp-k} \frac{\partial^l X}{\partial y^l}.$$

Wird nun dieser zweite Ausdruck in den ersten gesetzt, so erhält man:

$$\frac{\partial^n X}{\partial y^n} = \sum_1^n{}_k \sum_1^k{}_l (-1)^{k-l} \Phi(k, n)\, f(l, k)\, x^{(n-l)(p-1)} \frac{\partial^l X}{\partial y^l}.$$

Die beiden Summenzeichen zeigen an, dafs dem k die Werthe $1, 2, 3, \ldots. n$, und dem l die Werthe $1, 2, \ldots. k$ gegeben werden sollen. Offenbar kann man diese Bedingungen durch die andern ersetzen, dafs dem l die Werthe $1, 2, 3, \ldots. n$, und dem k die Werthe $l, l+1, l+2, \ldots. n$, beigelegt werden sollen. Hiernach hat man:

$$\frac{\partial^n X}{\partial y^n} = \sum_1^n{}_l \sum_l^n{}_k (-1)^{k-l} \Phi(k, n)\, f(l, k)\, x^{(n-l)(p-1)} \frac{\partial^l X}{\partial y^l}.$$

Wenn nun erstlich $l = n$ ist, so ist auch $k = n$, und der Coefficient von $\frac{\partial^n X}{\partial y^n}$ im zweiten Theile dieser Gleichung wird

$$\varphi = (n, n) f(n, n) = 1.$$

Der erste Theil der Gleichung wird also durch den einzigen Werth $l = n$ bereits vollständig dargestellt; demnach müssen alle diejenigen Glieder des zweiten Theils, die durch die Annahmen $l = 1, 2, 3, \ldots. n-1$ erhalten werden, sich gegenseitig zerstören, und daher, da die Function X eine beliebige ist, der Coefficient von $\frac{\partial^l X}{dx^l}$ für jeden Werth von l besonders $= 0$ sein. Folglich ist:

$$\sum_l^n{}_k (-1)^{k-l} \Phi(k, n) f(l, k) = 0,$$

für jeden beliebigen Werth von n und jeden Werth von l, der $< n$ ist.

Ganz auf demselben Wege erhält man, wenn man nicht den Ausdruck des Differentialquotienten von X in Beziehung auf x in den $n$ten

Differentialquotienten von X in Beziehung auf y, sondern umgekehrt den Differentialquotienten von X in Beziehung auf y in den $n$ten Differentialquotienten von y in Beziehung auf x substituirt, dafs:

$$\sum_{l}^{n}{}_{k}(-1)^k f(k,n)\Phi(l,k) = 0,$$

für jeden beliebigen Werth von n, und jeden Werth von l, der $< n$ ist.

Giebt man nun diesen beiden Gleichungen die Form:

$$f(l,n) = \varphi(n\text{-}1,n)f(l,n\text{-}1) - \varphi(n\text{-}2,n)f(l,n\text{-}2) + \varphi(n\text{-}3,n)f(l,n\text{-}3) - \ldots + (\text{-}1)^{n-l+1}\varphi(l,n),$$

$$\varphi(l,n) = f(n\text{-}1,n)\varphi(l,n\text{-}1) - f(n\text{-}2,n)\varphi(l,n\text{-}2) + f(n\text{-}3,n)\varphi(l,n\text{-}3) \ldots + (\text{-}1)^{n-l+1}f(l,n),$$

so zeigt die erste, wie f recurrirend aus Φ, und die zweite, dafs Φ auf dieselbe Weise reccurrirend aus f zu bestimmen ist. — Dafs einige der hier entwickelten Resultate auch einer rein analytischen Anwendung nicht entbehren, werden wir bei einer anderen Gelegenheit zu zeigen versuchen.

21.

Analysis aequationum aliquot, functiones duplicis argumenti (x, y) determinantium, videlicet

I. $(x, (y, z)) = ((x, y), z)$,
II. $(x, (y, z)) = (y, (y, z))$,
III. $(x+y, z) = (x, (y, z))$.

(Auct. *Carolo Joh. Ds. Hill* Lond. Goth.)

I. Analysis aequationis (ad functiones F, f determinandas idoneae)

$F^x(f^y z) = F^{(f^x y)} z$, **seu etiam** $F(x, (y, z)) = F((x, y), z)$.

Ponatur $f^x y = p$, atque $f^y z = q$; eritque $F^x q = F^p z$. Quae aequatio differentietur secundum y et z, quo obtineatur

1. $F_1^x q . \underset{y}{\partial} q = F^{1p} z . \underset{y}{\partial} p$,
2. $F_1^x q . \underset{z}{\partial} q = F_1^p z$ (positis scilicet $\partial F^p z = F_1^p z$, $\partial F^p z = F^{1p} z$, etc.).

Erit igitur exhinc $\underset{y}{\partial} q . F_1^p z = \underset{y}{\partial} q . \underset{z}{\partial} q . F_1^x q = \underset{z}{\partial} q . F^{1p} z . \underset{y}{\partial} p$, ideoque $\underset{y}{\partial} q . F_1^p z = \underset{z}{\partial} q . \underset{y}{\partial} p . F^{1p} z$. Habetur vero itidem ex modo positis $\underset{y}{\partial} p = f_1^x y$, $\underset{y}{\partial} q = f^{1y} z$ atque $\underset{z}{\partial} q = f_1^y z$; quibus suffectis aequatio integranda erit $f^{1y} z . F_1^p z = f_1^y z . f_1^x y . F^{1p} z$. Jam vero y quantitas est arbitraria, quae constans haberi seu $= c$ poni potest; quo facto $\frac{f_1^y z}{f^{1y} z}$ seu $\frac{f_1^c z}{f^{1c} z}$ aperte functio erit ipsius z, quae $= \varphi_1 z$ ponatur. At etiam tum $f_1^x c$ ipsius p est functio, quandoquidem $f^x c = p$, ideoque tum x tum $f_1^x c$ huiusmodi est. Ponatur igitur $f_1^x y = f_1^x c = \frac{1}{\psi_1 p}$; et ita nostra aequatio erit

$$\psi_1 p . F_1^p z = \varphi_1 z . F^{1p} z, \text{ seu } \psi_1 p . \underset{z}{\partial} F = \varphi_1 z . \underset{p}{\partial} F.$$

Quae igitur ex regulis notissimis integrata suppeditat

$$F^p z = F = \Phi^{-1}(\varphi z + \psi p), \text{ seu etiam } \Phi(F^p z) = \varphi z + \psi p.$$

Hinc vero elucet, functionem quaesitam $(F^x y)$ **separabilem** esse, i. e. ejusmodi ut simplici cuidam functioni (Φ) subjecta quantitates ipsius arbitrariae **separatim** exhibeantur (sub forma nempe $\Phi(F^x y) = \psi x + \varphi y$).

Patet vero, propositam functionum formam, ejusmodi functionem separantem (Φ) locum haberi, semper testaturam.

Quod vero ad functiones substituendas (p et q) (seu $f^x y$ et $f^y z$) attinet, et hae ejusdem indolis invenientur. Quoniam enim $F^x q = F^p z$, erit

$$\Phi F^x q = \Phi F^p z, \text{ seu } \psi x + \varphi q = \psi p + \varphi z.$$

Hac igitur aequatione secundum x, y et z differentiata, obtinebimus

$$1. \quad \psi_1 x = \underset{x}{\partial} p . \psi_1 p,$$

$$2. \quad \underset{y}{\partial} q . \varphi_1 q = \underset{y}{\partial} p . \psi\, p,$$

atque

$$3. \quad \underset{z}{\partial} q . \varphi_1 q = \varphi_1 z.$$

Functionibus igitur $\varphi_1 p$ et $\psi_1 q$ ex aequat. (1.) et (3.) elicitis atque in (2.) substitutis, habebimus

$$\frac{\underset{y}{\partial} q . \varphi_1 z}{\underset{z}{\partial} q} = \frac{\underset{y}{\partial} p . \psi_1 x}{\underset{x}{\partial} p}, \text{ seu } \frac{f^{x_1 y} z . \varphi_1 z}{f_1^y z} = \frac{f_1^x y . \psi_1 x}{f^{1x} y};$$

quae aequatio, cum x et z arbitraria sint, haudquaquam aliter subsistere potest, quam ut utraque ipsius pars eidem ipsius y functioni (ex. gr. $= \chi_1 y$) aequivaleat. Habemus igitur

$$\underset{y}{\partial} q . \varphi_1 z = \underset{z}{\partial} q . \chi_1 y \text{ et } \underset{y}{\partial} p . \psi_1 x = \underset{x}{\partial} p . \chi_1 y;$$

indeque integrando $q = Q(\varphi z + \chi y)$, atque $p = P(\psi x + \chi y)$, exsistentibus P et Q functionum arbitrariarum signis.

Functiones igitur p et q ideoque et f ejusdem sunt formae ac F. Ut vero hae accuratius definientur, valores jam obtenti in aequationem primariam $F^x q = F^p z$ (seu $F^x(f^y z) = F^{(f^x y)} z$) substituendi sunt; quae operationi Φ subjecta in hanc migrat

$$\psi x + \varphi q = \psi p + \varphi z,$$

seu substitutione simplici effecta

$$\psi x + \varphi Q(\varphi z + \chi y) = \psi P(\psi x + \chi y) + \varphi z.$$

Positis vero $\psi x = X$, $\varphi z = Z$, $\chi y = Y$, $X + Y = U$, $Z + Y = V$, $\varphi(QV) = HV$ et $\psi(PU) = GU$, erit ita $X + HV = GU + Z$, ideoque differentiando secundum X et Z, $1 = G_1 U$, et $H_1 V = 1$, iterumque in dU et dV ducendo et integrando $GU = U + a$, et $HV = V + b$ (seu $\psi PU = U + a$ et $\varphi QV = V + b$), ideoque

$$X + V + b = U + a + Z,$$

seu

$$\psi x + \varphi z + \chi y + b = \psi x + \chi y + \varphi z + a;$$

quae aequatio bene sibi constat, si $b = a$ sumitur *). Quoniam igitur $\psi Pu = u + a$, et $\varphi Qv = v + a$, erunt $Pu = \psi^{-1}(u+a)$ et $Qv = \varphi^{-1}(v+a)$, seu functiones P et Q inversae ipsarum ψ et φ, si const. $a = 0$ accipitur. Erit igitur $P(\psi x + \chi y) = \psi^{-1}(\psi x + \chi y + a)$ seu $p = \psi^{-1}(\psi x + \chi y + a)$, atque similiter $q = \varphi^{-1}(\varphi z + \chi y + a)$. Qui valores universim aequationi $F^x q = F^p z$ seu $\psi x + \varphi q = \psi p + \varphi z$ satisfaciunt.

Sin vero praeterea jubetur, ut $p = f^x y$ et $q = f^y z$ i. e. p eadem ipsorum x et y, ac q ipsorum y et z, sit functio; facile demonstratur, functiones φx et χx non nisi constante a se invicem differre posse. Quoniam enim

$$f^x y = p = \psi^{-1}(\psi x + \chi y + a) \text{ et } f^y z = q = \varphi^{-1}(\varphi z + \chi y + a),$$

ideoque, si in ultima y et z cum x et y commutantur, itidem $f^x y = \varphi^{-1}(\varphi y + \chi x + a)$, erit $\psi^{-1}(\psi x + \chi y + a) = \varphi^{-1}(\varphi y + \chi x + a)$, qualiacunque x et y fuerint. Jam vero, functionibus ψ, χ et φ vel diversissimis exsistentibus, y obiter ita in x exprimi poterit, ut universim sit $\psi x + \psi y = \varphi y + \chi x$, et tamen utraque hujus aequationis pars arbitraria et ex. gr. $= u - a$. Quo facto erit $\psi^{-1} u = \varphi^{-1} u$, quod $= v$ ponatur, unde et invertendo $\psi v = u = \varphi v$. Patet igitur, universim fore functiones φ et ψ easdem, sicuti et ipsarum inversas ψ^{-1} et φ^{-1}. Sin vero functio $\varphi^{-1} u$ ejus fuerit indolis, ut $\varphi^{-1}(u + c) = \varphi^{-1} u$ sit, exsistente c constante determinato; tum sane erit $\psi^{-1} u = \varphi^{-1}(u + c)$ seu etiam $\psi^{-1} u = \varphi^{-1}(u + nc)$, exsistente n numero integro; ideoque, si hoc $= v$ ponatur, erit invertendo $u = \psi v = \varphi v - nc$, ideoque functio ψ tantum constante a φ differet. Ejusmodi vero functionis φ^{-1} indole posita, universim ex aequatione $\varphi^{-1} u = \varphi^{-1} z$ concluditur $z = u + mc$, exsistente m numero integro. Erit vero ex aequationibus paulo ante positis

$$\varphi^{-1}(\chi x + \varphi y + a) = \varphi^{-1}(\psi x + \chi y + a)$$

---

*) Hanc analyseos partem aliquanto simplicius absolveremus, si proposuissemus hoc Lemma, ex Calculo functionum hauriendum:

„Si $X + f(Y+Z) = \overset{1}{Z} + F(\overset{1}{Y} + \overset{1}{X})$ fuerit, erit

$$\overset{1}{Y} = c\,Y + c_{,,},$$
$$\overset{1}{Z} = c_{,}Z + c_{,,,},$$
$$\overset{1}{X} = \frac{c}{c_{,}}X + c_{\text{IV}}$$

et $fu = c_{,}u + c_{\text{V}} + c_{,,,} + \frac{c_{,}}{c}(c_{,,} + c'_{\text{IV}})$ atque $Fu = \frac{c_{,}}{c}u + c_{\text{V}}$;" id quod facile demonstratur.

ideoque

$\chi x+\varphi y+a=\psi x+\chi y+a+mc$, seu $\chi x-\psi x=\chi y-\varphi y+mc$; haecque aequatio jam pro valoribus quibusvis ipsorum x et y valet, id quod fieri nequit, nisi utrumque membrum constans fuerit, ex. gr. $=b$. Erit igitur $\chi y=\varphi y+b-mc$, atque $\chi x=\psi x+b$, seu $\chi x=\varphi x+b-nc$, cum $\psi x=\varphi x-nc$ sit. Ponendo vero x loco ipsius y, erit etiam $\chi x=\varphi x+b-mc$; quare numeri integri n et m aequales sint necesse est. Erit igitur demum

$$\psi x=\varphi x-nc,$$
$$\chi x=\varphi x-nc+b \text{ seu}$$
$$\chi x=\psi x+b, \text{ et } \varphi x=\psi x+nc$$

atque

$$f^x y=\varphi^{-1}(\varphi y+\varphi x-nc+a+b)$$

seu

$$f^x y=\psi^{-1}(\psi x+\psi y+a+b)$$

atque

$$F^x y=\Phi^{-1}(\varphi y+\varphi x-nc).$$

Quae quidem aequationes genuinam problematis nostrae

$$F^x(f^y z)=F^{(f^x y)}z \text{ seu } F(x,f(y,z))=F(f(x,y),z)$$

solutionem exhibent.

Hoc vero tantum addimus, si itidem requireretur, ut functiones F et f eaedem forent, $a+b=0$ et $\Phi=\varphi$ ponendum esse, vel saltem $\Phi^{-1}u=\varphi^{-1}(u+a+b)$, quo facto $F^x y=\varphi^{-1}(\varphi y+\varphi x-nc+a+b)=f^x y$ erit, atque $f(x,f(y,z))=f(f(x,y),z)$, ut requiritur. Hic vero casus jam a cel. Abel in hujus Diarii T. I. p. 11. ita pertractatus est, ut simul $f(x,f(y,z))$ symmetrica foret functio; id, quod haud opus est, ut similis solutio obtineatur, sicuti ex praecedenti analysi patet. Haec altera conditio occurrit in problemate sequente.

II. Analysis aequationis

$$\mathrm{F}(x,\mathrm{f}(y,z))=F(y,f(x,z)) \text{ seu } (x,(y,z))=(y,(x,z))$$

functiones F, f, F, f seu solummodo functionem duplicem (x,y) determinantis.

Ponatur $\mathrm{f}(y,z)=(y,z)=p$, atque $f(x,z)=(x,z)=q$ seu $=q^x z$, et differentietur aequatio data $(x,p)=(y,q)$ secundum y et z; quo facto,

erit $p^1.(x, \overset{1}{p}) = (\overset{1}{y}, q)$ *), atque $p_1.(x, \overset{1}{p}) = q_1.(y, \overset{1}{q})$, ideoque

$$\underset{p}{\partial}(x, p) \text{ seu } (x, \overset{1}{p}) = \frac{1}{p^1}.(\overset{1}{y}, q) = \frac{q_1}{p_1}.(y, \overset{1}{q}).$$

Jam vero habeatur z constans, eritque $x = (, z)^{-1} q$ **), ideoque et $q_1 (= q_1^x z)$, functio solius q, quam posteriorem per $1 : \partial Q$ designemus; nec non erit $p_1 : p^1 (= p_1^y z : p^{1y} z)$ functio solius y, scilicet $= 1 : \partial Y$. Quare et substitutione rite effecta

$$\partial Q.(\overset{1}{y}, q) = \partial Y.(y, \overset{1}{q}), \text{ seu } \partial Q.\underset{y}{\partial}(y, q) = \partial Y.\underset{q}{\partial}(y, q),$$

ideoque integrando $(y, q) = \mathrm{f}(Y+Q)$. Similiter obtinetur $(x, p) = f(X+P)$, existente X functio solius x, atque P solius p, indeque aequatio proposita suppeditat $\mathrm{f}(Y+Q) = f(X+P)$, ideoque, si $fu = \mathrm{f}Fu$ est, et functio f tollitur, $Y+Q = F(X+P)$, seu in signis separatis

$$\Phi y + \Psi(x, z) = F(\Phi x + \psi(y, z)).$$

Ponebamus vero z constans, et $\frac{q_1 . p'}{p_1} = \frac{\partial Y}{\partial Q}$; patet vero hanc aequationem pro z variabile etiam locum habituram, dummodo aequatio $q = (x, z)$ in subsidium vocatur. Haec vero conditio functiones p et q determinat; melius tamen aequatio praecedens hoc adjuvat. Istam enim secundum x et z differentiemus, eritque

$$\underset{x}{\partial}\Psi(x, z) = \Phi_1 x.F_1 \text{ et } \underset{z}{\partial}\Psi(x, z) = \underset{z}{\partial}\psi(y, z).F_1,$$

posito scilicet F_1 loco ipsius $F_1 u$ seu $\underset{w}{\partial} Fu$, ideoque $\frac{\overset{x}{\partial}\Psi}{\overset{z}{\partial}\Psi} = \frac{\varphi_1 x}{\underset{z}{\partial}\psi(y, z)}$. At $\Psi (= \Psi(x, z))$ ipso y caret, ideoque et $\underset{z}{\partial}\psi \left(\text{utut} = \frac{\overset{z}{\partial}\Psi}{\overset{x}{\partial}\Psi}.\Phi_1 x \right)$ careat necesse est. Sit igitur $\underset{z}{\partial}\psi = \partial Z$ $(= \chi_1 z =$ functioni solius $z)$, eritque integrando $\psi = Z + \overset{1}{Y}_{(y)}$, praetereaque, cum jam $\frac{\overset{x}{\partial}\Psi}{\overset{z}{\partial}\Psi} = \frac{\varphi_1 x}{\partial Z}$ sit, erit simul $\Psi = \Psi(Z + \Phi x)$, ideoque nostra aequatio modo exhibita in hanc migrat

$$\Phi y + \Psi(Z + \Phi x) = F(\Phi x + Z + \overset{1}{Y}),$$

seu in $\quad \Phi y + \Psi q' = F(q' + Y)$, posito $q' = \Phi x + Z$.

---

*) Ponimus $\underset{z}{\partial}(x, z) = (x, \overset{1}{z})$, et $\underset{x}{\partial}(x, z) = (\overset{1}{x}, z)$.

**) Si fuerit $q = (x, z)$ seu $= (x,) z$, erit nobis retro (reversim) $z = (x,)^{-1} q$ seu $= (x^{-1}, q)$ atque $x = (, z)^{-1} q$.

Haec vero aequatio secundum Lemma subjunctum *) suppeditat seorsim tum $\Psi q' = c.q' + c_,$ atque $\Phi y = c\overset{1}{Y} - c_{,,}$, tum $Fu = cu + c_, - c_{,,}$, qua aequatione functio F omnino determinata est, sicut Ψ et Φ antecedentibus. Jam vero restituamus $\Phi y + c_{,,}$ in locum ipsius $c\overset{1}{Y}$, et ponamus $Z = \chi z$, eritque nostra aequatio

$$\Phi y + c_, + c(\Phi x + \chi z) = c\left(\Phi x + \chi z + \frac{\Phi y + c_{,,}}{c}\right) + c_, - c_{,,}$$

omnino identica; quare nostra analysis bene sibi constat.

Ut vero omnibus numeris absolvatur, vestigia jam pervagata iterum et quidem paulo accuratius premamus. Habuimus igitur $(y, q) = \mathrm{f}(Y+Q)$, $(x, p) = f(X+P)$ atque $(Y+Q) = F(X+P)$, posuimusque tum $Y+Q = \Phi y + \Psi(x, z)$, tum $X+P = \Phi x + \psi(y, z)$, nempe separatim $Y = \Phi y$, $Q = \Psi(x, z)$, quae et $= Q(q) =$ functio ipsius q est, itemque $X = \Phi x$, et $P = \psi(y, z) = P(p)$. At invenimus

$$\Psi(x, z) = \Psi(Z + \Phi x) = \Psi(\chi z + \Phi x) = c(\chi z + \Phi x) + c_,$$

atque

$$\psi(y, z) = Z + \overset{1}{Y} = \chi z + \frac{\Phi y + c_{,,}}{c}, \text{ nec non } Fu = cu + c_, - c_{,,}.$$

Quoniam vero $(y, q) = (x, p)$, erit $\mathrm{f}(Y+Q) = f(X+P)$, et $\mathrm{f}F(X+P) = f(X+P)$, ideoque $\mathrm{f}Fu = fu$, seu $\mathrm{f}(cu + c_, - c_{,,}) = fu$, quare functiones f et f non nisi constantibus argumentorum differunt. Erit praeterea

$$P(p) = (\psi(y, z) =) \chi z + \frac{\Phi y + c''}{c}, \text{ et (ob } \Psi(x, z) = Q)$$
$$Q(q) = c(\chi z + \Phi x) + c_1,$$

ideoque invertendo p seu

$$(y, z) = P^{-1}\left(\chi z + \frac{\Phi y + c_{,,}}{c}\right),$$

---

*) Lemma. Si fuerit $\overset{1}{Y} + \overset{1}{X} = F(\overset{0}{Y} + \overset{0}{X})$, nempe $Y = Y_{(y)}$ et $X = X_{(x)}$ (i. e. $\overset{1}{Y}$ et $\overset{1}{Y}$ functiones solius y, atque $\overset{0}{X}$ et $\overset{1}{X}$ solius x), erit $\overset{1}{Y} = c\overset{0}{Y} + c_,$, $\overset{0}{X} = c\overset{1}{X} + c_{,,}$ atque $Fu = cu + c_, + c_{,,}$.

Differentiemus enim secundum x et y; habebimusque $F_1 . \partial\overset{0}{Y} = \partial\overset{1}{Y}$, $F_1 . \partial\overset{0}{X} = \partial\overset{1}{X}$, ideoque $\frac{\partial\overset{1}{Y}}{\partial\overset{0}{Y}} = \frac{\partial\overset{1}{X}}{\partial\overset{0}{X}}$, id quod absurdum est, nisi utraque pars eidem constanti (c) aequetur. Erit igitur $\partial\overset{1}{X} = c\partial\overset{0}{Y}$, $\partial\overset{1}{X} = c\partial\overset{0}{X}$, ideoque integrando, $\overset{1}{Y} = c\overset{0}{X} + c_,$ atque $X = c\overset{0}{X} + c_{,,}$. Posito vero $\overset{0}{X} + \overset{0}{Y} = u$, hisque valoribus in aequationem datam introductis, erit $Fu = c\overset{0}{Y} + c_, + c\overset{0}{X} + c_{,,} = cu + c_, + c_{,,}$. *Q. E. D.* cor. Si fuerit $\mathrm{f}(\overset{1}{Y} + \overset{1}{X}) = f(\overset{0}{Y} + \overset{0}{X})$, erit $\overset{1}{Y} = c\overset{0}{Y} + c_,$, $\overset{1}{X} = c\overset{0}{X} + c_{,,}$, atque $fu = \mathrm{f}(cu + c_, + c_{,,})$.

posito scilicet $P^{-1}P(u) = u$, et similiter

$$q = (x, z) = Q^{-1}(c(\chi z + \Phi x) + c_{,});$$

simulque, substitutione effecta,

$(y, q) = \mathrm{f}(\Phi y + c(\chi z + \Phi x) + c_{,})$, atque $(x, p) = f\left(\Phi x + \chi z + \frac{\Phi y + c''}{c}\right)$, seu $(x, p) = \mathrm{f}(c(\Phi x + \chi z) + \Phi y + c_{,})$. Erit igitur, his valoribus introductis, ipsa aequatio ab initio proposita rite resoluta haec:

$$f(c(\Phi x + \chi z) + \Phi y + c_{,}) = f(\Phi y + c(\chi z + \Phi x) + c_{,}),$$

quae aperte bene sibi constat.

Ponamus vero $\Phi y + c_{,,} = c.\gamma y$, $c_{,} = ce$, $Qq = c_{,} + c.'Qq$, eritque

$$\mathrm{f}(y, z) = p = (y, z) = P^{-1}(\chi z + \gamma y), \text{ et}$$
$$f(x, z) = q = (x, z) = {}'Q^{-1}(\Phi x + \chi z),$$

atque

$$\mathrm{F}(x, p) = (x, p) = f(\Phi x + \chi z + \gamma y) = f(\Phi x + P_{(p)}), \text{ et}$$
$$F(y, q) = (y, q) = f(\Phi x + \chi z + \gamma y) = f(\gamma y + {}'Qq).$$

Omnes igitur hae functiones eadem forma gaudent, ac $p\ (= P^{-1}(\chi z + \gamma y))$; quare et eidem aequationi differentiali satisfaciant, necesse est. Quam ut inveniamus, differentiamus aequationem $p_{(z)}^{(y)} = P^{-1}(\chi z + \gamma y)$ secundum z et y, habebimusque $p' = \gamma_1 y . P_1^{-1}$, $p_{,} = \chi_1 z . P_1^{-1}$, ideoque $p' : p_{,} = \gamma_1 y : \chi_1 z$ seu $Lp' - Lp_{,} = L\gamma_1 y - L\chi_1 z$. Erit igitur, nova differentiatione instituta, $\partial_y \partial_z Lp' - \partial_y \partial_z Lp_{,} = 0$, seu $\partial_z \frac{p''}{p'} = \partial_y \frac{p_{,,}}{p_{,}}$, tandemque

$$\frac{p' p_{,}'' - p'' p_{,}'}{(p')^2} = \frac{p_{,} p_{,,}' - p_{,,} p_{,}'}{(p_{,})^2};$$

quae quidem universalis est conditionis forma modo expetita, cui omnes istae functiones p, q, $r\ (= (x, p))$, et $s\ (= (y, q))$ aeque satisfaciunt. Haec de resolutione universali jam sufficiant.

Sin vero in aequatione ab initio proposita unam eandemque ubique volumus functionem, ex. gr. $(x, p) = f(\Phi x + \psi p) = F(x, p)$, et similiter $(y, q) = F(y, q)$ etc.; erit $(y, q) = f(\Phi y + \psi q)$, $p = (y, z) = f(\Phi y + \psi z)$, atque $q = (x, z) = f(\Phi x + \psi z)$; ideoque hoc casu aequatio data

$$f(\Phi x + \psi f(\Phi y + \psi z)) = f(\Phi y + \psi f(\Phi x + \psi z)).$$

Jam vero in hac eum ipsius z ponamus valorem, qui $\psi z = 0$ efficiat, eritque

$$f(\Phi x + \psi f \Phi y) = f(\Phi y + \psi f \Phi x),$$

ideoque ex cor. Lemmatis modo descripti tum

$fu = f(cu + c_{,} + c_{,,})$, tum $\psi f \Phi x = c\Phi x + c_{,,}$, $\psi f \Phi y = \frac{1}{c}(\Phi y - c_{,})$, seu (ponendo scilicet modo $\Phi x = u$ et modo $\Phi y = u$)

$$\psi f u = c u + c_{,,} = \frac{1}{c}(u - c_{,});$$

id quod non convenit nisi fuerit $c^2 = 1$ et $c_{,,} = -c_{,} : c$, ideoque aut

$$f u = f(u + 0 c_{,}), \text{ aut } f u = f(2 c_{,} - u).$$

Jam igitur, si $c = 1$ fuerit, $f u$ omnino arbitraria manet; sin vero $c = -1$, $c_{,}$ ex indole functionis f determinetur necesse est, aut haec ipsa certae sit indolis. Posito vero $f u = v$, erit invertendo

$$u = f^{-1} v, \text{ et } \psi v = \frac{1}{c} f^{-1} v - \frac{c_{,}}{c} \text{ aut } c f^{-1} v + c_{,,},$$

ideoque

$$\psi x = c_{,,} - f^{-1} x \text{ aut } \psi x = c_{,,} + f^{-1} x,$$

i. e. ψx non nisi constante ab inversa ipsius $f x$ differt, ideoque erit

$$(x, z) = f(\varphi x + f^{-1} z + c),$$

aut (constante scilicet c in functione φ comprehenso)

$$F(x, z) = f(\varphi x + f^{-1} z),$$

functio duplicis argumenti ubique eadem (F), aequationi datae

$$(x, (y, z)) = (y, (x, z)) \text{ seu } F(x, F(y, z)) = F(y, F(x, z))$$

satisfaciens.

Ipsa vero aperte symmetrica evadit, ponendo

$$\varphi x = f^{-1} x, \text{ seu } (x, z) = \varphi^{-1}(\varphi x + \varphi z + c);$$

qui est casus jam ab cel. Abel pertractatus. Generatim vero si dantur functiones (algebraicae vel transcendentes), (x, p), (y, q), $(x, z) = q$, $(y, z) = p$, aequationi datae $(x, p) = (y, q)$ vel etiam speciatim differentiali isti

$$F_{,}^{2} . (F' . F_{,}'' - F'' . F_{,}') = F'^{2} . (F_{,} . F_{,,}' - F_{,,} . F_{,}')$$

satisfacientes (ubi F unius cujusque locum tenet), tum dantur functiones (φ, ψ), quae harum argumenta separant, nempe ejusmodi ut universim $\Pi(F(x, y)) = \varphi x + \psi y$ sit. Haeque ex forma speciali functionis F facile determinantur. Est scilicet $\varphi_1 x : \psi_1 y = \frac{\partial F}{x} : \frac{\partial F}{y}$, haecque pars dextra in factores separatos $X : Y$ necessario resolubilis, ideoque $\varphi x = c \int X \, dx$, atque $\psi y = c \int Y \, dy$. Res igitur maximi est momenti, ut perquirantur functiones algebraicae vel transcendentes notae $F(p, q$ etc.) isti aequationi differentiali satisfacientes, seu huic

$$F_{,} . F' . (F_{,} . F_{,}'' - F' . F_{,,}') = F_{,}' . (F_{,}^{2} . F'' - F'^{2} . F_{,,}),$$

cum ita indoles novarum forte functionum integralium pernoscatur. Nonnullae algebraicae jam notissimae sunt.

Praeterea vero monemus, ipsam formam propositam ad functiones iteratas pertinere. Si enim fuerit data functio $f x = (a, x)$ $\left(\text{Ex. gr.} = \frac{a + x}{1 + a x}\right)$,

ejusque iterata $f^r x = (\overset{r}{a}, x)$, proveniente scilicet $(\overset{r}{a})$ functione ipsorum a et r in locum constantis datae a, erit ex indole harum functionum

$$f^r(f^n x) = f^n(f^r x), \text{ seu } (\overset{r}{a}, (\overset{n}{a}, x)) = (\overset{n}{a}, (\overset{r}{a}, x));$$

quae quidem aequatio istius ab initio propositae formam omnino refert. Quoniam vero ubique eadem sit, haec ex modo traditis ita resolvitur:

$$(\overset{r}{a}, x) = f(\Phi \overset{r}{a} + f^{-1} x).$$

Nec infitias ibimus, nobis praesens problema ex ipsa iterationis theoria occurrisse; in qua (mox edenda) ostendimus, quam affines functiones iteratae eis, quae secundum hujusmodi formulam $\Phi F(x, y) = \Phi x + \Phi y$ adduntur, sint, et quomodo utraeque quasi unam eandemque familiam constituant. Ex problemate functiones duplicis argumenti iterandi simile problema functionale elicuimus, nempe hoc (si f est functionis cujusdam signum, sicuti (z, x, y), etc.):

$$(v, (\mathfrak{x}, x, y), (f(\mathfrak{x}), y, x)) = (\mathfrak{x}, (v, x, y), (f(v), y, x)),$$

cujus analysin perquirendi potestatem et gaudium Lectori doctissimo relinquimus. Quomodo ex hujus solutione Theoremata maximi momenti, tum functionum duplicium et triplicium indolem illustrantia, tum aequationum differentialium inseparabilium integrationem subministrantia, eliciantur, olim docebimus. Interim functionum, secundum unum argumentum iteratarum, analysin breviter jam subjungimus in Problemate III.

III. Analysis aequationis functionalis

$$f^{x+y} z = f^x(f^y z), \text{ seu } (x+y, z) = (x, (y, z))$$

quae indolem functionis $f^x z$, ex iteratione ipsius fz ortae, universim exprimit.

Ponatur $p = f^y z = (y, z)$, eritque aequatio data $(x+y, z) = (x, p)$, quae, secundum x et y separatim differentiata, praebet

$$(\overset{1}{x}+y) = (\overset{1}{x}, p) \text{ et } = (x, \overset{1}{p}).(\overset{1}{y}, z), \text{ ideoque } \frac{(\overset{1}{x}, p)}{(x, \overset{1}{p})} = (\overset{1}{y}, z).$$

Jam vero z pro constante habito, erit, ob $p = (y, z)$, $(\overset{1}{y}, z)$ functio quaedam ipsius p, quam per $\frac{1}{\partial P}$ insigniamus; habebimusque $\frac{\overset{x}{\partial}(x, p)}{\overset{p}{\partial}(x, p)} = \frac{1}{\overset{p}{\partial} P}$, ideoque, ex regulis notissimis integrando, $(x, p) = \Phi(x + P)$. Posuimus

vero $\underset{y}{\partial} p = \underset{y}{\partial}(y, z) = (\overset{1}{y}, z) = \frac{1}{\partial P}$, ideoque $\underset{y}{\partial} p . \underset{p}{\partial} P = 1$, indeque $\underset{y}{d} p . \underset{p}{\partial} P = dy$, et integrando $P = y + Z$, exsistente $Z = Z_{(z)}$, i. e. functione ipsius z. Erit igitur $(x+y, z) = (x, p) = \Phi(x+P)$ seu $(x+y, z) = \Phi(x+y+Z_{(z)})$, sicut $(x, p) = \Phi(x+P_{(p)})$. Ut vero jam hae functiones eaedem sint, nihil ulterius requiritur, quam ut Z eadem ipsius z sit functio (ψ) ac P ipsius p, et ita $(x,p) = \Phi(x+\psi p)$ atque $(x+y, z) = \Phi(x+y+\psi z) = \Phi(x+\psi(y, z))$. Jam vero, si $\Phi(u+c) = \Phi u$ fuerit, erit $\psi(y, z) = rc+y+\psi z$, et invertendo $(y, z) = \psi^{-1}(rc+y+\psi z)$, exsistente n numero integro. Praeterea si ubique unam eandemque velis functionem (sicut et aequatio $f^x(f^y z) = f^{x+y}(z)$ jubet), sit necesse est $\Phi(=\psi^{-1}$ i. e.) ipsius ψ inversa, ideoque $f^y z = \psi^{-1}(rc+y+\psi z)$ et $f^x p = \psi^{-1}(rc+x+\psi p) = \psi^{-1}(2rc+x+y+\psi z)$ atque $f^{x+y} z = \psi^{-1}(rc+x+y+\psi x)$; hisque formulis, quae aequationi $f^{x+y} z = f^x p$ ab initio propositae satisfaciunt, si vel $c = 0$ fuerit vel $\psi(u+rc) = \psi u$, problema nostrum solutum est. Hoc et ita nobis adgredi licet, ut x et y jam ab initio permutemus; quo facto in problema II. incidimus, quod solutum praebet $f^x p = \mathfrak{f}(\overset{x}{\Phi a} + \mathfrak{f}^{-1} p)$, unde solutiones utrasque comparando, $\overset{x}{\Phi a} = rc + x$ obtinetur. Utrasque formas junctim in usum vocando analysin aliquanto simplicius absolveris. Quacunque vero via ingressus fueris, semper ad eandem formam resolutam pervenies, nempe $f^x y = \psi^{-1}(x+\psi y)$; quae docet, partim functionem iteratem $f^x y$ per simpliciorem ψx ejusque inversam $\psi^{-1} x$, easque unius argumenti variabilis sicuti functio iterata simplex $f^1 y$ seu fy, semper exprimi, — partim, dari functionem ψ, quae argumenta iteratae separet, scilicet praebeat $\psi f^x y = x + \psi y$, quae res in toto calculi analytici ambitu maximi est momenti.

Ponendo $x = \psi u$, et $f^x y = f^{\psi u} y = g^u y = z$, habebimus $\psi(g^u y) = \psi u + \psi y$, indeque videmus, functiones ψu et ψy invicem sibi addi posse seu in unicam ejusdem generis functionem ψz colligi, sicut trigonometricae et ellipticae. Et vice versa demonstrari potest, has, jam ob insignem hanc proprietatem civitate analytica donatas functiones, revera ad iteratas pertinere. Haec res multaeque aliae in causa fuerunt, cur jam per multos annos singularem functionibus iteratis dedimus curam, doctrinamque, quam de ipsis composuimus, olim publici juris faciemus. Praecedens analysis ostendit, et alias functionum formas huc pertinere.

22.

De factoribus numerorum compositorum dignoscendis.

(Auct. *Carolo Joh. Ds. Hill* Lond. Goth.)

In elementis Arithmeticis modus, quo factores 2, 3, 5 (interdum et 11) ipsorumque potestates eliciantur, satis expeditus edocetur. Factor vero 7, quamquam simplicissimus, plerumque, defectu regulae commodioris, omittitur. Hanc igitur elementorum lacunam expleturi, modum G. W. Krafti; (Comm. Petrop. T. VII.) elaborantes, alium, ad factores quosvis eruendos aeque proficium, cujus alter casus quasi hujus inversus est modi, jam duobus abhinc annis invenimus, quem breviter demonstrationibus omissis (quoniam doctores has facillime inveniunt, et nobis otium rem tam fuse explicandi, ut discentibus elucescat, desit) proponere liceat. Quamquam vero noster modus unico superstruatur fundamento, tamen ob commodiorem usum tridivisum exhibere licet. In unoquoque vero casu numerorum auxiliarium indigemus, quorum inveniendorum modum postmodum trademus.

I. Primus operandi modus hoc signo $\binom{+\nu}{a}$ vel $\binom{-\nu}{a}$ definimus, ubi a et ν numeri sunt auxiliares a supposito factore (p) determinati; quorum ν indicat, quales in classes distribuendus est numerus datus (N), qui, num ex (p) componatur, perquirendus est; seu potius, ν docet, num N scribendus sit vulgari modo decadico seu in systemate arithmetico numerando, cujus basis est decem (quo casu $\nu = 1$), an in illo, cui est basis centum (quo casu $\nu = 2 = \mathrm{II}$), an in millesimali (si $\nu = 3$ vel potius $= \mathrm{III}$, quoniam numeris romanis ipsum ν insignimus) et s. p.

Alter vero auxiliaris (a) constans est factor in primam sinistrarum classem ducendus; quo facto, prout signum + vel — super (a) posito jubet, productum ad classem sequentem addendum vel ab hac subtrahendum est. Jam si ipsum (a) satis parvum electum est, ita exoritur numerus ipso N minor; hacque operatione saepius repetita, habebitur numerus (n) vel ipso p minor vel tam parvus, ac hac via haberi possit, quo facto facile aliquo modo dijudicabitur, num hic numerus (n) per p dividatur nec ne, indeque idem de numero N arguetur. Omnes enim huc spectantes regulae eo redeunt, ut loco numeri majoris dati N proveniat minor

(n), qui cum dato (N) secundum divisorem (modulum) (p) congruum sit. Hic modus haud melius explicatur, quam ipsum ad exemplum applicando, casu $\nu = 1$, quo quidem divisioni vulgari simillima nostra haec est operatio $(\overset{-1}{a.})N$, in eoque hac tanto facilior, quod quoti ziphrae non quaerendae sunt sed jam in prima quaque classe dividendi (N vel N') exstant. Sit Ex. I. gr. $a = 3$, $\nu = 1$, et $N = 277$, qui numerus operationi $\overset{-1}{3.}$ submittendus est, quam in schemate a latere apposito jam absolvimus. Sinistra sc. ziphra 2 abscinditur, ipsaque pro prima in quoto habetur, exsistente 3 divisore et $\dot{7}\ddot{7}$ (residuo ipsius N) dividendo; quare $\dot{7} - 3.\underset{\cdot}{2} = \underset{\cdot}{1}$; deinde idem cum novo residuo 17 perficimus ($\ddot{7} - 3.1 = 4$), et habemus factum (vel hoc casu residuum) ultimum $= 4$, quod si per 13 (quem factorem per $\overset{-1}{3.}$ recognoscimus, ut mox videbis) dividere liceret, et $N(=277)$ per 13 divideretur; sin minus, idem residuum (4) subministrat.

Ex. 1.

$$\begin{array}{rl|l}
\overset{-1}{3.}) & 2|\dot{7}\ \ddot{7} & (2 \\
 & \cdot\ 6| & * \\
\hline
3) & \ldots 1|\ddot{\bar{7}} & (1 \\
 & \cdot\ \ 3 & \cdot \\
\hline
(p=13)^{*}) & \ \ 4 &
\end{array}$$

Similis omnino est operatio $(\overset{+1}{a.})$, praeterquam quod addendum sit productum, quod modo subtrahabamus.

Sit Ex. gr. Numeri N, ν, a iidem, ac in Ex. pr. eritque $2.3 = 6^*$, $7 + 6^* = 13$; $3.1 = 3$, $3 + 3 = 6$; $3.6 = 18$, $18 + 7 = 25$; $3.2 + 5 = 11$, $1 + 3.1 = 4$, $= N'$. Patet vero operationem $\overset{+1}{3.}$ repeti posse, donec factum ultimum < 10 sit; Ex. gr. cum $N = 99$. (Hoc vero casu justo laborosior est, quia numerus (3) cum exponente (I) in forma $(\overset{+1}{3.})$, quae ad factorem 7 pertinet, optime haud sit electus.)

Ex. 2.

$$\begin{array}{rl}
\overset{+1}{3.}) & 2|77 \\
 & \cdot\ 6^* \\
\hline
 & 1|3 \\
 & \cdot\ 3 \\
\hline
 & 6|\ 7 \\
 & \cdot\ 18 \\
\hline
 & 2|\ 5 \\
 & \cdot\ \ 6 \\
\hline
 & 1|\ 1 \\
 & \cdot\ \ 3 \\
\hline
N' = & \ \ 4
\end{array}$$

Ex. 3. *a*.

$$\begin{array}{rl}
\overset{+1}{2.}) & 3|7|7 \\
 & \cdot\ 6| \\
\hline
 & 1|3 \\
 & \cdot\ 2 \\
\hline
 & 5|\ 7 \\
 & \cdot\ 10 \\
\hline
 & 1|\ 7 \\
 & \cdot\ \ 2 \\
\hline
N' = & \ \ 9
\end{array}$$

Ex. 3. *b*.

$$\begin{array}{rl}
\overset{+1}{3.}) & 9|9 \\
\hline
 & 2\ 7 \\
\hline
(p=7) & 3|6 \\
 & \ \ 9 \\
\hline
 & 1|5 \\
 & \ \ 3 \\
\hline
 & \ \ 8
\end{array}$$

Casu iterum $\nu = 2$, operationes $\overset{-11}{a.}$ et $\overset{+11}{a.}$ eundem in modum ac $\overset{-1}{a.}$ et $\overset{+1}{a.}$ instituuntur, praeterquam, quod ziphra sinistrarum prima vel duae priores

*) Ad ipsum schema complendum factorem (p), qui isto calculo eliciatur, ex tabula ad finem explicata et subjuncta excerptum apponimus.

abscindantur et in (*a*) ducantur, factumque cum duabus proximis per ± jungatur. Ex gr. $\nu = 2$, $a = 3$, $N = 99231$.

Ex. 4.

$\bar{3}^{\text{II}}$.) 9|92|31
−27
6|53
−18
3|51
−9
$\bar{N} = 42$ $(p = 103)$

Ex. 5.

$\overset{+}{3}^{\text{II}}$.) 9|92|31
27
11|93
33
12|61
36
$\overset{+}{N} = 97$ $(p = 97)$

(Computus Ex. 4. $92 - 3.9 = 65$, $53 - 3.6 = 35$, $51 - 3.3 = 42$.)

It. $\nu = 2$, $a = 2$, $N = 56789$.

Ex. 6.

$\bar{2}^{\text{II}}$.) 5|67|89
10
5|78
10
6|89
12
77 $(p = 17)$

Ex. 7.

$\overset{+}{2}^{\text{II}}$.) 5|67|98
10
7|78
14
9|29
18
47 $(p = 49)$ $(p = 7)$

Ex. 7. *a*.

$\bar{4}^{\text{II}}$.) N 5|67|89
−20
4|78
−16
6|29
−24
5

Inde vero facile intelligitur, quomodo computandae sint formulae $\left(\frac{\pm}{a}.\right)^{\text{III}} N$, $\left(\frac{\pm}{a}.\right)^{\text{V}} N$ etc.; quare nonnulla exempla apposuisse sufficiat:

$\nu =$ III (=3), $a = 2$, $N =$ 20641462357.

Ex. 8.

$\bar{2}^{\text{III}}$.) 206| 414|62357
−412
26|235
−52
1|837
−2
835 $(p = 167)$

Ex. 9.

$\overset{+}{2}^{\text{III}}$.) 206| 414|62357
+412
82|662
164
82|635
164
7|997
14
1|011
2
$\overset{+}{2}^{\text{III}}.N = 13$ $(p = 499)$

It. $N =$ 1821634.

Ex. 10.

$\bar{2}^{\text{III}}$.) 18|216|36
−36
18|036
−36
0 $(p = 167)$

It. $a = 5$.

Ex. 12.

$\bar{3}^{\text{III}}$.) 18|216|36
−54
16|236
−48
188 $(p = 17, 59)$

It. $\nu = 4$, $a = 1$.

Ex. 11.

$\bar{1}^{\text{IV}}$.) 1598| 1817 (=N)
−1598
219 $(p = 73, 137)$

Not. Ad operationem $(\overset{-\nu}{a.})$ observandum est, prima classe in (a) ducta secundam superante, vel mutuandum esse p vel hujus multiplum, vel a prima classe, quantum sufficit, detrahendum, ipsumque (a) tantum in residuum ducendum. Sic pro $(\overset{-1}{3.})$ 41, exoritur, loco $1-3.4$, $10+1-3.(4-1)=2$ $\left(\text{nempe } \overset{-1}{3.})\ \dot{4}\,\middle|\,\begin{array}{r}1\\-9\\\hline 2\end{array}\right)$, vel etiam (cum $p=13$ sit) $1+13-3.4=2$. — Cum vero $\nu>1$ fuerit, huic incommodo etiam eo medetur, quod prima classis non ν ziphris, sed tantum $\nu-1$ vel $\nu-2$ etc., donatur, ut in Ex. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 jam effectum est. Ex hac observatione Ex. 10. ita computaretur:

$$182|163|6 \text{ i. e } = 181+|1163|6$$
$$(\cdot 2)=-362|\ (=2.181)$$
$$8|016$$
$$-16$$
$$0$$

Obs. Patet, ipsum p vel multiplum np, quoties exstat, omitti posse.

II. Alter operandi modus primo simillimus est, praeterquam quod a dextra origo ducatur, isque per $(\overset{\nu-}{.a})$ vel $(\overset{\nu+}{.a})$ insignitur.

Nempe ν ziphrae a dextra abscinduntur, abscissaeque in (a) ductae, vel a reliquis subducuntur, scilicet pro forma $N(\overset{\nu-}{.a})$, vel ad has adduntur, pro $N(\overset{\nu+}{.a})$.

Ex. gr. Sit $N=4391633$, $\nu=1$, $a=3$, quare valor minimus formulae $43916\dot{3}\dot{3}(\overset{1-}{.3})=N'$ (hoc enim schema $(\overset{\nu\pm}{.a})$ postponitur), desideratur.

Not. Nemo non videt, operationem $(\overset{1-}{.a})$ divisioni inversae, seu ei, quae a dextra exordium facit, simillimam esse, in eoque faciliorem, quod ziphra unaquaeque quoti jam datur: est scilicet dexterrima residui, quae abscinditur, nempe prima $\dot{3}$ (uti divisio sit

Ex. 13.

$$\begin{array}{rl}
 & 43916\dot{3}|\dot{3}\ (\overset{1-}{.3}) \\
 & \quad -9| \\
(p=31) & \quad 15|4 \\
 & \quad -12| \\
 & \quad 90|3 \\
 & \quad -9| \\
 & \quad 8|1 \\
 & \quad 3| \\
 & 43|5 \\
 & 15| \\
 & 28 = N'
\end{array}$$

Ex. 14.

$$\begin{array}{rl}
 & 3658|6\ (\overset{1-}{.2}) \\
 & \quad -12| \\
(p=7) & \quad 364|6 \\
 & \quad -12| \\
 & \quad 35|2 \\
 & \quad -4| \\
 & \quad 3|1 \\
 & \quad -2| \\
 & \quad 1 = N'
\end{array}$$

quasi $\bar{3})\ 63\ (\dot{3}$; altera $=4$ (quo casu divisio est $\bar{3})\ 15\ (4)$, et sic
$\quad -9 = \bar{3}.\dot{3}$ $\quad\quad\quad

Ex. 18.

78590 | 476. $\left(\overset{\text{III}}{.}\,\overset{-}{2}\right)$
−952 | $\smile$.
*) 77 | 638
−1276 | $\smile$.
−1199 seu
*) 776 | 380
760 | $\smile$.
16 = N'.

Ex. 19.

(476.2 =) 78590 | 476. $\left(\overset{\text{III}}{.}\,\overset{+}{2}\right)$
+952 | $\smile$.
79 | 542
1084 | $\smile$.
1 | 163
326 | $\smile$.
327 = N'.

Not. *) Numerum datum vel jam obtentum (ut in hoc exemplo 77638) nihili signo (0) praevie augere aliquando prodest. Ita enim et valores negativi evitentur et interdum factum minus obtinebitur.

Not. Casus ($\alpha = 1$) cum casu primi modi $a = 1$, omnino convenit. Est scilicet $\left(\overset{+}{1}.\overset{\text{v}}{}\right) = \left(\overset{\text{v}}{.}\,\overset{+}{1}\right)$, atque $\left(\overset{-}{1}.\overset{\text{v}}{}\right) = \pm\left(\overset{\text{v}}{.}\,\overset{-}{1}\right)$; quae quidem signa, cum unitas non multiplicet, indicant, numerum, cui praefiguntur vel affiguntur, in classes v ziphrarum esse distribuendum, hasque classes vel sibi invicem addendas vel alterne subtrahendas. Signa vero $\left(\overset{+}{1}.\overset{\text{I}}{}\right)$ seu $\left(\overset{\text{I}}{.}\,\overset{+}{1}\right)$, $\left(\overset{-}{1}.\overset{\text{I}}{}\right)$ seu $\left(\overset{\text{I}}{.}\,\overset{-}{1}\right)$, et $\left(\overset{-}{1}.\overset{\text{II}}{}\right)$ seu $\left(\overset{\text{II}}{.}\,\overset{-}{1}\right)$, regulas, quae in elementis passim traduntur, pro factoribus 9, 11 et 101 recognescendis, breviter et concinne exprimunt. Si elementa scriberemus, hunc casum primo sane loco poneremus, utut qui simplicissima operatione aliquot factores statim prodit.

III. Tertius demum et quidem ultimus noster operandi modus per $\left(\overset{+}{\beta}.\overset{\nu}{\alpha}\right)$ et $\left(\overset{-}{\beta}.\overset{\nu}{\alpha}\right)$ insignitur; et ille jubet, ut a dextra ziphrae numero (ν) abscindantur atque in (α) ducantur, reliquaeque sinistrae in (β), productaque sibi invicem addantur aut a se subtrahantur, sicut signum $\pm$ indicat.

Sit Ex. gr. numerus datus 13785 operationi hujusmodi per $\left(\overset{+}{3}.\overset{\text{II}}{8}\right)$ insignitae (quo casu $\alpha = 8$, $\beta = 3$ et $\nu = \text{II}$) subjiciendus:
quem in finem 1) duas zifras a dextra abscindo, ... 137 | 85
2) deinde in factores jam datos . . . . . 3 et 8
partes modo abscissas duco, obtineoque producta . . . . . 411 + 680;
quae 3) tum ob signum + in summam colligo 1091, quae numerum dato minorem, jam hujus loco ulterius eodem vel alio modo perquirendum, con-

stituit; eodem ita: $3+\ 8$ et tertia vice: $3+\ 8$

$$\begin{array}{r|r} 10 & 91 \\ \hline & 728 \\ +\ 30 & \\ \hline & 758 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 7 & 58 \\ \hline 21 & \\ 464 & \\ \hline 485 & \end{array}$$

obtinetur a priori parum diversus; et si jam quarta vice eandem operationem institueres, majorem obtineres numerum; quare jam ab hac operatione ulterius instituenda desistas. Monemus vero universim, et hanc et priores operationes toties iterandas esse, dum numeros parum diversos (ideoque hoc modo minimos) obtinueris; hocque facto numeros jam obtentos invicem subtrahendos esse, ut numerum quam minimum obtineas. Sic in hoc Ex. obtinemus $758-485=273$. Sin vero jam aliqua operatio minores numeros ulterius haud subministrat, tum alia, ad eundem divisorem pertinens, eligenda est, et quidem ea, quae minori exponente gaudet.

Quocunque vero modo duobus numeris (dato secundum divisorem aequivalentibus) inventis, minor numerus semper invenietur, si rationem, in numeris parvis expressam, rationi inventorum prope accedentem perquisiveris, harumque rationum inaequalitatem vulgari modo (multiplicando terminos alternos et subtrahendo), perquisiveris. Ex. gr. $485:758$ fere $=2:3$ aut proprius $=16:25$, quare differentia productorum alternorum parva sit, nempe, $2.758-3.485=61$ et $16.758-25.485=3$. Loco numeri dati 13785 igitur alteruter horum, 61, 3, considerari potest — et si hic numero, cujus operandi schema est $\left(\overset{+}{3}.\overset{n}{8}\right)$, minor est, aut non divisibilis, tum datus per eundem haud est divisibilis.

At exemplum negativae operationis exhibeamus, nempe ex regula $\left(\overset{-}{8}.\overset{n}{3}\right)$ jam instituendae cum numero dato 3784, $=\ \begin{array}{r|r} 37 & 84, \\ \hline 296 & 252; \end{array}$
quo facto obtinetur novus numerus 44 aut $-44=-296+252$;
quod idem valet, nam promiscue minorem a majori vel vice versa subtrahi licet.

Patet vero, duas operationes antea descriptas in hac contineri. Est scilicet $\left(\overset{+}{a}.\right)=\left(\overset{+}{a}.\overset{n}{1}\right)$ et $\left(\overset{-}{a}.\right)=\left(\overset{-}{a}.\overset{n}{1}\right)$, si zyfrae a dextra prima vice in calculum vocatae interim tolluntur; itemque

$$\left(\overset{n}{.}\overset{+}{a}\right)=\left(\overset{+}{1}.\overset{n}{a}\right) \quad \text{atque} \quad \left(\overset{n}{.}\overset{-}{a}\right)=\left(\overset{-}{1}.\overset{n}{a}\right).$$

His jam operationibus universim descriptis, brevibusque signis indicatis, numeros auxiliares ad divisores primos minores attinentes calculavimus inque tabulam subjunctam collocavimus.

Ut vero res melius elucescat, quae elementa magis tangunt, fusius explicemus. Quoniam vero factores 2 et 5 ipsorumque potestates partim ex regulis vulgo traditis facile dignoscuntur, et partim ad modum praesentem haud pertinent; de eis nulla exempla nobis afferenda sunt. Neque schema $\overset{\text{I}}{1}.$ vel $.\overset{\text{I}}{1}$ pro factoribus 3 et 9 valens aliquam moram nectit, cum regulam vulgo traditam suppeditet. Altiorum vero ipsius 3 potentiarum cubus ($3 = 27$) schemate $\overset{+\text{III}}{1}.$ et $(\overset{-\text{II}}{8}.1)$ seu $(\overset{-\text{II}}{8}.)$ facile agnoscitur. Sit Ex. gr. numerus datus $N = 13\,743\,459$, de quo, num per 27 dividatur, quaeritur. Primum ex signo III in schemate $(\overset{+\text{III}}{1}.)$ occurrente in classes ternarum ziphrarum seu millesimales distribuendus est numerus, nempe ita: $13|743|459$. Tum (ex signo $+$), quandoquidem 1 multiplicator nihil mutat, hae classes addendae sunt $13 + 743 + 459 = 1215$. Quoniam vero $1215 > 1000$, seu plus quam tres ziphras habet, regula $\overset{+\text{III}}{1}.$ iterum adhibenda est, quo facto, obtinetur $1 + 215 = 216$. Jam igitur si numerus 216 per 27 dividitur, idem numero N contingit. Numerus vero 216 vel divisione (vulgari aut aliquo modo contracta, Ex. gr. cel. Fourrier) vel ex regula schematis $(\overset{-\text{II}}{\underset{*}{8}}.1)$ seu $(\overset{-\text{II}}{8}.)$ comprobatur. Hunc in finem ita distribuatur: $2|\underset{*}{16}$, et pars sinistra 2 in $\underset{*}{8}$ ducatur, factumque ($2.8 = 16$) a dextra $(\underset{*}{16})$ subtrahatur. Jam, quoniam residuum nihilo aequatur, 216 ideoque et 13743459 per 27 exacte dividitur. Pro altioribus quibusdam numerorum primorum potentiis in tabula schematum regulas exhibuimus. Quae vero, si desiderantur, numeri auxiliaris vel separatim exquirendae sunt, vel tenenda est haec regula universalis: cum potentia numeri primi quaedam factores instar agnita est, tum per hanc dividendum esse, quotumque iterum comprobandum, donec iste numerus ulterius haud adsit.

Quoniam vero ea, quae posthac in elementis Arithmeticis commemoranda credimus, aliquanto fusius explicanda sunt, regulas praesertim pro numeris primis vulgo neglectis 7, (11) et 13 minoribus et schematibus et verbis exprimamus; quo et horum mutuus sensus bene constet.

Hae sunt partim communes, partim speciales. Numeris 7, 11 et 13 communia sunt schemata

$$a)\ \left(\overset{+\text{VI}}{1.}\right) \text{ et } b)\ \left(\overset{-\text{III}}{1.}\right),$$

seu regulae inde facile eruendae:

a) 1. Numerus datus (N), secundum hos factores perquirendus, primum millionesime (seu in classes VI ziphrarum) distribuatur, sicuti vulgo docetur in Numeratione, cum numerus signatus verbis exprimendus est. Ex. gr. $N = 375\,868\,963\,864\,365$.

2. Classes ita obtentae hexaziphricae (seu ziphrarum complexus, quae unitates, milliones, billiones, trilliones etc. enumerant) invicem addendae sunt.

3. Si summa jam obtenta millione major fuerit, regulae *a*) momenta 1. et 2. iterum adhibenda sunt.

2) 864365
868963
\+ 375
1733703
3) +
Facit 733704.

b) Numero jam millione minori facto (vel dato), a dextra tres ziphrae abscindantur 704
atque a sinistris subducantur, vel vice versa 733
29.

(i. e. Numerus complexus, qui millia exprimit, ab isto, qui unitates enumerat, subducendus est, vel hoc ab illo.) Residuum ita obtentum ad factores 7, 11 et 13 aeque se habebit, ac numerus datus N; si per horum aliquem dividitur, et N dividetur; sin minus, ut in hoc exemplo (29), nec N ex istis componetur. It. Ex. 56|789
−56
733.

Specialia sunt:

I. pro divisore 7, schemata $\alpha)\ \left(\overset{+\text{II}}{2.}\right)$, et $\beta)\ \left(\overset{-\text{I}}{.2}\right)$, quae regulas suppeditant:

α) Dato vel jam facto numero < 1000, ut tres tantum teneat ziphras, duplum sinistrae dextris addatur; quod iteretur donec < 100 factus sit. Jam si > 70 fuerit, 70 subducatur, supereritque numerus < 7, quem ex tabula multiplicationis, quam jam a pueris memoria tenes, ut multiplum vel non multiplum ipsius 7 facile agnoveris. Ex. gr. $N = 259 = \dot{2}|59$. Res. $\overset{+}{2}.\dot{2} + 59 = 63 = 7.9$; ergo $259 : 7 =$ integro.

Ex. $N = 958 = 9|58$; Res. $2.9 + 58 = 76 = 70 + 6 =$ non multiplo septenarii, ideoque neque 958, sed residuum 6 ex divisione relinquitur.

β) Duplum ziphrae dexterrimae a complexu reliquorum subtrahatur (vel dexterrima bis a reliquis subducatur).

Ex. gr. $N = 259 = 25|9$; res. $25 - 2.9 = 7$
(vel $25 - 9 = 16$, $16 - 9 = 7$).

Ex. $958 = 95|8$; $\backsim 95 - 2.8 = 79 = 70 + 9 =$ non multipl. sept.

Obs. Hae regulae etiam majores numeros afficiunt, quanquam aliquanto laboriosius (vide Ex. 7. et 14.). Praeterea promiscue adhibentur, sicut commodius occurrit. Si ziphra duplicanda > 6 fuerit, praevie cum 7 minuatur, si prodest.

Ex. $958 \backsim 9|58 \backsim 2|58 \backsim 2.2 + 58 = 62 = 56 + 6 \left(\overset{\backsim}{7}\, 6\right)$.

II. Pro divisore 11 schemate α) $\left(\overset{+11}{1.}\right)$ et β) $\left(\overset{-1}{1.}\right)$ sufficiunt, et valent:

α) Si numerus datus < 100, aut tantummodo < 10000, complexus duarum dexterrimarum ziphrarum complexui sinistrarum addatur.

Ex. $N = 8129 = 81|29$; $N' = 81 + 29 = 110 = 11.10$.

β) Numero jam (per α) < 100 facto, zyphris duabus eisdem scriptus erit, si datus ipsius 11 multiplus fuerit; ipsarum differentia enim aliter nihilo haud aequatur. Nam

$\left(\overset{-1}{1.}\right) 77 = 7 - 7 = 0$; at $\left(\overset{-1}{1.}\right) 57 = 7 - 5 = 2$.

Obs. Schema $\left(\overset{-1}{1.}\right)$ regulam continuae subtractionis, in nonnullis libris praescriptam, suppeditat. Si numeri subducti simul annotantur, quotum praebebunt. Ex. gr.

Divisor 11) $\underline{1}35^{\cdot}2^{\cdot}7^{\cdot}6^{\cdot}4\ldots$ dividendus $= N$

$\underline{1}\underset{*}{2}\ \underset{*}{2}\ 9\ 7^{*}8\ldots$ quotus

6 residuum

Exempli computus: $3 - 1 = 2$, $5 - \dot{1} - \underset{*}{2} = 5^{\cdot} - \underset{*}{2} = \underset{*}{2}$

(exsistente $5^{\cdot} = 4$, unitate scilicet ipsi $2^{\cdot}$ subsequenti mutuo data), $^{\cdot}2 - \underset{*}{2} = 12 - 2 = 10 =$ justo major, ergo, unitate mutuata $^{\cdot}2^{\cdot} - \underset{*}{2} = 11 - 2 = 9$; similiter $^{\cdot}7^{\cdot} - 9 = 7^{*}$, et $^{\cdot}6^{\cdot} - 7^{*} = 15 - 7 = 8$,

tandemque $4-8=14-8=6=$ residuo; quod et ex nostris regulis prodit. Nam $\overset{+\text{VI}}{1}.N=352\,765=N'$, et $\overset{-\text{III}}{1}.N'=765-352=413$, et $\overset{+\text{II}}{1}.(413)=4+13=17$, tandemque $\left(\overset{-\text{I}}{1}.\right)17=7-1=6$.

III. Pro divisore 13 (si numero <1000 dato) aptissima sunt schemata α) $\left(\overset{-\text{II}}{4}.\right)$ et β) $\left(\overset{+\text{I}}{.4}\right)$ seu regulae:

α) Sinistrae (ternarum zyphrarum) quadruplum a complexu duarum dextrarum subducatur.

Ex. $N=733=7|\overset{\text{II}}{33}$, et $\overset{\text{II}}{33}-\bar{4}.7=5$ (confer Ex. 7. α).

Ex. $403=4|03\backsim 3-4.4=-13$.

β) Quadruplum dexterrimae reliquis addatur.

Ex. $733=73|\overset{\text{I}}{3}$; $73+\overset{+\text{I}}{4}.3=85=8|5$; et $8+4.5=28=2.13+2$, ergo non divisibilis.

Ex. $403=40|3\backsim 40+4.3=52=4.13$, aut

$52=5|2\backsim 5+4.2=13$; quare 403 per 13 exacte dividitur.

Ex eis, quae jam attulimus, facile quisvis intelliget, quomode schemata nostra verbis exprimenda sint, ut regulae ad factores primos quosvis, tribus centenis (<300) minores, agnoscendos idoneae ex tabula schematum adjuncta eliciantur; quin imo, si schematum jam ab initio descriptam explicationem memoria tenes, ipsa schemata idem ac regulae tibi valebunt.

In Exemplis jam antea allatis aliquando subjunximus unum alterumve factorum primorum (p), ad quem schema ibi illustratum pertinet, ut in Ex. 13. ($p=31$). De qua re in universim tenendum est, schema $\left(\overset{+}{\beta}\,\overset{\nu}{\alpha}\right)$ ad numerum $\alpha.10^{\nu}-\beta$ vel ipsius factores a 2 et 5 diversos, et schema $\left(\overset{-}{\beta}\,\overset{\nu}{\alpha}\right)$ ad numerum $\alpha.10^{\nu}+\beta$ vel ipsius factores pertinere. Ex. gr. $\left(\overset{+\text{II}}{5.2}\right)$ ad $200-5=195=13.3.5$, i. e. ad 13 vel ad 3 (non vero ad 5); $\left(\overset{-\text{II}}{3.4}\right)$ ad $403=13.31$, vel ad 13 vel 31, etc. Hujus observationis ope, si tabula factorum numerorum compositorum (ex. gr. Chernacii) ad manus tibi fuerit, facile numeros primos, quibus schema datum attinet, invenies. Ut vero inverso ordine schemata datum numerum attingentia reperiantur, eaque usui accommodata, fusius res est pertractanda.

(Cont. seq. prox.)

23.

De radice cubica celeriter extrahenda.

(Auct. *Carolo Joh. Ds. Hill* Lond. Goth.)

Formulae, quas olim in hoc Diario ad aequationem cubicam $y^3 = 3\alpha y + 2\beta$ resolvendam proposui, quamquam in universum convergentissimae, tamen casu $\alpha = 0$ minus convergunt. Ex nostro vero modo aequationes numericas operationum convergentium ope resolvendi, quem olim tractatu vernaculo fusius explicuimus, consequitur et modus ad hunc casum applicandus, jam breviter indicandus.

Sit a numerus datus, ex quo radix cubica est extrahenda, hujusque valor aliquatenus approximatus (eo saltem, ut prima ipsius ziphra valens rite electa sit) $= x$; ponaturque $u = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x^3}{a}\right)$.

Jam vero calculentur hi valores uniformes:

$$u_1 = \left(\tfrac{2}{3} - u\right) \cdot \frac{u^3}{(1-2u)^3}, \quad u_2 = \left(\tfrac{2}{3} - u_1\right) \cdot \frac{u_1^3}{(1-2u_1)^3},$$

similesque u_3, u_4 etc.; seu posita functione

$$\left(\tfrac{2}{3} - u\right) \cdot \frac{u^3}{(1-2u)^3} = fu, \text{ aut } fu = \frac{\left(\frac{2}{3} - u\right)}{(u^{-1} - 2)^3},$$

capiantur

$$u_1 = fu, \quad u_2 = fu_1 = f^2 u, \quad u_3 = fu_2 = f^3 u, \quad u_4 = fu_3 = f^4 u, \text{ etc.}$$

Deinde calculentur

$$y = \frac{1-u}{1-2u}, \quad y = \frac{1-u_1}{1-2u_1}, \quad y_2 = \frac{1-u_2}{1-2u_2}, \quad y_3 = \frac{1-u_3}{1-2u_3}, \text{ etc.}$$

seu, posita functione $\frac{1-u}{1-2u} = gu$, capiantur

$$y = gu, \quad y_1 = gu_1 = gfu, \quad y_2 = gu_2 = gf^2 u, \text{ etc.}$$

Nempe universum $y_n = gf^n u$.

Quibus ad limitem praecisionis desideratum effectis, erit

$$\sqrt[3]{a} = x \cdot y \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_r,$$

seu

$$\sqrt[3]{a} = x \cdot gu \cdot gfu \cdot gf^2 u \cdot gf^3 u \ldots \cdot gf^r u,$$

idque eo accuratius, quo plures factores admittantur.

Sit Ex. gr. $a = 2$, et $x = 1$; eritque

$$u = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1^3}{2}\right) = \frac{1}{6}, \quad \frac{u}{1-2u} = \frac{1}{6-2} = \frac{1}{4}, \quad u_1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{1}{128},$$

$u_2 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{128}\right) \cdot \frac{1}{(126)^3} = \frac{253}{768\,144\,384}$,

$u_3 = \left(\frac{2}{3} - \frac{253}{3.128.126^3}\right) \cdot \frac{253^3}{(3.128.126^3 - 2.253)^3} = \frac{512\,096\,003}{768\,144\,384} \cdot \frac{253^3}{768\,144\,384^3}$.

etc.

Quoniam vero jam u_2 circa $= \frac{1}{3\,000\,000} = \frac{1}{3.10^6}$ sit, erit

u_3 fere $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^3.10^{6.3}} = \frac{2}{81\,000000\,000000\,000000}$ aut u_3 propre $= \frac{1}{4.10^{19}}$,

ideoque u_4 fere $= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4.10^{19}}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4^3.10^{57}}$; quare cum radicis huic valori ipsius u_4 competentis correctio relativa sit $y_4 - 1 = \frac{u_4}{1-2u_4}$ seu fere $= u_4$, si vel u_4 omittitur, habebitur radix cubica $(\sqrt[3]{2})$ accurata ad locum LVIII decimalem. Ex valoribus modo calculatis obtinentur

$$y = \frac{6-1}{6-2} = \frac{5}{4},\ y_1 = \frac{127}{126},\ \left(= \frac{128-1}{128-2}\right),\ y_2 = \frac{768\,144\,131}{768\,143\,878} \text{ etc.},$$

ideoque $1.y.y.y_2$ seu $\sqrt[3]{2} = 1 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{127}{126} \cdot \frac{768\,144\,131}{768\,143\,878}$ ad locum XX^{mum} decimalem accurata. Si vero ex valore ipsius u_3 modo exhibito praeterea computatur $y_3 = \frac{1-u_3}{1-2u_3}$, habebitur $\sqrt[3]{2} = 1.y.y_1.y_2.y_3$, ad locum LVIII^{vum} accurata.

Ex. 2. Sit $a = 4$, $x = 1$, eritque $u = \frac{1}{4}$, $u_1 = \frac{5}{96}$ seu fere $=$ 0,05, ideoque $u_2 =$ circiter $\frac{2}{3}.(0{,}05)^3 = \frac{94}{10^6}$, unde jam operationis convergentia elucet; et obtinetur $\sqrt[3]{4} = 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{91}{86} \ldots$.

Ex. 3. Sit $a = 5$, $x = 2$; eritque $u = \frac{-1}{5}$, $u_1 = \frac{-13}{5145}$ (fere $=$ $-0{,}0025$) ideoque $-u_{11} = \left(\frac{2}{3} + \frac{13}{5145}\right) \cdot \frac{13^3}{5171^3}$ seu fere $= \frac{1}{10^8}$ quare jam $\sqrt[3]{5} = 2 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5158}{5171} \ldots$. ultra VI locos decimales accurata habetur, quamquam duo tantum factores corrigentes (y et y_1) calculati sunt et numerus datus $a = 5$ difficillimo $a = 4{,}5$ satis accedit. Si enim factoris ope 10^{3n} numerum a inter 1 et 1000 includeris et cubum proximum integrum elegeris, in unoquoque alio casu u jam ab initio minor erit, indeque operatio tanto convergentior.

Vides igitur hoc modo et simplicissime et celerrime ad radicem cubicam appropinquari posse. Simile quid ad radices omnis generis obtineri potest.

24.

Einige geometrische Sätze.

(Von dem Königl. Pr. Lieutenant Herrn *Gerwien* zu Berlin.)

I. Umkehrung des Ptolomäischen Lehrsatzes.

1. Lehrsatz. Nimmt man in einer Kreislinie um O (Taf. IV. Fig. 1.) drei Puncte A, B, C an, und construirt die drei Kreisörter um H, I und K, welche sich mittelst des Verhältnisses der Entfernungen je zwei der Puncte A, B und C von einem vierten in der Kreislinie um O angenommenen Punct D bestimmen, so berühren sich alle drei Kreisörter in diesem vierten Punct D, und ihre Centrale HIK bildet eine gleichfalls zu diesem Punct D gehörende Tangente für den Kreis um O.

Construction. Halbire die von D mit A, B und C gebildeten Winkel ADB, BDC und ADC, verlängere die Halbirungslinien bis zu den Seiten des $\triangle ABC$, und zeichne Winkel $HDE = DEH$, $IDF = DFI$, $KDG = DGK$, so bilden die um H, I und K mit HD, ID und KD beschriebenen Kreislinien die in dem Lehrsatz näher bezeichneten Örter.

Beweis. Zunächst ist darzuthun, dafs jede von den drei gezeichneten Kreislinien die in dem Lehrsatz vorausgesetzten Eigenschaften hat, dafs also bei der Kreislinie um I z. B. für jeden beliebig in derselben angenommenen Punct X, $XB : XC = DB : DC$ ist. Winkel IFD oder $FBD + BDF$ ist $= FDC + CDI$, und Winkel $BDF = FDC$ construirt, folglich ergiebt sich durch Subtraction $IBD = CDI$, weshalb $\triangle BID$ ähnlich $\triangle ICD$, also $BI : ID = ID : IC$, oder $BI : IX = IX : IC$ sein mufs. Daher ist auch $\triangle BIX$ ähnlich $\triangle CIX$ (Winkel $CIX = BIX$), und deshalb Winkel $IXC = IBX$. Nun hat man aber zugleich IFX, oder $IBX + FXB = IXC + CXF$; demnach ergiebt sich durch Subtraction $BXF = FXC$, also $XB : XC = FB : FC$, und da Winkel $BDF = FDC$ gezeichnet ist, auch $DB : DC = FB : FC$, woraus endlich $XB : XC = DB : DC$ hervorgeht. Derselbe Beweis pafst für die Kreise um H und K, da beide in gleicher Art wie der Kreis um I construirt sind; folglich haben die drei um I,

H und K beschriebenen Kreise wirklich die in dem Lehrsatze vorausgesetzten Eigenschaften. Aus diesen ergiebt sich nun die eigentliche Behauptung folgendergestalt.

Aus der Construction des Orts um I folgt, wie vorher gezeigt wurde, die Gleichheit der Winkel IDC und DBC; DC ist aber eine Sehne des Kreises um O, also bildet DI für den Punct D eine zu demselben Kreise gehörende Tangente. Dasselbe ergiebt sich auch für die Örter um H und K aus der Gleichheit von HDA mit ABD, und von KDC mit DAC; folglich bilden die drei Linien HD, ID und KD eine einzige, den Kreis um O in D tangirende Linie, und es müssen sich auch, wie es in dem Lehrsatze behauptet wurde, alle drei Kreise um I, H und K in demselben Puncte D berühren, da in diesem ihre Begegnung statt findet, und die alle drei Mittelpuncte verbindende Linie HIK zugleich denselben Punct D durchläuft.

Anmerkung. Ist zur Bestimmung des im Vorhergehenden wiederholt construirten Orts, z. B. um I, kein Punct desselben gegeben, sondern kennt man nur das Verhältnifs $DB:DC$, und die Lage der zu den Linien desselben gehörenden Endpuncte B und C, so kann man sich einen solchen Punct D leicht verschaffen, indem man über BC, mittelst der beiden gegebenen Verhältnifslinien, ein $\triangle$ beschreibt, u. s. w.

2. Lehrsatz. Wenn in einem Viereck das Rechteck aus den Diagonalen eben so grofs ist, als die Summe der beiden Rechtecke, von denen jedes durch ein Paar Gegenseiten gebildet wird, so läfst sich um das Viereck ein Kreis beschreiben.

Beweis. a, b, c, d sollen die Seiten, p und q die Diagonalen des gegebenen Vierecks, und zwar so bezeichnen, dafs p die Enden von a und b, und q die von a und d verbindet. Zeichnet man aus den Linien a, b, p des gegebenen Vierecks ein $\triangle ABC$ (Fig. 1.), und bestimmt L so in p, dafs $bd = q \times LC$ wird, so ergiebt sich, da $ac + bd = p.q$ oder $= q \times AL + q \times LC$ vorausgesetzt ist, durch Subtraction, auch $ac = q \times AL$. Es mufs also zugleich $c:q = AL:a$, und $d:q = LC:b$ sein. Wird jetzt um das $\triangle ABC$ ein Kreis (um O) beschrieben, und (nach der Anmerkung des Lehrsatzes 1.) ein Kreisort (um I) mit der Eigenschaft bestimmt, dafs sich die Entfernungen jedes Punctes desselben von C und B, z. B. $DC:DB = AL:a$, oder $c:q$ verhalten; so ergiebt sich, wenn

man den Schneidungspunct D beider Kreislinien mit A, B und C verbindet, nach dem Ptolomäischen Lehrsatz $a \times CD + b \times AD = BD \times AL + BD \times LC$. Nach der Construction des Orts um I ist aber $DC : DB = AL : a$, oder $a \times DC = BD \times AL$; also erhält man durch Subtraction $b \times AD = BD \times LC$, oder $AD : BD = LC : b$. Es war aber früher $d : q = LC : b$ bestimmt; folglich ist zugleich $DC : DB = c : q$, und $DA : DB = d : q$. Construirt man daher einen zweiten Kreisort (um H) mit der Eigenschaft, dafs sich die Entfernungen jedes Punctes desselben von A und B wie $d : q$ verhalten, so ergiebt sich die Lage des Punctes D zugleich in dem Ort um I und in dem Ort um H. Hieraus folgt, wenn man das gegebene Viereck so auf das construirte $ABCD$ legt, dafs das von den Seiten a, b, p bestimmte Dreieck mit dem congruent gezeichneten $\triangle ABC$ zusammenfällt, der vierte Punct des gegebenen Vierecks sowohl in der Kreislinie um I als in der Kreislinie um H zu liegen kommen mufs, da sich die Entfernungen dieses Puncts von C und B wie $c : q$ und von A und B wie $d : q$ verhalten. Beide Kreislinien haben aber nach dem in 1. bewiesenen Lehrsatze nur den Punct D gemein; folglich ist das gezeichnete Viereck $ABCD$ dem gegebenen congruent, und es mufs deshalb dieses wie jenes einem Kreise eingeschrieben sein.

II. Beweis eines von Herrn Steiner verallgemeinerten Lehrsatzes des Archimedes. Siehe Band III. S. 210. d. J.

Lehrsatz. Es seien M_2, M_1 (Fig. 2.) irgend zwei Kreise (deren Durchmesser AB, CD), EF sei ihre Linie der gleichen Potenzen (siehe Bd. I. S. 165. d. J.), und M sei die Mitte ihrer gröfsten Entfernung AD von einander. Beschreibt man irgend einen Kreis M, d. h. GHI, und hierauf zwei andere Kreise m_2, m_1 so, dafs beide zugleich innerhalb oder aufserhalb des Kreises M liegen und ihn berühren, und dafs sie überdies die Gerade EF und respective die gegebenen Kreise M_2, M_1 berühren, so sind die zwei Kreise m_2, m_1 allemal einander gleich.

Beweis. 1. (S. Bd. I. S. 173. und 174. d. J.)

Der Punct $\begin{Bmatrix} A \\ D \\ G \\ I \end{Bmatrix}$ bildet den äufseren Ähnlichkeitspunct für die Linie $\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_1 \\ M \\ M \end{Bmatrix}$ EF und den Kreis um . . . . . .

z. B. KL trifft A: denn m_2K und AE sind beide senkrecht FE, bilden also die gleichen Winkel Km_2M_2 und AM_2m_2, weshalb auch $KLm_2 = M_2LA$ ist, und folglich KL durch A läuft.

2. (S. Bd. I. S. 175. d. J.)

Das Rechteck $\begin{cases} AE \times AB \\ DE \times DC \\ GI \times GE \\ IG \times IE \end{cases}$ bildet die gemeinschaftliche Potenz der Linie EF und des Kreises um . . . $\begin{cases} M_2 \\ M_1 \\ M \\ M \end{cases}$

z. B. $AE \times AB$ ist $= AK \times AL =$ (Tangente) AO^2, da $\triangle BAL$ ähnlich $\triangle AEK$ ist. $(BLA = KEA = R.)$

Da ferner EF die Linie der gleichen Potenzen für die Kreise um M_1 und M_2 ist (s. Bd. I. S. 165. d. Journ.), so mufs $EM_1^2 - M_1D^2 = EM_2^2 - M_2A^2$ sein. Hieraus folgt, dafs auch

$$(EM_1 + M_1D)(EM_1 - M_1D) = (EM_2 + M_2A)(EM_2 - M_2A), \text{ d. h.}$$

3. $ED \times EC = EA \times EB$ ist.

Aus 2. folgt, wenn m_2O mit r_2, und m_1N mit r_1 bezeichnet wird, dafs

$$r_2^2 = Am_2^2 - AE \times AB, \quad \text{und}$$
$$Dm_1^2 - DE \times DC = r_1^2, \quad \text{also auch}$$
$$Dm_1^2 - DE \times DC + r_2^2 = Am_2^2 - AE \times BB + r_1^2 \text{ sein mufs. Nun ist nach 3.}$$
$$DE \times EC = AE \times EB, \text{ folglich erhält man durch Subtr.}$$
$$Dm_1^2 - DE^2 + r_2^2 = Am_2^2 - AE^2 + r_1^2, \text{ oder, da } r_1 \text{ und } r_2 \text{ die Projectionen von } Em_1 \text{ und } Em_2 \text{ auf } DA \text{ sind,}$$

4. $m_1E^2 - 2r_1DE + r_2^2 = m_2E^2 - 2r_2AE + r^2$.

Zugleich folgt aus 2., dafs

$$r_2^2 = Im_2^2 - GI \times IE, \quad \text{und}$$
$$Gm_1^2 - GI \times GE = r_1^2, \quad \text{also auch}$$
$$Gm_1^2 - GI \times GE + r_2^2 = Im_2^2 - GI \times IE + r_1^2 \text{ sein mufs. Addirt man hiezu}$$
$$EI \times GE = GE \times IE, \quad \text{so erhält man}$$
$$Gm_1^2 - GE^2 + r_2^2 = Im_2^2 - IE^2 + r_1^2, \text{ oder, da } r_1 \text{ und } r_2 \text{ die Projectionen von } Em_1 \text{ und } Em_2 \text{ auf } DA \text{ sind,}$$

5. $m_1E^2 - 2r_1EG + r_2^2 = m_2E^2 - 2r_2IE + r_1^2$. Nach 4. ist aber $m_1E^2 - 2r_1DE + r_2^2 = m_2E^2 - 2r_2AE + r_1^2$, demnach ergiebt sich durch Subtr.

$2r_1DE - 2r_1EG = 2r_2AE - 2r_2IE$, oder

Rechteck $r_1(DE - EG) = r_2(AE - IE)$.

$DE - EG$ ist aber $= AE - IE$, denn $ED + IE$ oder $MD + MI$ mufs $= AE + EG$ oder $AM + MG$ sein, da M nach der Voraussetzung AD

halbirt; folglich sind auch die Grundlinien r_1 und r_2 der zuletzt genannten Rechtecke einander gleich, was zu beweisen war.

III. Beweise der im III. Bande S. 209. und 210. d. J. Nr. 17. und 18. von Herrn Steiner aufgestellten Lehrsätze.

Lehrsatz 17. Sind A, B, C diejenigen drei Kreise, von denen jeder eine Seite eines gegebenen Dreiecks, und die Verlängerung der beiden übrigen (Seiten) berührt, und man beschreibt drei andere Kreise a, b, c so, dafs jeder zwei der drei ersten äufserlich und den dritten innerlich (einschliefsend) berührt, so schneiden die drei letzteren einander in einem bestimmten Puncte, und die Geraden, welche diesen Punct mit den Mittelpuncten der Kreise a, b, c verbinden, sind respective zu den Seiten des Dreiecks senkrecht.

Beweis. Fällt man aus dem Puncte P der gleichen Potenzen der Kreise A, B, C (siehe Bd. I. S. 166. d. J.) Perpendikel p, p', p'' auf die Seiten l, l', l'' des gegebenen Dreiecks, verlängert dieselben so um die Stücke v, v', v'', dafs sich die Rechtecke $p(p+v)$, $p'(p'+v')$, $p''(p''+v'')$ eben so grofs als die zu P gehörende Potenz ergeben, und beschreibt um die Mitten von $p+v$, $p'+v'$, $p''+v''$ Kreise a, b, c mit den Hälften der zuletzt genannten Linien, so bildet P zugleich den Ähnlichkeitspunct sowohl für l und a, als für l' und b, und für l'' und c. (Siehe Band I. S. 170. d. J.) Da nun die gemeinschaftliche Potenz für l und a in Bezug auf P nach der Construction eben so grofs ist, als die Potenzen von A, B und C in Bezug auf P, zwei dieser Kreise aber l auf der einen und der dritte auf der andern Seite berühren, so folgt daraus, dafs a die Kreise A, B, C ungleichartig berührt. Dasselbe ergiebt sich auf gleichem Wege für die Kreise b und c; demnach zeigt sich, wenn man noch die Construction der Kreise a, b und c berücksichtigt, dafs wirklich sämmtliche Behauptungen des aufgestellten Lehrsatzes Statt finden.

Zum Beweise des Lehrsatzes 18. S. 210. d. J. sind die folgenden Vorbereitungen erforderlich.

1. Die Potenz einer Kugel in Bezug auf einen Punct, und umgekehrt, soll (im Folgenden) das unveränderliche Rechteck hei-

fsen, welches jede aus diesem Puncte nach der Kugel führende Secante mit ihrem äufseren Abschnitte bildet.

2. Die Potenz einer Kugel in Bezug auf einen Punct ist dem Quadrate jeder aus dem Puncte nach der Kugel führenden Tangente gleich.

3. Verbreitet man die Central-Ebene $MM_,M_{,,}$ dreier Kugeln, deren Radien r, r', r'' sind, so bestimmen sich in jeder Ebene 3 Kreise. Der in dem Puncte P der gleichen Potenzen dieser Kreise auf die Ebene $MM'M''$ errichtete Perpendikel PX bildet einen Ort für alle Puncte, deren Potenzen in Bezug auf die 3 Kugeln gleiche Gröfse haben. Dieser Ort soll die **Linie der gleichen Potenzen für die 3 Kugeln um** M, $M_,$, $M_{,,}$ **heifsen.**

Beweis. Nach der Construction ist

$$PM^2-r^2 = PM_,^2-r_,^2 = PM_{,,}^2-r_{,,}^2, \quad \text{also auch}$$
$$PM^2+PX^2-r^2 = PM_,^2+PX^2-r_,^2 = PM_{,,}^2+PX^2-r_{,,}^2, \quad \text{oder}$$
$$MX^2-r^2 = M_,X^2-r_,^2 = M_{,,}X^2-r_{,,}^2,$$

welche Differenzen mit den Quadraten der aus X nach den 3 Kugeln führenden Tangenten gleiche Gröfse haben.

4. Die vier Linien der gleichen Potenzen, welche durch vier Kugeln nach 3. bestimmt werden, schneiden sich in einem Punct. Im Folgenden soll derselbe **der zu vier Kugeln gehörende Punct der gleichen Potenzen** genannt werden.

Beweis. Zieht man die zur Construction der 4 Puncte der gleichen Kreis-Potenzen in den 4 Central-Ebenen erforderlichen Linien der gleichen Potenzen, so bilden je zwei die Schenkel des Neigungswinkels von 2 der genannten Ebenen, da sie, von denselben 2 Kreisen bestimmt, auch von demselben Puncte der beiden Ebenen gemeinschaftlichen Centrale winkelrecht auslaufen. Nun liegen aber je zwei Linien der Kugelpotenzen mit einem solchen Neigungswinkel in derselben Ebene, da beide auf den Central-Ebenen senkrecht stehen etc.; folglich müssen sich wirklich alle 4 Linien der Kugel-Potenzen in demselben Puncte durchschneiden.

5. Liegt eine Kugel K und eine Ebene E im Raume fest, so lassen sich stets in K zwei Puncte A und A' von der Eigenschaft bestimmen, dafs jedes Rechteck, welches eine Linie zwischen A und einem beliebig in E gewählten Puncte X mit der in diese Linie fallenden Sehne AY bildet, dieselbe Gröfse hat. Ein solcher Punct soll im Folgenden **der Ähnlichkeitspunct der Ebene und der Kugel,** und das zugehö-

rige Rechteck die gemeinschaftliche Potenz der Ebene und der Kugel heifsen.

Construction und Beweis. Wegen des Folgenden wollen wir setzen, dafs E und K sich schneiden. Construirt man einen den Mittelpunct M von K durchlaufenden Perpendikel auf E, so ergeben sich in K zwei Durchschnittspuncte A und A'. Dies sind die beiden Ähnlichkeitspuncte, und ihre Entfernungen von E mit dem Kugel-Durchmesser bilden die gemeinschaftliche Potenz für E und K: denn AX bildet mit dem auf E gefällten Perpendikel ein rechtwinkliges Dreieck, die Sehne AY erzeugt mit dem Kugeldurchmesser gleichfalls ein rechtwinkliges Dreieck, und beide Dreiecke haben einen Winkel gemein; folglich mufs die Behauptung Statt finden.

6. Wenn die gemeinschaftliche Potenz einer Ebene E und einer Kugel K eben so grofs ist, als die Potenz einer zweiten Kugel k in Bezug auf den Ähnlichkeitspunct für E und K, k aber E berührt, so mufs k auch K berühren.

Beweis. Construirt man nach 5. den Ähnlichkeitspunct A für E und K, und verlängert die Verbindungslinie zwischen A und dem zu E und k gehörenden Berührungspuncte X, bis eine von beiden Kugeln in Y geschnitten wird, so mufs dieser Punct nach 1. und 5. zugleich in K und E liegen, da nach der Voraussetzung die Potenz von k in Bezug auf A eben so grofs ist, als die gemeinschaftliche Potenz für E und K. Hieraus folgt, wenn man Y mit dem Endpuncte A' des A durchlaufenden Diameters von K, und X mit dem Schneidungspuncte C jenes Durchmessers in E verbindet, dafs $\triangle AYA'$ ähnlich $\triangle AXC$ ist, also Winkel $AYA' =$ Winkel ACX sein mufs, folglich YA' den Endpunct des X treffenden Diameters der Kugel k durchläuft. Die Durchmesser beider Kugeln sind aber parallel, nach der Voraussetzung; demnach wird die Y und den Mittelpunct von K durchlaufende Linie auch den Mittelpunct von K treffen, woraus hervorgeht, dafs sich beide Kugeln in Y berühren.

Mittelst dieser 6 Sätze ergiebt sich der Beweis des Lehrsatzes 18. Bd. III. S. 210. d. J., analog mit dem bereits entwickelten Beweise des Lehrsatzes 17., folgendergestalt.

Lehrsatz 18. Sind A, B, C, D diejenigen vier Kugeln, von denen jede eine Seitenfläche einer gegebenen dreiseitigen Pyramide und die Verlängerungen der drei übrigen

berührt, und man beschreibt vier andere Kugeln a, b, c, d **so, dafs jede drei der vier ersten äufserlich und die vierte innerlich berührt: so schneiden die vier letzteren einander in einem bestimmten Punct, und die Geraden, welche diesen Punct mit den Mittelpuncten der vier Kugeln** a, b, c, d **verbinden, sind respective zu den Seitenflächen der Pyramide senkrecht.**

Beweis. Fällt man aus dem Puncte P der gleichen Potenzen der Kugeln A, B, C, D (siehe 4.) Perpendikel p, p', p'', p''' auf die Seitenflächen E, E', E'', E''' der gegebenen Pyramide, und verlängert dieselben so um die Stücke v, v', v'', v''', dafs sich die Rechtecke $p(p+v)$, $p'(p'+v')$, $p''(p''+v'')$, $p'''(p'''+v''')$ eben so grofs als die zu P gehörende Kugel-Potenz ergeben, und beschreibt um die Mitten von $p+v$, $p'+v'$, $p''+v''$, $p'''+v'''$ Kugeln a, b, c, d mit den Hälften der zuletzt genannten Linien: so bildet P (siehe 5.) zugleich den Ähnlichkeitspunct sowohl für E und a, als auch für E' und b, ferner für E'' und c, und endlich für E''' und d. Da nun die gemeinschaftliche Potenz für E und a in Bezug auf P (siehe 5.), nach der Construction, eben so grofs ist, als die Potenzen von A, B, C und D in Bezug auf P, drei dieser Kugeln aber E auf der einen und die vierte auf der anderen Seite berühren; so folgt daraus (siehe 6.), dafs a die Kugeln A, B, C, D ungleichartig berührt. Dasselbe ergiebt sich auf gleichem Wege für die Kugeln b, c und d; demnach zeigt sich, wenn man noch die Construction der Kugeln a, b, c und d berücksichtigt, dafs wirklich sämmtliche Behauptungen des aufgestellten Lehrsatzes statt finden.

Schliefslich ist noch anzuführen, dafs sich die vorher abgehandelten Haupt-Lehrsätze (17. und 18.) bei Dreiecken und Pyramiden wiederholt ergeben, wenn man nicht allein die Kreise am Dreieck und die Kugeln an der Pyramide, sondern auch den Kreis im Dreieck und die Kugel in der Pyramide mit unter die Voraussetzungen aufnimmt.

25.
Sur la valeur de 0^0.

Dans un mémoire sur les fonctions discontinues, que Mr. Libri a fait insérer dans ce journal (T. X. cah. 4.), il fait usage de l'expression 0^0, dont il considère la valeur comme étant toujours égale à l'unité. C'est aussi l'opinion presque unanime de tous les géomètres, dont les ouvrages sont à ma portée. Pourtant il me semble que les divers raisonnemens qu'on a employés pour démontrer cette égalité reposent sur la généralisation non permise d'un cas particulier, et que, s'ils étoient bien fondés, on devoit aussi soutenir, que la valeur de $\frac{0}{0}$ est toujours égale à l'unité. Par exemple, Euler dans son Traité d'algèbre (T. I. §. 175.) argumente comme il suit: parcequ'on a

$$\frac{a}{a} = a^0 = 1$$

il suit que a^0 est toujours égal à l'unité, soit que le nombre a soit grand ou petit, et même si a est égal à zéro, de manière que la valeur de 0^0 est certainement égale à l'unité. Mais pourquoi ne pas dire encore: parcequ'on a toujours

$$\frac{a}{a} = 1$$

sans que cette égalité dépende de la valeur du nombre a, elle subsistera encore si l'on a

$$a = 0,$$

c'est-à-dire qu'on aura toujours

$$\frac{0}{0} = 1?$$

Il en est de même avec la démonstration de Mascheroni que Mr. Libri a citée. Car n'en suit-il pas également que, parcequ'on a

$$\frac{(a-a)^n}{(a-a)^n} = 1,$$

on a aussi

$$\frac{0}{0} = 1?$$

La démonstration de Mr. Libri me paraît encore sujette aux mêmes objections. En effet, personne ne contestera que la valeur de

l'expression $\frac{a}{a}$ est toujours égale à l'unité, au cas même qu'on suppose $a = 0$, alors la valeur de 0^0 comme celle de $\frac{0}{0}$ est égale à l'unité. Mais comme il n'en suit pas que la valeur de $\frac{0}{0}$ soit *toujours* égale à l'unité, de même on n'en doit pas conclure qu'on a toujours

$$0^0 = 1.$$

Pour prouver cette égalité il faudroit démontrer que la valeur de $[f(a)]^{F(b}$ est toujours égale à l'unité, si l'on a deux fonctions $f(x)$, $F(y)$ qui se changent en zéro, pour les valeurs $x = a$, $y = b$, ce qu'on n'a pas fait jusqu'à présent.

Selon mon avis l'expression 0^0 n'est autre chose que l'expression $0^1.0^{-1}$, et comme cette dernière expression qui est égale à $0.\infty = \frac{0}{0}$, peut avoir toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et ∞, de même l'expression 0^0 peut avoir toutes ces valeurs. Mr. Cauchy est le seul auteur où j'ai trouvé la même opinion. Dans le *Résumé des leçons données à l'école polyt. sur le calc. infinit.* pag. 25. il dit: „Il arrive souvent que cette forme $(\frac{0}{0})$ se trouve remplacée par l'une des suivantes $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, 0^0 etc." Dans un ouvrage antérieur du même auteur (Cours d'Analyse 1re part. pag. 69.) on trouve la formule

$$0^0 = \infty^0 = M((0, \infty)),$$

c'est-à-dire que 0^0 peut seulement avoir toutes les valeurs comprises entre 0 et ∞, mais cela nous paraît être moins exact. Peut-être Mr. Libri aura-t-il la bonté de nous donner quelques éclaircissemens sur cet objet par la voie de ce journal.

Le 20. Juillet 1833.

S.

26.

Über die Taylorsche Reihe; nebst einer Anwendung auf die Zerlegung der algebraischen Brüche.

(Von Herrn Dr. *Schellbach* zu Berlin.)

Es sei

$$1. \quad xy = z,$$

wo y und z Functionen von x sind, so ist, wenn man nach x differenzürt,

$$2. \quad \begin{cases} y + x\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \\ 2\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \\ 3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + x\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}. \end{cases}$$

Die successive Substitution der Werthe von y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ... aus diesen Gleichungen in (1.) giebt

$$3. \quad z = \frac{x}{(1,+1)}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{x^2}{(1,+1)^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{x^3}{(1,+1)^3}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \ldots.$$
$$\ldots. + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{(1,+1)^n}\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(1,+1)^n}\frac{\partial^n y}{\partial x^n},$$

wo wir uns der Bezeichnung des Herausgebers d. J. bedient haben, welcher

$$4. \quad u(u+a)(u+2a)(u+3a)\ldots.(n+(n-1)a) = (u,+a)^n$$

setzt. (S. Band VII. Heft 3. dieses Journals.) Hiernach ist also

$$(1,+1)^n = 1.2.3.4\ldots.n.$$

Als Anwendung der Reihe (3.) nehmen wir an

$$5. \quad f(x+h) - f(a+h) = (x-a)y,$$

wo $f(x+h)$ kein a enthalten soll, y eine Function von x, a, h ist, und auch den Factor $(x-a)$ in irgend einer positiven Potenz enthalten kann. Vergleicht man diese Ausdrücke mit (1.), indem man y dem y, $x-a$ dem x und $f(x+h)-f(a+h)$ dem z gleichstellt, und differenziirt nach a, so verwandelt sich (3.) in

6. $$f(x+h)-f(a+h)=\frac{(x-a)}{(1,+1)}\frac{\partial f(a+h)}{\partial a}+\frac{(x-a)^2}{(1,+1)^2}\frac{\partial^2 f(a+h)}{\partial a^2}+\frac{(x-a)^3}{(1,+1)^3}\frac{\partial^3 f(a+h)}{\partial a^3}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{(x-a)^n}{(1,+1)^n}\frac{\partial^n f(a+h)}{\partial a^n}+\frac{(x-a)^{n+1}}{(1,+1)^n}\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{f(x+h)-f(a+h)}{x-a}\right).$$

Dies ist die Taylorsche Reihe in ihrer anwendbarsten Form. Um nur ein Beispiel davon zu geben, so setzen wir $h=0$, schreiben $n-1$ statt n und dividiren die ganze Reihe durch $(x-a)^n$; dann entsteht

7. $$\frac{fx}{(x-a)^n}=\frac{1}{(x-a)^n}fa+\frac{1}{(1,+1)(x-a)^{n-1}}\frac{\partial fa}{\partial a}+\frac{1}{(1,+1)^2(x-a)^{n-2}}\frac{\partial^2 fa}{\partial a^2}+\frac{1}{(1,+1)^3(x-a)^3}\frac{\partial^3 fa}{\partial a^3}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{(1,+1)^{n-1}(x-a)}\frac{\partial^{n-1}fa}{\partial a^{n-1}}+\frac{1}{(1,+1)^{n-1}}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\frac{fx-fa}{x-a}\right).$$

Soll jetzt der Bruch $\frac{\varphi x}{Fx}$, in welchem φx und Fx algebraische rationale Functionen von x sind, in Partialbrüche zerlegt werden, und man hat $Fx=(x-a)^n\psi x$, so kann man setzen:

8. $$\frac{\varphi x}{Fx}=\frac{\varphi x}{(x-a)^n\psi x}=\frac{A_0}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\frac{A_2}{(x-a)^{n-2}}+\cdots+\frac{A_{n-1}}{x-a}+\frac{X}{\psi x}.$$

Die Vergleichung dieser Reihe mit (7.) ergiebt auf der Stelle, dafs irgend ein Zähler A_ν dieser Partialbrüche ausgedrückt wird durch

9. $$A_\nu=\frac{1}{(1,+1)^\nu}\frac{\partial^\nu}{\partial a^\nu}\left(\frac{\varphi a}{\psi a}\right).$$

Es sei z. B. $\frac{2x-3}{(x+1)^3(x-2)}$ zu zerlegen. Wir setzen

$$u=\frac{2x-3}{x-2}=2+\frac{1}{x-2},\quad \partial u=-\frac{1}{(x-2)^2},\quad \partial^2 u=\frac{2}{(x-2)^3}.$$

Für $x=-1$ erhält man hieraus nach (9.) sogleich die 3 Zähler

$$\frac{5}{3},\quad -\frac{1}{9},\quad -\frac{1}{27},$$

welche zu den 3 entsprechenden Nennern

$$(x+1)^3,\quad (x+1)^2,\quad (x+1)$$

gehören. Der vierte, zum Nenner $x-2$ gehörige Zähler findet sich eben so gleich $\frac{1}{27}$, daher ist

$$\frac{2x-3}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{5}{3(x+1)^3}-\frac{1}{9(x+1)^2}-\frac{1}{27(x+1)}+\frac{1}{27(x-2)}.$$

In solchen und ähnlichen Fällen möchte vielleicht kein anderes Verfahren so schnell zum Ziele führen.

Die höhern Differenziale eines zweiseitigen Products lassen sich bekanntlich binomisch entwickeln; es ist nemlich

10. $$\partial^n.xy = x\partial^n y + \binom{n,-1}{1,+1}\partial x\,\partial^{n-1}y + \binom{n,-1}{1,+1}^2\partial^2 x\,\partial^{n-2}y + \binom{n,-1}{1,+1}^3\partial^3 x\,\partial^{n-3}y + \ldots + \partial^n x.y.$$

Setzt man hier $x = \frac{\varphi a}{\psi a}$ und $y = \psi a$, so kommt:

11. $$\partial^n \varphi a = \frac{\varphi a}{\psi a}\partial^n \psi a + \binom{n,-1}{1,+1}\partial\left(\frac{\varphi a}{\psi a}\right)\partial^{n-1}\psi a + \binom{n,-1}{1,+1}^2\partial^2\left(\frac{\varphi a}{\psi a}\right)\partial^{n-2}\psi a + \ldots + \partial^n\left(\frac{\varphi a}{\psi a}\right).\psi a.$$

Diese Reihe geht mit Rücksicht auf (9.) über in

12. $$\partial_n \varphi a = A_0\,\partial^n\psi a + (n,-1)A_1\,\partial^{n-1}\psi a + (n,-1)^2 A_2\,\partial^{n-2}\psi a + (n,-1)^3 A_3\,\partial^{n-3}\psi a + \ldots + (n,-1)^n A_n \psi a.$$

Durch diese Formel lassen sich die spätern Zähler aus den schon berechneten frühern finden. Sie liefert die bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi a &= A_0\,\psi a,\\
\partial\varphi a &= A_0\,\partial\psi a + A_1\psi a,\\
\partial^2\varphi a &= A_0\partial^2\psi a + 2A_1\,\partial\psi a + 2A_2\psi a,\\
\partial^3\varphi a &= A_0\,\partial^3\psi a + 3A_1\partial^2\psi a + 6A_2\partial\psi a + 6A_3\psi a,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

deren allgemeines Gesetz aber gewöhnlich nicht dargelegt wird.

Berlin, im Juli 1833.

27.

Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 1. im ersten, No. 10. im zweiten, No. 18. im dritten, No. 30. im vierten Hefte X. Bandes, No. 4. im ersten und No. 12. im zweiten Hefte dieses Bandes.)

(Von dem Herrn Dr. *Stern*, zu Göttingen.)

93.

Lagrange hat ein Mittel angegeben, die Theilnenner a_n, a_{n+1} u. s. w. von einer gewissen Grenze an zu finden, ohne dafs man die Wurzeln der entsprechenden Gleichungen

$$\varphi(x_n) = 0, \quad \chi(x_{n+1}) = 0 \text{ u. s. w.}$$

zu suchen braucht. Ein solches Mittel war bei seiner Methode um so nothwendiger, weil das Aufsuchen der Wurzeln gerade der schwierigste Theil derselben ist. Bei unserer Methode ist das Bedürfnifs desselben freilich weniger fühlbar, aber es kann doch mit grofsem Nutzen angewandt werden, weil man durch dasselbe, je weiter man in der Rechnung fortgeht, auch desto mehr Theilnenner durch eine einzige Operation erhält, ohne die Wurzeln der diesen Theilnennern entsprechenden Gleichungen suchen zu müssen.

Diese Verbesserung Lagrange's besteht, genau betrachtet, in nichts Anderem, als in der Verbindung der Neutonschen Annäherungsmethode mit dem Gebrauche der Kettenbrüche, und leidet an derselben Unvollkommenheit, wie diese. Bekanntlich besteht das Wesentliche der Neutonschen Methode in Folgendem. Kennt man schon einen Näherungswerth p der Wurzel einer Gleichung $f(x) = 0$, so setzt man $x = p + \omega$, wodurch man nach dem Taylorschen Lehrsatze die Gleichung

$$f(p) + \frac{\partial f(p)}{\partial p}\omega + \frac{\partial^2 f(p)}{2\partial p^2}\omega^2 + \ldots.$$

erhält, und wenn man die Glieder, in welchen höhere Potenzen von ω vorkommen, vernachlässigt, so hat man

$$f(p) + \frac{\partial f(p)}{\partial p}\omega = 0, \text{ oder } \omega = -\frac{f(p).\partial p}{\partial f(p)},$$

woraus man den neuen Näherungswerth

$$x = p - \frac{f(p).\partial p}{\partial f(p)}$$

erhält. Auf ähnliche Weise kann man verfahren, wenn man mit Hülfe der Kettenbrüche schon einen Näherungswerth gefunden hat, um einen oder mehrere der folgenden zu finden. Man nehme an, es sei die Gleichung $f(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$ gegeben, und man habe den Näherungswerth

$$x = F(a+1 : a_1+1 : a_2+\ldots+1 : a_n) = \frac{a,\ a_n}{a_1,\ a_n}$$

gefunden, der wahre Werth sei

$$x = F(a+1 : a_1+1 : a_2+\ldots+1 : a_n+1 : 2),$$

so sind die Gröfsen

$$\frac{a,\ a_{n-1}}{a_1,\ a_{n-1}} = \frac{p^\circ}{q^\circ}, \quad \frac{a,\ a_n}{a_1,\ a_n} = \frac{p}{q}$$

zwei auf einander folgende Näherungswerthe von x, und der wahre Werth ist

$$x = \frac{z.a,\ a_n + a,\ a_{n-1}}{z.a_1,\ a_n + a_1,\ a_{n-1}} \text{ (§. 7. und §. 16.)} = \frac{z.p+p^\circ}{z.q+q^\circ}$$

oder

$$1. \quad z = -\frac{q^\circ}{q} + \frac{(pq^\circ - p^\circ q)}{q^2}\left(\frac{1}{\frac{p}{q} - x}\right).$$

Nach der Neutonschen Methode findet man aber, wenn man $x = \frac{p}{q} + \omega$ setzt, den Näherungswerth

$$x = \frac{p}{q} - \frac{f\left(\frac{p}{q}\right).\partial\left(\frac{p}{q}\right)}{\partial f\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Substituirt man nun diesen Werth statt x in (1.), so hat man

$$2. \quad z = -\frac{q^\circ}{q} + \frac{(pq^\circ - p^\circ q)}{q^2}.\frac{\partial f\left(\frac{p}{q}\right)}{f\left(\frac{p}{q}\right)\partial\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Dieser Werth von z kann noch auf andere Weise ausgedrückt werden. Substituirt man nemlich in der Gleichung $f(x) = 0$, statt x den Werth $\frac{pz+p^\circ}{qz+q^\circ}$, so erhält man, nach gehöriger Reduction, eine neue Gleichung

$$Bz^m + B_1z^{m-1} + \ldots B_m = 0,$$

deren Coefficienten mit denen der Gleichung $\chi(x_{n+1}) = 0$ nothwendig identisch sind. Man findet aber

$$3. \quad B = Ap^m + A_1.p^{m-1}.q + A_2.p^{m-2}.q^2 + \ldots + A_m.q^m.$$

4. $B_1 = m.A.p^{m-1}.p^0 + (m-1)A_1.p^{m-2}.q.p^0 + (m-2)A_2.p^{m-3}.q^2.p^0 + \ldots.$
$\ldots. + A_1.p^{m-1}.q^0 + 2A_2.p^{m-2}.q.q^0 + 3A_3.p^{m-3}.q^2.q^0 + \ldots.$

Hieraus folgt

$mBq^0 - B_1.q = (pq^0 - p^0q)[mAp^{m-1} + (m-1)A_1.p^{m-2}.q + (m-2)A_2.p^{m-3}.q^2 + \ldots.];$

es ist aber

$$\frac{\partial f\left(\frac{p}{q}\right)}{\partial\left(\frac{p}{q}\right) f\left(\frac{p}{q}\right)} = \frac{mAp^{m-1} + (m-1)A_1.p^{m-2}.q + \ldots.}{Ap^m + A_1.p^{m-1}.q + \ldots.} \times q$$

$$= \frac{1}{pq^0 - p^0q}\left(mq^0 - \frac{B^1}{B}.q\right).q,$$

folglich

$$5. \quad z = (m-1)\frac{q^0}{q} - \frac{B^1}{B}.$$

Dies ist die Lagrangesche (Legendresche) Formel. Verwandelt man den Werth von z in einen Kettenbruch, so findet man hierdurch einen oder mehrere der auf a_m folgenden Theilnenner.

Das Neutonsche und das darauf gegründete Lagrangesche Verfahren haben die Unvollkommenheit, dafs man Glieder vernachlässigt, deren Werth und Einflufs auf das Resultat man nicht kennt, und dieser Umstand ist bekanntlich gerade die Ursache, weswegen Lagrange die Neutonsche Methode als unbrauchbar verworfen hat *). Freilich hat Lagrange Mittel angegeben, wodurch man eine Grenze der vernachlässigsten Gröfse bestimmen kann. Immer aber bleibt man darüber in Ungewifsheit, wie viel Theilnenner des Kettenbruchs, der den Werth von z angiebt, auch dem wahren Werth angehören. Das Lagrangesche Verfahren ist aber, eben so wie das Neutonsche, einer weiteren Ausbildung fähig. Hierzu braucht man nur zwei Grenzen zu finden, zwischen welchen jedesmal z eingeschlossen ist; entwickelt man die Werthe dieser Grenzen in Kettenbrüche, so gehören die ersten Theilnenner, die beiden gemeinchaftlich sind, nothwendig dem wahren Werthe von z an. Zur Auffindung dieser Grenzen führen folgende Betrachtungen.

94.

Die Untersuchungen über die Realität der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ müssen uns, nach den früheren Erörterungen, wenn wirklich reelle Wurzeln vorhanden sind, jedesmal zu einer Gleichung $\varphi(x_n) = 0$

*) *Résol. des équat. num. Note V.*

führen, die so beschaffen ist, dafs innerhalb der Grenzen a_n und a_n+1 nur Eine reelle Wurzel derselben liegt, wenn die Wurzeln nicht schon in der Gleichung $f(x)=0$ selbst getrennt sind. Entwickelt man dann die neue Gleichung $\chi(x_{n+1})=0$, indem man $x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$ setzt, so mufs diese letztere Gleichung eine und nur eine reelle Wurzel haben, die >1 ist; ist diese Wurzel zwischen den Grenzen a_{n+1} und $a_{n+1}+1$ enthalten, so mufs die Zeichenreihe $[a_{n+1}+1]$ nur positive Zeichen enthalten, weil zwischen $a_{n+1}+1$ und ∞ keine Wurzel liegt: dagegen mufs in der Zeichenreihe $[a_{n+1}]$ ein und nur ein Zeichenwechsel vorkommen. Eben so wird die folgende Gleichung $\psi(x_{n+2})=0$, die durch die Substitution $x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+2}}$ entsteht, eine und nur eine reelle Wurzel haben, die >1 ist, und wenn diese zwischen den Grenzen a_{n+2} und $a_{n+2}+1$ eingeschlossen ist, so mufs wieder $[a_{n+2}+1]$ nur positive Zeichen, $[a_{n+2}]$ einen Zeichenwechsel enthalten, u. s. w. fort. Man wird aber nothwendig an eine Gleichung

$$F(x_{n+r}) = 0$$

kommen, deren einzige reelle Wurzel zwischen den Grenzen a_{n+r} und $a_{n+r}+1$ eingeschlossen ist, und die so beschaffen ist, dafs die Zeichenreihen nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen verschieden sind, so dafs man

$$\begin{aligned}[a_{n+r}] &= \ldots.++-\\ [a_{n+r}+1] &= \ldots.+++\end{aligned}$$

hat. Die Gleichung $\chi(x_{n+r})=0$ ist nemlich, wie gesagt, so beschaffen, dafs sich in der Zeichenreihe $[a_{n+1}]$ nur ein negatives Zeichen befindet, dem ein positives Zeichen folgt oder vorausgeht; entspricht nun dieses negative Zeichen z. B. der Function $\frac{\partial^r \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+r}^r}$, so folgt hieraus, dafs die aus den dieser Function vorhergehenden Functionen gebildeten Gleichungen

$$\frac{\partial^{r+1}\chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^{r+1}} = 0, \quad \frac{\partial^{r+1}\chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^{r+2}} = 0 \text{ u. s. w.}$$

zwischen den Grenzen a_{n+1} und $a_{n+1}+1$ keine Wurzel haben, weil beide Zeichenreihen, wenn man sie nur bis zu diesen Functionen entwickelt, nur positive Zeichen enthalten. Dagegen werden die Gleichungen

$$\frac{\partial^r \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^r} = 0, \quad \frac{\partial^{r-1}\chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^{r-1}} = 0 \ldots. \frac{\partial \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0,$$

eben so wie $\chi(x_{n+1}) = 0$ zwischen den Grenzen a_{n+1} und $a_{n+1}+1$ eine Wurzel haben. Es könnte nun sein, dafs die Gleichung $\chi(x_{n+1}) = 0$ mit einer oder mehreren der übrigen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel hätte, so dafs z. B. $\chi(\alpha) = 0$, $\frac{\partial^r \chi(\alpha)}{\partial \alpha^r} = 0$ und $\alpha \begin{matrix} > a_{n+1} \\ < a_{n+1}+1 \end{matrix}$ wäre; wir abstrahiren aber von diesem Falle, weil eine solche Wurzel bekanntlich leicht entdeckt werden kann, indem man den gemeinschaftlichen Factor von $\chi(x)$ und $\frac{\partial^r \chi(x)}{\partial x^r}$ sucht. Setzen wir daher voraus, dafs der Werth der Wurzel der Gleichung $\chi(x_{n+1}) = 0$ von den Werthen der Wurzeln der übrigen Gleichungen verschieden ist, so ist klar, dafs man diesen Werth zwischen Grenzen α, β einschliefsen kann, zwischen welchen keine der Wurzeln der übrigen Gleichungen liegt. Substituirt man daher statt a_{n+1} und $a_{n+1}+1$ die engeren Grenzen α und β, so müssen diese so beschaffen sein, dafs die Zeichenreihen $[\alpha]$ und $[\beta]$ nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen verschieden sind. Die Entwickelung der Wurzeln durch Kettenbrüche besteht aber gerade darin, dafs man statt der gefundenen Grenzen a_{n+1} und $a_{n+1}+1$ nicht unmittelbar engere Grenzen α, β setzt, sondern allmählig die Substitutionen $x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{x_{n+2}}$, $x_{n+2} = a_{n+2} + \frac{1}{x_{n+3}}$ u. s. w. macht. Ist man nun in der Entwickelung so weit gekommen, dafs man

$$\alpha = F(a_{n+1}+1 : a_{n+2} + \ldots . + 1 : a_{n+r}),$$
$$\beta = F(a_{n+1}+1 : a_{n+2} + \ldots . + 1 : a_{n+r}+1)$$

hat, so mufs die Gleichung $F(x_{n+r}) = 0$, deren reelle Wurzeln zwischen den Grenzen a_{n+r} und $a_{n+r}+1$ liegen, so beschaffen sein, dafs die Zeichenreihen $[a_{n+r}]$ und $[a_{n+r}+1]$ nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen verschieden sind, so dafs dieses in $[a_{n+r}]$ negativ, in $[a_{n+r}+1]$ positiv ist, d. h., dafs die Gleichungen

$$\frac{\partial F(x_{n+r})}{\partial x_{n+r}} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(x_{n+r})}{\partial x_{n+r}^2} = 0 \text{ u. s. w.}$$

zwischen den Grenzen a_{n+r} und $a_{n+r}+1$ keine Wurzel haben. Denn hätte z. B. die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F(x_{n+r})}{\partial x_{n+r}^2} = 0$$

zwischen diesen Grenzen eine Wurzel, so müfste auch die Gleichung, die dieser vorausgeht,

$$\frac{\partial^2 F_1(x_{n+r-1})}{\partial x_{n+r-1}^2} = 0,$$

zwischen den Grenzen $a_{n+r-1} + \frac{1}{a_{n+r}}$ und $a_{n+r-1} + \frac{1}{a_{n+r}+1}$ eine Wurzel haben, da ja $x_{n+r-1} = a_{n+r-1} + \frac{1}{x_{n+1}}$ gesetzt worden ist. Aus demselben Grunde müfste die Wurzel der Gleichung $\frac{\partial^2 F_{11}(x_{n+r-2})}{\partial x_{n+r-2}^2} = 0$ zwischen $a_{n+r-2} + \frac{1}{a_{n+r-1} + \frac{1}{a_{n+r}}}$ und $a_{n+r-2} + \frac{1}{a_{n+r-1} + \frac{1}{a_{n+r}+1}}$ liegen, und würde man diese Schlufsfolge fortsetzen, so fände man zuletzt, dafs die Wurzel der Gleichung $\frac{\partial^2 \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^2} = 0$ zwischen

$$F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots + 1 : a_{n+r}) = \alpha \text{ und}$$
$$F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots + 1 : a_{n+r}) = \beta$$

enthalten wäre, gegen die Voraussetzung.

Sobald man aber an eine solche Gleichung $F(x_{n+r}) = 0$ gekommen ist, bei der die Zeichenreihen nur in Absicht auf das letzte Zeichen verschieden sind, kann man die Rechnung ohne Aufsuchung der Wurzeln fortsetzen.

95.

Substituirt man nemlich statt x_{n+1} die Werthe

1. $F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots + 1 : a_{n+r})$,
2. $F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots + 1 : a_{n+r} + 1)$,

zwischen welchen der wahre Werth von x_{n+1} liegt, so werden, nach dem Vorhergehenden, die diesen Werthen entsprechenden Zeichenreihen nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen verschieden sein, weil die Gleichungen

$$\frac{\partial \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^2} = 0 \text{ u. s. w.}$$

zwischen diesen Grenzen keine Wurzeln haben können, da die Gleichungen

$$\frac{\partial F(x_{n+r})}{\partial x_{n+r}} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(x_{n+r})}{\partial x_{n+r}^2} = 0 \text{ u. s. w.}$$

keine Wurzeln zwischen den Grenzen a_{n+r} und $a_{n+r}+1$ haben. Man bezeichne denjenigen der Werthe (1.) und (2.), der gröfser als x_{n+1} ist, durch $\frac{p'}{q'}$, denjenigen, der kleiner ist, durch $\frac{p}{q}$ (und zwar wird der Werth (1.) gröfser oder kleiner als x_{n+1} sein, je nachdem die Anzahl der Theilnenner gerade oder ungerade ist). Ferner setze man

$$F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots + 1 : a_{n+r-1}) = \frac{p^0}{q^0},$$

und es sei der wahre Werth von x_{n+1}

$$x_{n+1} = F(a_{n+1}+1 : a_{n+2}+\ldots.+1 : a_{n+r}+1 : z),$$
$$x_{n+1} = F(a_{n+1}+1 : a_{n+2}+\ldots.+1 : (a_{n+r}+1)-1 : z_1).$$

Nimmt man nun an, dafs der Werth (1.) kleiner als x_{n+1}, also $= \frac{p}{q}$ ist, so hat man

$$3.\quad x_{n+1} = \frac{z.p+p^0}{z.q+q^0},$$

und ferner

$$4.\quad x_{n+1} = \frac{z_1 p^1 - p^0}{z_1 q^1 - q^0}.$$

Man kann aber, vermöge eines bekannten Theorems, den Werth von x_{n+1} noch auf andere Weise andeuten. Hat man nemlich eine Function $\chi(x+y)$, so kann diese auf folgende Weise entwickelt werden:

$$\chi(x+y) = \chi(x) + y.\frac{\partial\chi(u)}{\partial u},$$
$$\chi(x+y) = \chi(x) + y\frac{\partial\chi(x)}{\partial x} + \frac{y^2}{2}\frac{\partial^2\chi(u)}{\partial u^2}\ ^*),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo u eine Gröfse bedeutet, die zwischen x und $x+y$ liegt, die aber in jeder Gleichung einen anderen Werth hat. Setzt man daher $x_{n+1} = \frac{p}{q}+\omega$, so hat man

$$\chi(x_{n+1}) = \chi\left(\frac{p}{q}+\omega\right) = 0,$$

oder

$$\chi\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{\omega\,\partial\chi(u)}{\partial u} = 0,$$

wo u eine zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p}{q}+\omega$ und daher auch zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p^1}{q^1}$ liegende Zahl bedeutet, also

$$\omega = -\frac{\chi\left(\frac{p}{q}\right)}{\frac{\partial\chi(u)}{\partial u}}.$$

Da aber sowohl $\frac{\partial\chi\left(\frac{p}{q}\right)}{\partial\left(\frac{p}{q}\right)}$ als auch $\frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}$ positive Gröfsen sind, so mufs auch $\frac{\partial\chi(u)}{\partial u}$ eine solche sein, da ja nach der Voraussetzung zwischen $\frac{p}{q}$

*) *Lagrange Traité des fonct. anal. art.* 53.

und $\frac{p^1}{q^1}$ keine Wurzel der Gleichung $\frac{\partial \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = 0$ liegt, und zwar mufs $\frac{\partial \chi(u)}{\partial u}$ gröfser als $\frac{\partial \chi\left(\frac{p}{q}\right)}{\partial\left(\frac{p}{q}\right)}$ und kleiner als $\frac{\partial \chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}$ sein, weil $\frac{\partial \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}}$ zwischen den Grenzen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p^1}{q^1}$ immer wachsen mufs, indem nach der Voraussetzung $\frac{\partial^2 \chi(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}^2}$ innerhalb dieser Grenzen immer positiv ist; $\chi\left(\frac{p}{q}\right)$ dagegen ist nach der Voraussetzung negativ. Setzt man daher

$$\omega = -\frac{\chi\left(\frac{p}{q}\right)}{\frac{\partial \chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}},$$

so ist dieser Werth kleiner als der wahre Werth von ω, und man hat daher

$$5. \quad x_{n+1} > \frac{p}{q} - \frac{\chi\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial \chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}.$$

Setzt man $x_{n+1} = \frac{p^1}{q^1} - \omega$, so findet man

$$\chi(x_{n+1}) = \chi\left(\frac{p^1}{q^1} - \omega_1\right) = \chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right) - \omega_1 \frac{\partial \chi(u)}{\partial u} = 0,$$

wo u wieder eine zwischen $\frac{p^1}{q^1} - \omega_1$ und $\frac{p^1}{q^1}$ oder eine zwischen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p^1}{q^1}$ liegende Zahl bedeutet, und es ist $\omega_1 = \frac{\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\frac{\partial \chi(u)}{\partial u}}$; Zähler und Nenner dieses Bruches sind positive Gröfsen. Setzt man daher

$$\omega_1 = \frac{\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right) \cdot \partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial \chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)},$$

so ist dieser Werth kleiner als der wahre Werth von ω_1, und daher

$$6. \quad x_{n+1} < \frac{p^1}{q^1} - \frac{\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right) \cdot \partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial \chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}.$$

Aus den Formeln (3.) und (5.) folgt

$$\frac{zp+p^0}{zq+q^0} > \frac{p}{q} - \frac{\chi\left(\frac{p}{q}\right)\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)},$$

und hieraus findet man, da $\chi\left(\frac{p}{q}\right)$ negativ ist,

$$7.\quad z < -\frac{q^0}{q} + \frac{p^0q - pq^0}{q^0} \cdot \frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\cdot\chi\left(\frac{p}{q}\right)}.$$

Aus den Formeln (4.) und (6.) folgt

$$\frac{z_1p^1 - p^0}{z_1q^1 - q^0} < \frac{p^1}{q^1} - \frac{\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\cdot\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)},$$

also

$$8.\quad z_1 < \frac{q^0}{q^1} + \frac{p^0q^1 - p^1q^0}{q^{1^2}} \cdot \frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\cdot\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)},$$

da aber $a + 1 - \frac{1}{z_1} = a + \frac{1}{z}$ ist, so hat man $z = \frac{1}{1-\frac{1}{z_1}}$, und daher

$$9.\quad z > \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{\frac{q^0}{q^1} + \frac{p^0q^1 - p^1q^0}{q^{1^2}} \cdot \frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\cdot\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}}}.$$

Die Gleichungen (7.) und (9.) geben also zwei Grenzen, zwischen welchen z jedesmal eingeschlossen ist, und wenn man die beiden Werthe in Kettenbrüche (deren Theilzähler sämmtlich $= 1$ sind) verwandelt, so gehören die ersten Theilnenner, die beiden gemeinschaftlich sind, nothwendig dem wahren Werthe von z an. Hierdurch findet man zwei neue Näherungswerthe, zwischen welchen x_n enthalten ist, und mit welchen man wie mit den früheren $\frac{p}{q}$, $\frac{p^1}{q^1}$ verfahren kann, um wieder andere Näherungswerthe zu finden.

Es wurde bisher angenommen, dafs

$$F(a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots + 1 : a_{n+r} = \frac{p}{q}$$

ist, ist aber dieser Näherungswerth gröfser, als x_{n+1}, also $= \frac{p^1}{q^1}$, so mufs

man statt der Formeln (7.) und (9.) zwei andere Formeln nehmen, denn man hat alsdann

$$10.\quad x_{n+1} = \frac{z_1 p - p^0}{z_1 q - q^0},$$

$$11.\quad x_{n+1} = \frac{z p^1 - q^0}{z p^1 - q^0}.$$

Verbindet man Formel (10.) und (5.) und Formel (11.) mit (6.), so findet man

$$\frac{z^1 p - p^0}{z^1 q - q^0} > \frac{p}{q} - \frac{\chi\left(\frac{p}{q}\right)\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)},$$

$$\frac{z p^1 + p^0}{z q^1 + q^0} < \frac{p^1}{q^1} - \frac{\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)},$$

also

$$12.\quad z_1 < \frac{q^0}{q} + \frac{p^0 q - p q^0}{q^2} \cdot \frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\chi\left(\frac{p}{q}\right)},$$

oder

$$13.\quad z > \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\dfrac{q^0}{q} + \dfrac{p^0 q - p q^0}{q^2} \cdot \dfrac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\chi\left(\frac{p}{q}\right)}}},$$

und

$$14.\quad z < -\frac{q^0}{q^1} + \frac{p^1 q^0 - p^0 q^1}{q^{1\,2}} \cdot \frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}.$$

96.

Es ist aber nicht nöthig, zur Bestimmung des Werthes von z die Gröfsen $\frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}$, $\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)$, $\chi\left(\frac{p}{q}\right)$ besonders zu berechnen, vielmehr lassen sich die vorhergehenden Formeln so umformen, dafs alle in denselben vorkommenden Gröfsen schon berechnet sind. Betrachten wir zuerst die Formeln (7.), (8.), (9.), so sieht man sogleich, dafs der zweite Theil der Gleichung (8.) mit dem zweiten Theile der Gleichung (2.) in §. 93. über-

einstimmt, wenn man dort p^1, q^1 bezüglich statt p, q, und $-p^0$, $-q^0$ statt p^0, q^0 setzt, und man hat daher

$$15.\quad \frac{q^0}{q}+\frac{p^0q^1-p^1q^0}{q^{1^2}}\cdot\frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}=(1-m)\frac{q^0}{q^1}-\frac{B^1}{B},$$

wo B, B_1 die Coefficienten sind, die bezüglich den Potenzen z_1^m, z_1^{m-1} angehören, in der Gleichung, die man nach gehöriger Reduction erhält, wenn man in $\chi(x_{n+r})=0$ statt x_{n+1} den Werth $\frac{p^1z_1-p^0}{q^1z_1-q^0}$, oder wenn man in der Gleichung $F(x_{n+r})=0$ statt x_{n+r} den Werth $a_{n+r}+1+\frac{1}{-z_1}$ substituirt. Diese Gleichung ist

$$F(a_{n+r}+1)\,z_1^m-\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r}+1)}z_1^{m-1}+\ldots=0\quad(\S.\ 88.),$$

folglich

$$B=F(a_{n+r}+1),\ B_1=-\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r}+1)},$$

und

$$16.\quad z_1<\frac{(1-m)q^0}{q^1}+\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r})+1)F(a_{n+r}+1)}.$$

Die Formel (9.) geht also in folgende über:

$$17.\quad z>\frac{q^1\cdot\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r}+1)}-(m-1)q^0\cdot F(a_{n+r}+1)}{q^1\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r}+1)}[(m-1)q^0+q^1]F(a_{n+r}+1)}.$$

Da nach der Voraussetzung $\frac{p}{q}$ kleiner als x_{n+1}, und daher $\frac{p^0}{q^0}$ gröfser als x_{n+1} ist, so hat man

$$p^0q-pq^0=+1\ (\S.\ 16.),$$

dagegen

$$p^0q^1-p^1q^0=-1,\ \text{da}\ \frac{p^1}{q^1}=\frac{p+p^0}{q+q^0}\ \text{ist.}$$

Hiernach folgt aus (15.)

$$18.\quad \frac{\partial\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}{\partial\left(\frac{p^1}{q^1}\right)}=\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)\left(mq^0+\frac{B_1}{B}q^1\right)q^1.$$

Ferner ist aus Formel (3.) des §. 93. ersichtlich, dafs $\chi\left(\frac{p^1}{q^1}\right)=\frac{B}{q^{1^m}}=\frac{F(a_{n+r}+1)}{q^{1^m}}$ ist, und nennt man C den numerischen Werth des Coefficienten der Potenz z^m in der Gleichung, die aus $F(x_{n+r})=0$ entspringt, wenn man $a_{n+r}+\frac{1}{z}$ statt x_{n+r} substituirt, so hat man $\chi\left(\frac{p}{q}\right)=-\frac{C}{q^m}=\frac{F(a_{n-r})}{q^m}$, da

$\chi\left(\frac{p}{q}\right)$ negativ ist. Substituirt man, mit Berücksichtigung dieser Bemerkungen, den Werth (18.) in der Formel (7.), so findet man:

$$19. \quad z < \frac{\left(\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial(a_{n+r}+1)} q^{\text{I}} - m q^{\text{o}} F(a_{n+r}+1)\right) q^{m-1} + q^{\text{o}} F(a_{n+r}) q^{\text{I}^{m-1}}}{-F(a_{n+r})\, q \cdot q^{\text{I}^{m-1}}}.$$

Die Formel (14.) stimmt mit der Formel (2.) des §. 93. zusammen, wenn man dort überall p^{I}, q^{I} statt p, q setzt. Man hat daher

$$z < \frac{(m-1)q^{\text{o}}}{q^{\text{I}}} - \frac{C_{\text{I}}}{C},$$

wo $C = F(a_{n+r})$, $C_{\text{I}} = \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r})}$ ist, also

$$20. \quad z < \frac{(m-1)q^{\text{o}} F(a_{n+r}) - \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r})} q^{\text{I}}}{F(a_{n+r}) q^{\text{I}}}.$$

Da, wenn diese Formel Statt hat, $F(a_{n+1} + \ldots + 1 : a_{n+r})$ gröfser wie x_{n+1} und $= \frac{p^{\text{I}}}{q^{\text{I}}}$ ist, so mufs $\frac{p^{\text{o}}}{q^{\text{o}}}$ kleiner wie x_{n+1} sein, und daher

$$p^{\text{I}} q^{\text{o}} - p^{\text{o}} q^{\text{I}} = +1,$$

und da $\frac{p}{q} = \frac{p^{\text{I}} + p^{\text{o}}}{q^{\text{I}} + q^{\text{o}}}$ ist, so hat man

$$p q^{\text{o}} - p^{\text{o}} q = +1.$$

Hiernach ist

$$\frac{\partial \chi\left(\frac{p^{\text{I}}}{q^{\text{I}}}\right)}{\partial\left(\frac{p^{\text{I}}}{q^{\text{I}}}\right)} = \chi\left(\frac{p^{\text{I}}}{q^{\text{I}}}\right)\left(m q^{\text{o}} - \frac{C_{\text{I}}}{C} q^{\text{I}}\right) q^{\text{I}} = \frac{F(a_{n+r})}{q^{\text{I}^m}}\left(m q^{\text{o}} - \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r}) F(a_{n+r})} q^{\text{I}}\right) q^{\text{I}},$$

Daher verwandelt sich Formel (12.) in folgende:

$$21. \quad z_{\text{I}} < \frac{q^{\text{o}}}{q} - \frac{F(a_{n+r})\, q^{m-2}}{F(a_{n+r}+1)\, q^{\text{I}^{m-1}}}\left(m q^{\text{o}} - \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r}) F(a_{n+r})} q^{\text{I}}\right),$$

und aus Formel (13.) wird

$$22. \quad z > \frac{q^{\text{o}} q^{\text{I}^{m-1}} F(a_{n+r}+1) - q^{m-1} F(a_{n+r})\left(m q^{\text{o}} - \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r}) F(a_{n+r})} q^{\text{I}}\right)}{(q^{\text{o}} - q) q^{\text{I}^{m-1}} F(a_{n+r}+1) - q^{m-1} F(a_{n+r})\left(m q^{\text{o}} - \frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial(a_{n+r}) F(a_{n+r})} q^{\text{I}}\right)}.$$

Fafst man das Vorhergehende zusammen, so findet man folgende practische Regel. Ist eine Gleichung $f(x) = 0$ gegeben, die eine reelle, zwischen a und $a+1$ liegende Wurzel hat, so leitet man aus dieser Gleichung, nach früher gegebenen Regeln, andere Gleichungen ab zur Bestimmung der Theilnenner a_1, a_2 u. s. w., bis man an eine Gleichung $\chi(x_{n+1}) = 0$ kommt,

deren einzige reelle Wurzel zwischen den ganzen Zahlen a_{n+1} und $a_{n+1}+1$ liegt. Diese Gleichung betrachte man alsdann als die ursprünglich gegebene, und leite aus ihr andere ab, bis man an eine Gleichung $F(x_{n+r})=0$ kommt, deren einzige reelle Wurzel zwischen a_{n+r} und $a_{n+r}+1$ liegt, und die so beschaffen ist, dafs $[a_{n+r}]$ und $[a_{n+r}+1]$ nur in Hinsicht auf das letzte Zeichen verschieden sind. Man berechne alsdann die Gröfse

$$F(a_{n+2}, a_{n+r-1}) = F(a_{n+2}+1 : a_{n+3}+\ldots.+1 : a_{n+r-1}) = q^0,$$

und die Gröfse

$$F(a_{n+2}, a_{n+r}) = F(a_{n+2}+1 : a_{n+3}+\ldots.+1 : a_{n+r}),$$

welche $=q$ oder $=q^1$ ist. Je nachdem r eine ungerade oder gerade Zahl ist, und je nachdem das Eine oder das Andere der Fall ist, hat man $q^1 = q^0+q$ oder $q=q^0+q^1$; die Gröfsen $F(a_{n+r})$ und $\frac{\partial F(a_{n+r})}{\partial (a_{n+r})}$ müssen ohnehin zur Bestimmung der Zeichenreihe, oder zur Bestimmung der auf $F(x_{n+r})=0$ folgenden Gleichung berechnet sein. Berechnet man alsdann noch, je nachdem $F(a_{n+2}, a_{n+r})=q^1$ oder $=q$ ist, entweder blos $F(a_{n+r}+1)$, oder die beiden Gröfsen $F(a_{n+r}+1)$ und $\frac{\partial F(a_{n+r}+1)}{\partial (a_{n+r}+1)}$, so hat man alle Stücke, die zur Bestimmung der Grenzen von z dienen. Hat man, vermöge dieser Grenzen, die neuen Theilnenner $a_{n+r+1}, a_{n+r+2} \ldots. a_{n+r+t}$ gefunden, so bildet man die Gleichung $\varphi(a_{n+r+t})=0$, und verfährt mit dieser wie mit der Gleichung $F(a_{n+r})=0$, um neue Theilnenner zu finden.

Es kann zuweilen sein, dafs man an eine Gleichung $F(x_{n+r})=0$ gekommen ist, und dennoch aus den gezogenen Grenzen für die erforderliche genauere Bestimmung des Werthes von z kein Resultat gewinnt, indem diese Grenzen so weit auseinander liegen, dafs sie gar keinen gemeinschaftlichen Theilnenner haben. In diesem Falle sucht man mit Hülfe des Theorems (*A.*) einen oder einige der auf a_{n+r} folgenden Theilnenner, und so kommt man bald an eine Gleichung, von welcher an die Grenzen von z immer mehr Theilnenner mit Sicherheit angeben, da diese Grenzen immer näher zusammenrücken *).

97.

Es sei z. B. die Gleichung $f(x)=x^3-x^2-2x+1=0$ gegeben, deren Wurzeln bekanntlich $2\cos\frac{\pi}{7}$, $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{3\pi}{7}$ sind; der Werth der

*) Eine genauere Bestimmung der Convergenz der Annäherung kann leicht aus *Analyse des équat. liv.* 2. *art.* 9. abgeleitet werden.

ersten Wurzel wird durch Hülfe der Kettenbrüche auf folgende Weise gefunden. Es ist

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 3x^2 - 2x - 2,$$
$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 6x - 2,$$
$$\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} = 6,$$

also

$$[1] = \underset{6}{+}\,\underset{4}{+}\,\underset{1}{-}\,\underset{1}{-}$$
$$[2] = \underset{6}{+}\,\underset{10}{+}\,\underset{6}{+}\,\underset{1.}{+}$$

Hier entspricht also die Gleichung $f(x)=0$ der Gleichung $\chi(x_{n+1})=0$, und man hat

$$x > \tfrac{1}{1},\ < \tfrac{2}{1}.$$

Entwickelt man die folgende Gleichung, so hat man:

$$f_1(x_1) = x_1^3 + x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0,$$
$$\frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2x_1 - 2,$$
$$\frac{\partial^2 f_1(x_1)}{\partial x_1^2} = 6x_1 + 2,$$
$$\frac{\partial^3 f_1(x_1)}{\partial x_1^3} = 6,$$

und

$$[1] = \underset{6}{+}\,\underset{8}{+}\,\underset{3}{+}\,\underset{1}{-}$$
$$[2] = \underset{6}{+}\,\underset{14}{+}\,\underset{14}{+}\,\underset{7,}{+}$$

also

$$x_1 > \tfrac{1}{1},\ < \tfrac{2}{1} \text{ und } x > 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2},$$
$$< 1 + \tfrac{1}{1} = 2.$$

Die Gleichung $f_1(x_1)=0$ entspricht der Gleichung $F(x_{n+r})=0$; hier ist also

$$a_{n+r} = 1 \text{ und } \frac{p^0}{q^0} = \frac{1}{1},\ \frac{p}{q} = \frac{3}{2},\ \frac{p^1}{q^1} = \frac{2}{1}.$$

Man mufs daher zur Bestimmung der Grenzen von z die Formeln (20.) und (22.) anwenden, also

$$z < \frac{2.1. - 1 - 3.1}{-1.1} = 5,$$

$$z > \frac{1.1.7 - 4.-1\left(3.1 - \frac{3}{-1}.1\right)}{1.1.7 - 4.-1\left(3.1 - \frac{3}{-1}.1\right) - 2.1.7} = \frac{31}{17} = 1+.$$

Da die beiden Grenzen keinen gemeinschaftlichen Theilnenner haben, so entwickele man die folgende Gleichung

$$f_2(x_2) = x_2^3 - 3x_2^2 - 4x_2 - 1 = 0,$$
$$\frac{\partial f_2(x_2)}{\partial x_2} = 3x_2^2 - 6x_2 - 4,$$
$$\frac{\partial^2 f_2(x_2)}{\partial x_2^2} = 6x_2 - 6,$$
$$\frac{\partial^3 f_2(x_2)}{\partial x_2^3} = 6,$$

$$[4] = \underset{6}{+}\,\underset{18}{+}\,\underset{20}{+}\,\underset{1}{-}$$

$$[5] = \underset{6}{+}\,\underset{24}{+}\,\underset{41}{+}\,\underset{29.}{+}$$

Hier ist

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{2}{1},\ \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{9}{5},\ \frac{p^1}{q^1} = \frac{11}{6},$$

daher mufs man zur Bestimmung der Grenzen von z die Formeln (17.) und (19.) anwenden; man findet

$$z > \frac{6.41 - 2.1.29}{6.41 - 8.29} = 13+,$$
$$z < \frac{(41.6 - 3.1.29)5^2 + 1. - 1.6^2}{5.6^2} = 21+.$$

Da auch diese Grenzen noch nicht enge genug sind, so bilde man die Gleichung:

$$f_3(x_3) = x_3^3 - 20x_3^2 - 9x_3 - 1 = 0,$$
$$\frac{\partial f_3(x_3)}{\partial x_3} = 3x_3^2 - 40x_3 - 9,$$
$$\frac{\partial^2 f_3(x_3)}{\partial x_3^2} = 6x_3 - 40,$$
$$\frac{\partial^3 f_3(x_3)}{\partial x_3^3} = 6,$$

und

$$[20] = \underset{6}{+}\,\underset{80}{+}\,\underset{391}{+}\,\underset{181}{-}$$

$$[21] = \underset{6}{+}\,\underset{86}{+}\,\underset{473}{+}\,\underset{251.}{+}$$

Hier ist

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{9}{5},\ \frac{p^1}{q^1} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{20}}} = \frac{182}{101},\ \frac{p}{q} = \frac{191}{106}.$$

Zur Bestimmung der Grenzen von z müssen die Formeln (20.) und (22.)

angewandt werden, und man findet:

$$z < \frac{41301}{18281} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{48 +}}}}$$

$$z > \frac{487028871}{215621065} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 +}}}};$$

hierdurch sind also vier neue Theilnenner, 2, 3, 1, 6, gewonnen.

Die entsprechenden Näherungswerthe sind $\frac{373}{207}$, $\frac{1301}{722}$, $\frac{1674}{929}$, $\frac{11345}{6296}$. Die dem Theilnenner 6 entsprechende Gleichung ist:

$$f_7(x_7) = 559x_7^3 - 2540x_7^2 - 4961x_7 - 2059 = 0,$$

$$\frac{\partial f_7(x_7)}{\partial x_7} = 1677x_7^2 - 5080x_7 - 4961,$$

$$\frac{\partial^2 f_7(x_7)}{\partial x_7^2} = 3354x_7 - 5080,$$

$$\frac{\partial^3 f_7(x_7)}{\partial x_7^3} = 3354,$$

$$[6] = \underset{3354}{+}\ \underset{15044}{+}\ \underset{24931}{+}\ \underset{2521}{-}$$

$$[7] = \underset{3354}{+}\ \underset{18398}{+}\ \underset{41652}{+}\ \underset{30491}{+}$$

und

$$\frac{p^0}{q^0} = \frac{1674}{929},\ \frac{p}{q} = \frac{13019}{7225},\ \frac{p^1}{q^1} = \frac{11345}{6296}.$$

Die Formeln (20.) und (22.) geben

$$z < \frac{161649594}{15872216} = 10 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{19 +}}}}}}}}$$

$$z > \frac{9683301444074499}{950794125692399} = 10 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 +}}}}}}}}$$

Hierdurch sind 8 neue Theilnenner, 10, 5, 2, 2, 1, 2, 2, 1, gewonnen. Entwickelt man die entsprechenden Näherungswerthe, so findet man, dafs dem letzten Theilnenner 1 der Bruch $\frac{40674108}{22572427}$ entspricht, dem vorhergehenden Theilnenner 2 entspricht der Bruch $\frac{28600781}{15872236}$; der Unterschied zwischen dem wahren Werthe der Wurzel und dem Näherungswerthe $\frac{40674108}{22572427}$ ist daher kleiner als $\frac{1}{(22572427)^2}$, oder auch kleiner als

$$\frac{1}{2.28600781.40674108}$$ (§. 15.).

Würde man die dem letzten Theilnenner 1 entsprechende Gleichung ableiten, so könnte man daraus wieder eine Menge neuer Theilnenner finden, und so dem Werthe der Wurzel noch viel näher kommen.

98.

Fafst man das in diesem Kapitel Gesagte zusammen, so findet man:

1) dafs die Methode der Entwickelung der Wurzeln durch Kettenbrüche keinesweges die Berechnung des kleinsten Unterschiedes der Wurzeln erheischt,
2) dafs diese Methode kein wesentliches Element der Analysis ist, sondern vielmehr unendlich viele Methoden möglich sind, vermittelst welcher man sich dem Werthe der Wurzeln nähern kann,
3) dafs diese Methoden alle genau sind, d. h. zwei Werthe geben, zwischen welchen die Wurzel jedesmal enthalten ist,
4) dafs alle Methoden zugleich auf die Entdeckung der imaginairen Wurzeln führen, sobald man das Theorem (*A.*) zu Hülfe ruft.

B. Anwendung der recurrirenden Reihen zur Auflösung der Gleichungen.

99.

Die Auflösung der Gleichungen vermittelst der Kettenbrüche, und die unendlich vielen anderen möglichen Auflösungsarten, von welchen die Rede war, beruhen alle auf der Anwendung des Theorems (*A.*), d. h. sie fordern, dafs man die Natur und die Grenzen der Wurzeln schon zum Voraus bestimmt habe, ehe man zur nähernden Berechnung der Wurzeln schreitet. Es wird daher nicht unpassend sein, zu zeigen, dafs man eine andere Methode, oder eigentlich viele andere Methoden, zur Auflösung der Gleichungen anwenden kann, die, ohne sich auf die Anwendung des Theorems (*A.*) zu gründen, dennoch die Natur und die Werthe der (reellen)

Wurzeln, so genau, als man es wünscht, angeben. Die Behandlung dieser Methoden bietet ein reiches Feld von Untersuchungen dar; ich mufs mich darauf beschränken, hier nur eine derselben in der Kürze zu behandeln. Ehe ich aber diese Methode erläutere, ist es nöthig, eine Übersicht der frühern Leistungen zu geben, aus welchen sie erwachsen ist. Bekanntlich hat D. Bernoulli zuerst gezeigt *), wie man sich der recurrirenden Reihen zur Auffindung der Wurzeln bedienen kann, indem er nachwies, wie gewisse Functionen der Wurzeln mit den Coefficienten der Gleichung durch eine recurrirende Reihe zusammenhängen. Euler **), der Bernoulli's Ansicht mit aller ihm eigenen Klarheit ausführte, zeigte auch zugleich die Mangelhaftigkeit und beschränkte Anwendung dieses Verfahrens. Man kann nemlich auf directem Wege durch dasselbe nur die gröfste und kleinste Wurzel finden, und zwar nur in dem Falle, wenn sie reell sind. Die Gröfse der Wurzeln wird hier auf folgende Weise bestimmt: Man erhebt jede Wurzel zum Quadrat, und ordnet diese Quadrate nach ihrer Gröfse; dem gröfseren Quadrat entspricht alsdann die gröfsere Wurzel, und so kann man die Wurzeln nach ihrer Gröfse ordnen. Befinden sich unter den Wurzeln auch imaginäre, so wird die Gröfse der letzteren auf folgende Weise bestimmt: Man multiplicirt jedes Paar zusammengehörender imaginärer Wurzeln mit einander, dieses Product ist immer reell; man vergleicht es mit den Quadraten der reellen Wurzeln; von dem Range, welchen es unter diesen einnimmt, hängt alsdann der Rang ab, welchen die zwei zusammengehörenden imaginären Wurzeln in der Reihe der nach ihrer Gröfse geordneten Wurzeln einnehmen. Sobald die gröfsten Wurzeln ein Paar imaginäre sind, so führt Bernoulli's Methode zu keinem Resultate. Lagrange ***), der diese Methode mit einigen vortrefflichen Bemerkungen bereichert hat, hat jedoch für ihre weitere Ausbildung nichts Wesentliches gethan. Auch Legendre †) hat zu dem Bekannten nichts hinzugefügt, als die Bemerkung, dafs man durch Umbildung der Gleichungen leicht bewirken kann, dafs irgend eine der Wurzeln die gröfste werde, so dafs die Bernoullische Methode zur Berechnung der Werthe aller Wurzeln angewandt werden könnte. Aber diese

*) *Comment. acad. Petr. T.* 3.
**) *Introd. in anal. infin. cap.* 17.
***) *Résol. des équat. num. note* 6.
†) *Théor. des nombres art.* 113.

Umbildung führt nothwendig zu weitläufigen Rechnungen, und die Schwierigkeit wegen der imaginären Wurzeln bleibt unerledigt. Der Erste, welchem man eine wahrhafte Fortbildung der Bernoullischen Methode verdankt, ist Fourier. Ein Abschnitt des zweiten, leider nicht erschienenen Theils seines Werkes: „*Analyse des équations*" sollte eine ausführliche Behandlung dieser Methode enthalten; für jetzt ist nur Das bekannt, was er darüber in dem *Exposé sinoptique**) mitgetheilt hat. Nach diesem sind die Hauptresultate folgende: Nennt man die Wurzeln, nach ihrer Gröfse geordnet, s, t, u, v, u. s. w., und nimmt zuerst an, dafs alle Wurzeln reell sind, so kann man aus der gegebenen Gleichung recurrirende Reihen bilden, durch welche man, so nahe, als es verlangt wird, die Werthe von s, $s.t$, $s.t.u$ u. s. w., und daher auch die Werthe jeder einzelnen Wurzel, finden kann. Ist aber die gröfste Wurzel imaginär, d. h. nehmen zwei zusammengehörende imaginäre Wurzeln den ersten Rang ein, so giebt die erste Reihe, welche den Werth von s angeben soll, gar kein Resultat; dagegen wird die zweite Reihe allerdings den Werth von $s.t$ angeben. Ist die dritte Wurzel u reell, so erhält man durch eine dritte Reihe das Product $s.t.u$; ist u imaginär, so giebt diese Reihe kein Resultat; dagegen erhält man durch eine vierte Reihe den Werth des Products $s.t.u.v$ u. s. w.; es kann aber nie vorkommen, dafs zwei auf einander folgende Reihen kein Resultat geben. Hierdurch wird also nicht blos der Werth aller reellen Wurzeln gefunden, sondern auch das Vorhandensein der imaginären Wurzeln entdeckt. Um aber den Werth der letztern zu finden, bildet man andere Reihen, welche nicht, wie die ersten, Näherungswerthe der Producte, sondern vielmehr der Summen der Wurzeln geben. Und indem man so Summe und Product je zweier imaginärer Wurzeln erfährt, findet man daraus die Werthe dieser Wurzeln. Fourier hat den Beweis keines einzigen der hierher gehörenden Sätze mitgetheilt, auch nicht einmal angegeben, auf welche Weise die erforderlichen Reihen gebildet werden, zwei ausgenommen, nemlich diejenigen, die zur Bestimmung von $s+t$ und st dienen; aber auch von diesen ist die eine unrichtig angegeben **).

---

*) *pag.* 68 ff. Fourier hat im Jahre 1822 eine Abhandlung über denselben Gegenstand der Akademie der Wissenschaften überreicht; es ist zu hoffen, dafs sie im Druck erscheint.

**) Vergl. Journ. für die Math. Bd. pag.

Auf den Zusammenhang zwischen den Coefficienten und gewissen Functionen der Wurzeln beruht auch eine andere Auflösungsmethode, die Lagrange*) angegeben hat; aber indem er fordert, dafs man die höheren Gleichungen auf niedrigere zurückführt, so wird eben dadurch, wie er selbst sagt, die Methode, wegen der vielen weitläufigen Operationen, die sie fordert, unausführbar.

Die hier folgende Methode ist, was die leitende Idee und die einzelnen Resultate betrifft, mit der Fourierschen durchaus identisch; die Art, wie die einzelnen Reihen gebildet werden, ist bestimmt verschieden, wie man schon daraus sehen kann, wenn man die Reihen, die das Product und die Summe der zwei ersten Wurzeln geben, mit denjenigen, die Fourier gegeben hat, vergleicht. Ich glaube behaupten zu können, dafs Fourier's Verfahren viel bequemer in der Ausübung ist, dafs dagegen das hier angegebene viel näher liegt, weswegen es auch gewählt worden ist.

100.

Ich mufs zuerst einige bekannte Lehrsätze anführen. Es sei die gegebene Gleichung

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots + A_m = 0,$$

wo A_1, A_2 u. s. w. ganze Zahlen sind. Zur gröfseren Einfachheit wird vorausgesetzt, dafs die Gleichung keine gleichen Wurzeln hat. Es seien

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_m$$

die m Wurzeln dieser Gleichung, nach ihrer Gröfse (diesen Ausdruck in der früher erwähnten Bedeutung genommen) geordnet. Ferner sei

$$\Sigma\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_m$$
$$\Sigma\alpha_1^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2,$$

und allgemein bedeute $\Sigma\alpha_1^n$ die Summe der $n$ten Potenzen aller Wurzeln, so ist bekanntlich

1) $\Sigma\alpha_1 = -A_1,$
2) $\Sigma\alpha_1^2 = -A_1\Sigma\alpha_1 - 2A_2,$
3) $\Sigma\alpha_1^3 = -A_1\Sigma\alpha_1^2 - A_2\Sigma\alpha_1 - 3A_3,$
4) $\Sigma\alpha_1^4 = -A_1\Sigma\alpha_1^3 - A_2\Sigma\alpha_1^2 - A_3\Sigma\alpha_1 - 4A_4,$

so dafs man vermittelst einer recurrirenden Reihe, aus den Coefficienten A_1, A_2, A_3 u. s. w., die Summen aller Potenzen der Wurzeln finden kann. Je gröfser die Potenz n ist, auf welche man die Wurzeln erhebt, desto mehr wird auch α_1^n im Vergleich mit der Summe der Potenzen $\alpha_2^n + \alpha_3^n + \ldots + \alpha_m^n$

*) *Résol. des équat. note* 10.

betragen, wenn α_1 reell ist, man wird zuletzt an eine Potenz n kommen, die so beschaffen ist, dafs man, ohne merklichen Fehler zu begehen,

$$\Sigma\alpha_1^n = \alpha_1^n,$$
$$\Sigma\alpha_1^{n+1} = \alpha_1^{n+1}$$

setzen kann, woraus alsdann $\alpha_1 = \frac{\Sigma\alpha_1^{n+1}}{\Sigma\alpha_1^n}$ folgt. Bildet man eine recurrirende Reihe, deren Glieder $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\alpha_1^2$, $\Sigma\alpha_1^3$ u. s. w. sind, und dividirt jedes Glied durch das vorhergehende, so erhält man den Werth von α_1 desto genauer, je weiter man die Reihe entwickelt; die Quotienten werden immer mehr und mehr gegen die Wurzel α_1 convergiren, man sagt daher, die Reihe sei convergent; sie soll in der Folge die Reihe (C) heifsen. Dies ist die bekannte Bernoullische Regel. Man sieht, dafs sie nur in dem Fall anwendbar ist, wenn α_1 reell ist; ist dagegen diese Wurzel imaginair, so kann natürlich α_1^n oder α_1^{n+1} nicht hinsichtlich der Gröfse mit der Summe der übrigen Potenzen verglichen werden: daher wird auch die Reihe (C) in diesem Falle kein Resultat geben, sondern divergiren.

Bildet man aus den Wurzeln alle Combinationen, ohne Wiederholung, zu zwei Elementen, und bezeichnet die Summe derselben durch $\Sigma\alpha_1\alpha_2$; eben so die Combinationen ohne Wiederholung zu drei Elementen, und bezeichnet die Summe derselben durch $\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ u. s. w., so hat man bekanntlich

$$\Sigma\alpha_1\alpha_2 = A_2, \quad \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -A_3, \quad \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = A_4 \text{ u. s. w.}$$

Aber aus (1.) und (2.) folgt

$$5. \quad 2\Sigma\alpha_1\alpha_2 = 2A_2 = (\Sigma\alpha_1)^2 - \Sigma\alpha_1^2.$$

Substituirt man in dieser Formel statt $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ die $n$ten Potenzen $\alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots$, so hat man:

$$6. \quad 2\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n = (\Sigma\alpha_1^n)^2 - \Sigma\alpha_1^{2n}.$$

Je gröfser n ist, desto weniger wird die Summe der übrigen in $\Sigma\alpha_1^n\alpha_2^n$ enthaltenen Glieder gegen das erste $\alpha_1^n.\alpha_2^n$ betragen, und zwar sowohl, wenn α_1, α_2 beide reell, als auch, wenn beide imaginair sind, da auch im letzteren Falle das Product $\alpha_1\alpha_2$ reell, und gröfser als das Quadrat jeder reellen Wurzel, und um so mehr, als das Product zweier dieser Wurzeln ist. Ist daher n sehr grofs, so kann man ohne merklichen Fehler

$$2\alpha_1^n\alpha_2^n = 2\Sigma\alpha_1^n\alpha_2^n = (\Sigma\alpha_1^n)^2 - \Sigma\alpha_1^{2n},$$
$$2\alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n+1} = 2\Sigma\alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n+1} = (\Sigma\alpha_1^{n+1})^2 - \Sigma\alpha_1^{2n+2}$$

setzen, folglich

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{(\Sigma\alpha_1^{n+1})^2 - \Sigma\alpha_1^{2n+2}}{(\Sigma\alpha_1^n)^2 - \Sigma\alpha_1^{2n}}.$$

Hieraus erhält man folgende Regel:

Man bilde aus den Gliedern der Reihe (C) die neue Reihe

$$(C_1) = (\Sigma a_1)^2 - \Sigma a_1^2,\ (\Sigma a_1^2)^2 - \Sigma a_1^4,\ (\Sigma a_1^3)^2 - \Sigma a_1^6 \text{ u. s. w.,}$$

und dividire jedes Glied dieser neuen Reihe durch das vorhergehende, so werden die Quotienten gegen die Grenze $a_1 . a_2$ convergiren; kennt man daher den Werth von a_1 durch die Reihe (C), so findet man aus (C) den Werth von a_2. Dies gilt jedoch nur für den Fall, wenn a_1 und a_2 beide reell oder beide imaginair sind. Ist aber a_1 reell, a_2 imaginair, so ist (C) zwar convergent, aber (C_1) divergent.

Aus (1.), (2.), (3.) folgt:

$$7.\quad 2.3\,\Sigma a_1 a_2 a_3 = -2.3\,A_3 = (\Sigma a_1)^3 - 3\,\Sigma a_1 . \Sigma a_1^2 + 2\,\Sigma a_1^3 .$$

Substituirt man wieder statt $a_1, a_2, a_3 \ldots$ die $n$ten Potenzen dieser Wurzeln, so hat man

$$8.\quad 2.3\,\Sigma a_1^n a_2^n a_3^n = (\Sigma a_1^n)^3 - 3\,\Sigma a_1^n\,\Sigma a_1^{2n} + 2\,\Sigma x_1^{3n},$$

und man kann daher wieder, wenn n grofs genug ist,

$$a_1^n a_2^n a_3^n = (\Sigma a_1^n)^3 - 3\,\Sigma a_1^n\,\Sigma a_1^{2n} + 2\,\Sigma a_1^{3n},$$

$$a_1^{n+1} . a_2^{n+1} . a_3^{n+1} = (\Sigma a_1^{n+1})^3 - 3\,\Sigma a_1^{n+1} . \Sigma a_1^{2n+2} + 2\,\Sigma a_1^{3n+3}$$

setzen. Um also den Werth von $a_1 . a_2 . a_3$ zu erfahren, bildet man aus den Gliedern der Reihe (C) eine neue Reihe

$$(C_2) = (\Sigma a_1)^3 - 3\,\Sigma a_1 . \Sigma a_1^2 + 2\,\Sigma a_1^3,\ (\Sigma a_1^2)^3 - 3\,\Sigma a_1^2 . \Sigma a_1^4 + 2\,\Sigma a_1^6,$$
$$(\Sigma a_1^3)^3 - 3\,\Sigma a_1^3 . \Sigma a_1^6 + 2\,\Sigma a_1^9 \text{ etc.,}$$

und dividirt jedes Glied durch das vorhergehende. Da man nun den Werth von $a_1 . a_2$ schon aus der Reihe (C_1) erfahren hat, so erfährt man hieraus den Werth von a_3. Nur in dem Falle, wenn a_3 die erste eines Paares imaginairer Wurzeln ist, convergirt die Reihe (C_1), während (C_2) divergirt.

Aus (1.), (2.), (3.), (4.) ergiebt sich:

$$9.\quad 2.3.4\,\Sigma a_1 . a_2 . a_3 . a_4 = 2.3.4\,A_4$$
$$= (\Sigma a_1)^4 - 6(\Sigma a_1)^2 \Sigma a_1^2 + 8\,\Sigma a_1 . \Sigma a_1^3 - 6\,\Sigma_1^4 + 3(\Sigma a_1^2)^2,$$

$$10.\quad 2.3.4 . \Sigma a_1^n . a_2^n . a_3^n . a_4^n$$
$$= (\Sigma a_1^n)^4 - 6(\Sigma a_1^n)^2 . \Sigma a_1^{2n} + 8\,\Sigma a_1^n . \Sigma a_1^{3n} - 6\,\Sigma a_1^{4n} + 3(\Sigma a_1^{2n})^2;$$

ist n sehr grofs, so kann man statt $\Sigma a_1^n . a_2^n . a_3^n . a_4^n$ auch blofs $a_1^n . a_2^n . a_3^n . a_4^n$ setzen; bildet man daher eine Reihe (C_3), deren allgemeines Glied

$$(\Sigma a_1^n)^4 - 6\,\Sigma (a_1^n)^2 . \Sigma a_1^{2n} + 8\,\Sigma a_1^n . \Sigma a_1^{3n} - 6\,\Sigma a_1^{4n} + 3(\Sigma a_1^{2n})^2$$

ist, und dividirt jedes Glied durch das vorhergehende, so convergiren die Quotienten gegen den Werth $a_1 . a_2 . a_3 . a_4$. Nur in dem Falle, wenn a_3

die erste zweier imaginairer Wurzeln ist, wird (C_3) divergiren. Die bisher entwickelten Sätze sind einzelne Fälle des folgenden allgemeinen. Man findet den Werth von $\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3....\alpha_r$ auf folgende Weise. Es ist *),

$$11.\quad 2.3.4....r\Sigma\alpha_1.\alpha_2.\alpha_3....\alpha_r$$
$$=(\Sigma\alpha_1)^r-\frac{r.r-1}{2}(\Sigma\alpha_1)^{r-2}.\Sigma\alpha_1^2+\frac{r.r-1.r-2}{3}(\Sigma\alpha_1)^{r-3}.\Sigma\alpha_1^3$$
$$-\frac{r.r-1.r-2.r-3}{4}(\Sigma\alpha_1)^{r-4}.\Sigma\alpha_1^4+....$$
$$....+\frac{r.r-1.r-2.r-3}{2.4}(\Sigma\alpha_1)^{r-4}.(\Sigma\alpha_1^2)^2-....$$

Setzt man in (11.) statt α überall α^n, so erhält man eine neue Formel, welche den Werth von $\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n....\alpha_r^n$ in Functionen von $\Sigma\alpha_1$, $\Sigma\alpha_1^2$ u. s. w. ausgedrückt angiebt; ist n grofs genug, so kann man, statt $\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n....\alpha_r^n$, blofs $\alpha_1^n.\alpha_2^n....\alpha_r^n$ setzen, und daher aus den Gliedern der Reihe (C) eine andere Reihe (C_{r-1}) ableiten, die so beschaffen ist, dafs der Quotient je zweier auf einander folgender Glieder gegen den Werth $\alpha_1.\alpha_2....\alpha_r$ convergirt, und diesem Werthe desto näher kommt, je weiter man in der Entwickelung fortgeht. Dies gilt jedoch nur für den Fall, wenn $\alpha_1.\alpha_2....\alpha_r$ reell ist; ist aber $\alpha_1.\alpha_2....\alpha_r$ imaginair, so ist die Behauptung, dafs die übrigen in $\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n....\alpha_r^n$ enthaltenen Glieder gegen das erste verschwinden, nicht ferner anwendbar: die Reihe (C_{r-1}) wird divergiren. Dagegen wird aber $\alpha_1.\alpha_2....\alpha_r.\alpha_{r+1}$ ein reeller Ausdruck sein, und daher werden auch alle übrigen in $\Sigma\alpha_1^n.\alpha_2^n...\alpha_r^n.\alpha_{r+1}^n$ enthaltenen Glieder gegen das erste $\alpha_1^n.\alpha_2^n...\alpha_r^n.\alpha_{r+1}^n$ verschwinden, wenn n grofs genug genommen wird; folglich wird auch eine Reihe (C_r) gebildet werden können, so dafs die Quotienten je zweier ihrer auf einander folgenden Glieder gegen $\alpha_1.\alpha_2....\alpha_{r+1}$ convergiren.

Man hat also nun folgendes Resultat gewonnen. Sind alle Wurzeln reell, so kann man aus der Reihe (C) andere Reihen ableiten, die die Werthe von $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ u. s. w. angeben, wodurch also die Werthe der einzelnen Wurzeln gefunden werden. Sind aber unter den Wurzeln imaginaire, so werden die Reihen, die einem Producte $\alpha_1.\alpha_2....\alpha_r$ entsprechen, dessen letzter Factor α_r imaginair ist, divergiren, dagegen aber wird die folgende Reihe, die dem Producte $\alpha_1.\alpha_2....\alpha_{r+1}$ entspricht, convergiren; niemals aber kann es unter diesen Umständen vorkommen, dafs zwei auf einander folgende Reihen divergiren. Sobald man also

*) Waring *meditat. algebr. pg.* 13.

sieht, dafs von zwei auf einander folgenden Reihen eine divergent, die andere convergent ist, so weifs man, dafs die Gleichung zwei imaginaire Wurzeln hat.

Hieraus folgt, dafs diese Methode, so weit sie bisher entwickelt ist, schon die Werthe aller reellen Wurzeln angiebt, und zugleich die imaginairen Wurzeln mit Leichtigkeit entdecken lehrt. Sie leistet also mehr als die Lagrangesche Methode, und eben so viel als die Methoden, die sich auf das Thorem (A) gründen. Um dies zuerst durch einige Beispiele zu erläutern, soll die Gleichung

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

aufgelöst werden. Hier hat man

$$(C) = \overset{1}{0},\ \overset{2}{14},\ -\overset{3}{21},\ \overset{4}{98},\ -\overset{5}{245},\ \overset{6}{833},\ -\overset{7}{2401},\ \overset{8}{7546},\ -\overset{9}{22638},\ \overset{10}{69629},$$
$$-\overset{11}{211288},\ \overset{12}{645869}\ \ldots.,$$

wo die Zeiger 1, 2, 3 .... andeuten, dafs die darunter stehenden Zahlen den Gröfsen Σa_1, Σa_1^2, Σa_1^3 .... entsprechen. Die Quotienten der Reihe (C) convergiren, und man hat daher näherungsweise

$$a_1 = \frac{645869}{-211288} = -3{,}056\ldots.$$

Ferner ist

$$(C_1) = -14,\ 98,\ -402,\ 2058,\ -9604,\ 48020\ldots.$$

also

$$a_1 a_2 = \frac{48020}{-9604} = -5,$$

und

$$a_2 = \frac{-5}{-3{,}056} = 1{,}636\ldots.;$$

ferner ist

$$a_1 a_2 a_3 = -7,$$

also

$$a_3 = \frac{-7}{-5} = 1{,}4.$$

Die Gleichung hat also drei reelle Wurzeln, wovon eine zwischen -3 und -4, zwei zwischen 1 und 2 liegen. Diese Resultate stimmen mit den in §. 89. gefundenen zusammen.

Sei ferner die Gleichung

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

gegeben. Hier ist

$$(C) = -\overset{1}{1},\ -\overset{2}{1},\ \overset{3}{8},\ -\overset{4}{17},\ \overset{5}{14},\ \overset{6}{20},\ -\overset{7}{85},\ \overset{8}{135},\ -\overset{9}{55},\ -\overset{10}{276},\ \overset{11}{791},$$
$$-\overset{12}{980},\ -\overset{13}{118},\ \overset{14}{3177},\ -\overset{15}{6877},\ \overset{16}{6215},\ \overset{17}{6272},\ -\overset{18}{32713},\ \overset{19}{55802},\ -\overset{20}{29852}$$

$-97^{21}705, 310^{22}859, -417^{23}175, 26^{24}412, 1178^{25}039, -2758^{26}224, 2778^{27}218,$
$1866^{28}085, -12490^{29}417, 228^{30}75255, -149^{31}67328, -338^{32}42713, 1214^{33}07470,$
$-1757^{34}40340, 394^{35}57355, 4318^{36}16023, -10994^{37}11711, 12193^{38}98548, 4889^{39}90159,$
$-47313^{40}86820, 93118^{41}33202, -71406^{42}74871, -113925^{43}13741, 471086^{44}18815,$
$-733525^{45}08040, 270520^{46}44687, 1561620^{47}53594, -4355288^{48}65732,$
$5272845^{49}36407, 931118^{50}39099, -17767^{51}26169471, 37654^{52}03188244,$
$-32925^{53}51279121, -368524^{54}3389856, 1815516^{55}5223506, -3036255^{56}937851....$

Diese Reihe divergirt. Ferner hat man

$(C_1) = 2, 18, 44, 154, 472, 1380, 4048, 12010, 35738, 106028, ...$
$3842396445932, 11403238645380, 33844830165076, ...$

Diese Reihe convergirt, die Gleichung hat also zwei imaginaire Wurzeln, und es ist deren Product näherungsweise

$$a_1 . a_2 = \frac{33844830165076}{11403238645380} = 2{,}968001 ....$$

Man entwickele nun die dritte Reihe

$$(C_2) = 12, -12, -78, 12, -816, 1374, 600 ....$$

Diese Reihe divergirt. Die vierte Reihe dagegen ist

$(C_3) = 48, 0, -24, 96, 408, 648, 552, 288, 624, 2280, 4800, 6504,$
$6600, 7896 ....$

Diese Reihe convergirt, die Gleichung hat also noch zwei imaginaire Wurzeln, und es ist das Product der vier ersten Wurzeln

$$a_1 . a_2 . a_3 . a_4 = \frac{7896}{6600} = 1{,}196;$$

die letzte Wurzel a_5 ist reell, und zwar ist

$$a_5 = \frac{1{,}000}{1{,}196} = 0{,}8528.$$

Die Gleichung hat also nur eine reelle Wurzel, die zwischen 0 und 1 liegt, wie schon (§. 92.) gefunden wurde.

101.

Es ist noch übrig, zu zeigen, wie man die Werthe der imaginairen Wurzeln finden kann. Die Behandlung dieses Gegenstandes ist um so wichtiger, da er bisher von den Mathematikern ziemlich vernachlässigt worden ist*), und alle Mittel, die man bis jetzt zur Auffindung dieser

*) Man vergl. *théorie des nomb. art.* 116.

Werthe vorgeschlagen hat, zuletzt auf ein unsicheres Probiren zurückkommen, so dafs die folgende Methode wohl die erste ist, welche diese Aufgabe direct löst, und zugleich so genaue Werthe giebt, als man es wünscht. Die Idee, auf welcher diese Methode beruht, ist folgende. Im Vorhergehenden wurde gezeigt, wie man Reihen (C_1), (C_2), (C_3) u. s. w. bilden kann, deren $n$tes Glied, wenn n grofs genug genommen wird, bezüglich den Werth von $\alpha_1^n.\alpha_2^n$, $\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n$, $\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n.\alpha_4^n$.... angiebt. Kann man nun andere Reihen (D_1), (D_2), (D_3) .... bilden, deren $n$tes Glied den Werthen von

$$(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1^n.\alpha_2^n),\ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n),\ (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n.\alpha_4^n)$$

entspricht, so erhält man, indem man das $n$te Glied der Reihe (D_1) durch das $n$te Glied der Reihe (C_1) dividirt, den Werth von $\alpha_1+\alpha_2$, und eben so erhält man, wenn man das $n$te Glied der Reihe (D_2), (D_3) u. s. w. bezüglich durch das $n$te Glied der Reihe (C_2), (C_3) u. s. w. dividirt, die Werthe von $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$ u. s. w. Aus den Reihen (C_1), (C_2) u. s. w. haben sich aber schon die Werthe von $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ u. s. w. ergeben. Man kennt daher Summe und Product der zwei, drei, vier u. s. w. ersten Wurzeln, woraus man Summe und Product jeder zwei aufeinander folgender Wurzeln finden kann. Sind daher zwei solche Wurzeln imaginair, so findet man ihren Werth aus dem bekannten Werthe von Summe und Product.

Die Reihen (D_1), (D_2), (D_3) u. s. w., sind aber leicht aus den Gliedern der Reihe (C) zu bilden. Man erhebe alle Wurzeln auf die $n$te Potenz, und bilde aus den Elementen $\alpha_1^n, \alpha_2^n \ldots . \alpha_m^n$ alle Combinationen, ohne Wiederholung, zu zwei Elementen, und multiplicire jedes Product $\alpha_r^n.\alpha_s^n$ mit der Summe $\alpha_r+\alpha_s$; die Summe aller auf diese Weise entstehenden Glieder werde durch $\Sigma(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1^n\alpha_2^n$ angedeutet; eben so bezeichne $\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n$ die Summe der Glieder, welche man erhält, wenn man aus den zur $n$ten Potenz erhobenen Wurzeln alle Combinationen ohne Wiederholung zu drei Elementen bildet, und jedes Product durch die Summe der darin enthaltenen Wurzeln multiplicirt u. s. w. Alsdann hat man

$$12.\quad \Sigma(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1^n.\alpha_2^n = \Sigma\alpha_1^{n+1}.\Sigma\alpha_1^n - \Sigma\alpha_1^{2n+1}.$$

Nimmt man n grofs genug, so wird jedes der übrigen in $\Sigma(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1^n.\alpha_2^n$ enthaltenen Glieder gegen das erste $(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1^n.\alpha_2^n$ ganz unbedeutend sein, und man wird daher n so grofs annehmen können, dafs man, ohne merklichen Fehler zu begehen,

$$(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1^n\alpha_2^n = \Sigma\alpha_1^{n+1}.\Sigma\alpha_1^n - \Sigma\alpha_1^{2n+1}$$

setzen kann. Bildet man also eine Reihe

$$(D_1) = \Sigma\alpha_1^2.\Sigma\alpha_1 - \Sigma\alpha_1^3,\ \Sigma\alpha_1^3.\Sigma\alpha_1^2 - \Sigma\alpha_1^5,\ \Sigma\alpha_1^4.\Sigma\alpha_1^3 - \Sigma\alpha_1^7,\ \ldots.$$

und dividirt das $n$te Glied derselben durch das $n$te Glied der Reihe (C), so wird der Quotient sich dem Werthe $\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)$ desto mehr nähern, je gröfser n genommen wird. Dies gilt jedoch nur für den Fall, wenn α_1 und α_2 beide reell oder beide imaginair sind; ist aber α_1 reell, α_2 imaginair, so wird die Reihe (D_1) divergiren.

Ferner hat man

$$13.\quad 2\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n$$
$$= \Sigma\alpha^{n+1}.(\Sigma\alpha_1^n)^2 - (2\Sigma\alpha_1^{2n+1}.\Sigma\alpha_1^n + \Sigma\alpha_1^{2n}.\Sigma\alpha_1^{n+1}) + 2\Sigma\alpha_1^{3n+1}.$$

Ist n grofs genug, so kann man statt $\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n$ auch blofs $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n$ setzen; bildet man daher eine Reihe (D_2), deren allgemeines Glied $\Sigma\alpha_1^{n+1}.(\Sigma\alpha_1^n)^2 - (2\Sigma\alpha_1^{2n+1}.\Sigma\alpha_1^n + \Sigma\alpha_1^{2n}.\Sigma\alpha_1^{n+1}) + 2\Sigma\alpha_1^{3n+1}$ ist, und dividirt das $n$te Glied dieser Reihe durch das $n$te Glied der Reihe (C_2), so wird der Quotient sich dem Werthe $\frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$ desto mehr nähern, je gröfser n ist. Ausgenommen ist der Fall, wenn α_3 die erste zweier imaginairer Wurzeln ist, weil alsdann die Reihe (D_2) eben so wie die Reihe (C_2) kein Resultat giebt.

Weiter findet man

$$14.\quad 2.3.\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n.\alpha_4^n$$
$$= \Sigma\alpha_1^{n+1}.(\Sigma\alpha_1^n)^3 - (3\Sigma\alpha_1^{2n+1}.(\Sigma\alpha_1^n)^2 + 2\Sigma\alpha_1^{2n}.\Sigma\alpha_1^{n+1}.\Sigma\alpha_1^n)$$
$$+ 2(3\Sigma\alpha^{3n+1}.\Sigma\alpha_1^n + \Sigma\alpha_1^{3n}.\Sigma\alpha_1^{n+1}) - 2.3\Sigma\alpha_1^{4n+1} + 2\Sigma\alpha_1^{2n+1}.\Sigma\alpha_1^{2n}.$$

Nimmt man n grofs genug, so kann man statt $\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n.\alpha_4^n$ blofs $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\alpha_3^n.\alpha_4^n$ setzen; bildet man daher eine Reihe (D_3), deren $n$tes Glied der zweite Theil der Gleichung (14.) ist, so nähert sich der Quotient, den man erhält, wenn man das $n$te Glied dieser Reihe durch das $n$te Glied der Reihe (C_3) dividirt, dem Werthe $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)$ desto mehr, je gröfser n ist; ausgenommen ist jedoch wieder der Fall, wenn α_4 die erste zweier zusammengehörender imaginairer Wurzeln ist. Wir würden auf ähnliche Weise zeigen können, wie man allgemein eine Reihe bilden kann, deren $n$tes Glied

$$= 2.3.\ldots.r-1\,\Sigma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_r)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\ldots.\alpha_r^n$$

ist, woraus alsdann der Werth von $(\alpha_1+\alpha_2+\ldots.+\alpha_r)\alpha_1^n.\alpha_2^n.\ldots.\alpha_r^n$ gefunden wird, begnügen uns aber, der Kürze halber, auf ein schon angeführtes Werk *)

*) Waring *meditat. analyt. probl.* 3. *pag.* 8.

zu verweisen, aus welchem die erwähnte Reihe leicht gefunden werden kann, und bemerken nur noch, dafs hier, eben so wie bei den Reihen (C), (C_1), (C_2), ..., nie zwei auf einander folgende Reihen divergent sein können.

102.

In §. 100. wurde gefunden, dafs die Gleichung

$$x^5+x^4+x^3-2x^2+2x-1=0$$

als erste Wurzeln zwei imaginaire hat; es soll deren Werth gefunden werden.

Aus der dort gefundenen Reihe (C) leite man die Reihe (D_1) ab. Man findet

$$(D_1) = -7, -22, -51, -183, -511, -1582, -4598, -13697, -40622, -120611, ..., -12970774286976.$$

Die Zahl -12970774286976 ist 27ste Glied der Reihe (D_1); das 27ste Glied der Reihe (C_1) ist $=11403238645380$, man hat daher

$$\alpha_1+\alpha_2 = 2.\frac{-12970774286976}{11403238645380} = -2{,}274928;$$

verbindet man diesen Werth mit dem schon gefundenen

$$\alpha_1.\alpha_2 = 2{,}968001,$$

so erhält man als Werth der zwei imaginairen Wurzeln

$$-1{,}137464 \pm \sqrt{(-1{,}674177)} = -1{,}137464 \pm 1{,}2939\sqrt{(-1)}.$$

Die letzte Wurzel α_5 ist, wie früher gefunden wurde, reell und $=0{,}852842$.

Nun hat man

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5) = -1,$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5 = 1.$$

Substituirt man in diesen zwei Gleichungen die Werthe von α_1, α_2, α_5, so findet man

$$\alpha_3+\alpha_4 = 0{,}422086,$$
$$\alpha_3.\alpha_4 = \frac{1}{2{,}5312359} = 0{,}395064,$$

hieraus findet man die Werthe der zwei imaginairen Wurzeln α_3, α_4,

$$0{,}211043 \pm \sqrt{(-0{,}350525)} = 0{,}211043 \pm 0{,}5920516\sqrt{(-1)}.$$

Directer, aber weniger bequem, hätte man den Werth von α_3, α_4 finden können, wenn man die Reihe (D_3) gebildet hätte.

Um noch ein Beispiel der Anwendung des Vorhergehenden zur Auffindung der Werthe der imaginairen Wurzeln zu geben, soll die Gleichung

$$x^4-x+1=0$$

aufgelöst werden, die Legendre *) behandelt hat. Man findet

*) *Théor. des nombr. art.* 118.

$$(C) = \overset{1}{0}, \overset{2}{0}, \overset{3}{3}, -\overset{4}{4}, \overset{5}{0}, \overset{6}{3}, -\overset{7}{7}, \overset{8}{4}, \overset{9}{3}, \overset{10}{10}, \overset{11}{11}, -\overset{12}{1}, -\overset{13}{13}, \overset{14}{21}, -\overset{15}{12},$$
$$-\overset{16}{12}, \overset{17}{34}, -\overset{18}{33}, \overset{19}{0}, \overset{20}{46}, -\overset{21}{67}, \overset{22}{33}, \overset{23}{46}, -\overset{24}{113}, \overset{25}{100}, \overset{26}{13}, -\overset{27}{159}, \overset{28}{213},$$
$$-\overset{29}{87}, -\overset{30}{172}, \overset{31}{372}, -\overset{32}{300}, -\overset{33}{85}, \overset{34}{544}, -\overset{35}{672}, \overset{36}{215}, \overset{37}{629}, -\overset{38}{1216}, \overset{39}{887},$$
$$\overset{40}{414}, \overset{41}{1845}$$

$$(C_1) = 0, 4, 6, 12, 10, 10, 28, 28, 42, 54, 88, 114, 156, 228, 316,$$
$$444, 610, 874, 1216, 1702.$$

Die zwei ersten Wurzeln sind also imaginair, und man findet als Näherungswerthe

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{874}{610} = 1{,}43\ldots., \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{1216}{874} = 1{,}402, \quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{1702}{1216} = 1{,}399.$$

Man setze daher

$$\alpha_1\alpha_2 = 1{,}4$$

Ferner ist

$$(D_1) = -3, 3, -5, -7, -11, -8, -16, -22, -30, -43, -57,$$
$$-87, -144, -165, -228, -323, -450, -629, -887, -1237,$$

also

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{2.1237}{1702} = -1{,}453584.$$

Hieraus findet man, als Werth der zwei ersten Wurzeln α_1, α_2,

$$-0{,}726792 \pm 0{,}933634\sqrt{(-1)}.$$

Die Werthe der zwei anderen Wurzeln, α_3, α_4, findet man aus den Gleichungen

$$\alpha_3 . \alpha_4 = \frac{1}{1{,}4}, \quad \alpha_3 + \alpha_4 = 1{,}453584,$$

woraus man die Werthe $0{,}726792 \pm 0{,}4313455\sqrt{(-1)}$ erhält; statt dieser Werthe hat **Legendre** $0{,}727136 \pm 0{,}430014\sqrt{(-1)}$.

103.

Indem ich mir eine ausführlichere Behandlung des Zusammenhangs zwischen den recurrirenden Reihen und den Wurzeln der Gleichungen auf eine andere Gelegenheit aufbewahren mufs, füge ich nur noch folgende Bemerkungen hinzu.

I. Aus derselben Idee, auf welcher die in den vorigen §§. gelehrte Methode beruht, lassen sich eine Menge anderer ähnlicher Methoden ableiten. Es wurden nemlich dort Reihen gebildet, deren $n$tes Glied $= \alpha_1^n . \alpha_2^n \ldots . \alpha_r^n$, und andere, deren $n$tes Glied $= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r)\,\alpha_1^n . \alpha_2^n \ldots . \alpha_r^n$ ist, wodurch Summe und Product der r Wurzeln $\alpha_1\alpha_2 \ldots . \alpha_r$ gefunden wurden. Man sieht aber leicht, dafs man denselben Zweck erreichen kann, wenn man Reihen bildet, deren $n$tes Glied $= \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_r)\,\alpha_1^n . \alpha_2^n \ldots . \alpha_r^n$, und andere, deren $n$tes Glied $= \varphi(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r)(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r)\,\alpha_1^n . \alpha_2^n \ldots \alpha_r^n$

ist, wo $\varphi(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r)$ eine Function der ersten r Wurzeln bedeutet, in der sie alle auf gleiche Weise enthalten sind. Solche Reihen lassen sich aber wirklich auf mannichfaltige Weise bilden, und es sind daher auch mannichfaltige Auflösungsmethoden möglich. So z. B. hätte man um die Producte der Wurzeln zu finden, statt der Reihen (C_1) (C_2) u. s. w. auch die Reihen (D_1), (D_2) u. s. w. anwenden können, weil, wenn man jedes Glied der letzteren Reihen durch das vorhergehende dividirt, der Quotient sich ebenfalls den Producten $\alpha_1 . \alpha_2$, $\alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3$ u. s. w. nähert.

II. Von den Reihen (C_1), (C_2) .... ist jede folgende mühseliger zu bilden, als die vorhergehende, weil die Glieder jeder späteren Reihe zusammengesetzter sind, als die einer früheren. Ist daher die gegebene Gleichung von hohem Grade, so kann die Berechnung der Reihen sehr umständlich werden. Man kann sich aber die Mühe sehr erleichtern. Ist nemlich eine Gleichung vom $2m$ten Grade

$$x^{2m} + A_1 . x^{2m-1} + \ldots . + A_{2m} = 0$$

gegeben, so braucht man nicht aus der ersten Reihe (C), $2m-1$ andere Reihen (C_1), $(C_2) \ldots . (C_{2m-1})$, und $2m-1$ andere (D_1), $(D_2) \ldots . D_{2m-1}$ abzuleiten, sondern man leite aus der ersten (C) nur $m-1$ Reihen (C_1), $(C_2) \ldots . C_{m-1}$, und $m-1$ andere (D_1), $(D_2) \ldots . (D_{m-1})$ ab; hierdurch erfährt man die Werthe der ersten m Wurzeln, $\alpha_1 \alpha_2 \ldots . \alpha_m$. Um alsdann den Werth der folgenden m Wurzeln zu erfahren, substituire man in der gegebenen Gleichung statt x den Werth $\frac{1}{y}$. Hierdurch erhält man eine neue Gleichung vom $2m$ten Grade, in der y die unbekannte Gröfse ist. Man suche nun wieder mit Hülfe der recurrirenden Reihen die m ersten Wurzeln dieser Gleichung: kennt man diese, so kennt man auch die m letzten Wurzeln der ersten Gleichung, da, vermöge der Gleichung $x = \frac{1}{y}$, den gröfsten Werthen von y die kleinsten Werthe von x entsprechen.

III. Durch Umbildung der gegebenen Gleichungen in andere kann man oft Reihen erhalten, die viel schneller convergiren, als diejenigen, die man aus den ursprünglichen Gleichungen erhält, wie schon Euler hinsichtlich der Reihe (C) gezeigt hat. Man wird sich aber durch Vergleichung sehr bald überzeugen, dafs die Methoden, die auf Anwendung des Theorems (A) beruhen, viel bequemer sind, als die Methode der recurrirenden Reihen, sobald es nur darauf ankommt, die Werthe der reellen Wurzeln zu finden. (Der Schlufs folgt im nächsten Hefte.)

28.

Demonstratio formulae

$$\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}\partial w = \frac{\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\partial x \cdot \int_0^\infty e^{-x}x^{b-1}\partial x}{\int_0^\infty e^{-x}x^{a+b-1}\partial x} = \frac{\Gamma a\,\Gamma b}{\Gamma(a+b)}.$$

(Auct. Dr. C. G. J. Jacobi, prof. math. Regiom.)

Quoties variabilibus x, y valores omnes positivi tribuuntur inde a 0 usque ad $+\infty$, posito

$$x+y=r, \quad x=rw,$$

variabili novae z valores conveniunt omnes positivi a 0 usque ad $+\infty$, variabili w valores omnes positivi a 0 usque ad $+1$. Fit simul

$$\partial x\,\partial y = r\,\partial r\,\partial w.$$

Sit iam e notatione nota:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\partial x,$$

habetur

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \iint e^{-x-y}x^{a-1}y^{b-1}\partial x\,\partial y,$$

variabilibus x, y tributis valoribus omnibus positivis a 0 usque ad $+\infty$. Posito autem:

$$x+y=r, \quad x=rw,$$

integrale duplex propositum ex antecedentibus altero quoque modo in duos factores discerpitur:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(b) = \int_0^\infty e^{-r}r^{a+b-1}\partial r \int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}\partial w,$$

unde

$$\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}\partial w = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Quod est theorema fundamentale, quo integralium Eulerianorum, quae ill. Legendre vocavit, altera species per alteram exhibetur.

23. Aug. 1833.

29.
Aufgaben.

1.

Ein schwerer Körper bewegt sich, mit gleichförmiger Geschwindigkeit, auf einer Linie fort, die der Durchschnitt einer Ebene durch den Mittelpunct der Erde mit der Oberfläche der Erde (des ruhigen Meeres) ist. Wie wird sich die Kraft, mit welcher der bewegte Körper die Bahn, während seiner Bewegung, drückt, zur Schwere verhalten?

2.

I. In so fern ein geradliniges Polygon in allen Fällen durch die Länge und Lage der Perpendikel aus einem festen Puncte auf die Seiten vollständig bestimmt wird: die Seiten, Winkel und den Flächen-Inhalt des Polygons durch jene Bestimmungsstücke auszudrücken, auch die Bedingungen zwischen den Bestimmungsstücken in den drei besonderen Fällen anzugeben: wenn die Ecken des Polygons in einem und demselben Kreise liegen: wenn seine Seiten von einem und demselben Kreise berührt werden, und wenn Beides zugleich der Fall ist.

II. In so fern ein von Ebenen umschlossenes Polyëder in allen Fällen durch die Länge und Lage der Perpendikel aus einem festen Punct auf die Seiten-Ebenen vollständig bestimmt wird: die Kanten, die Winkel zwischen den Kanten in den Seitenflächen, die Winkel, welche die Seitenflächen mit einander machen, und den körperlichen Inhalt des Polyëders durch jene Bestimmungsstücke auszudrücken, auch die Bedingungen zwischen den Bestimmungsstücken in den sieben besondern Fällen anzugeben: wenn die Ecken des Polyëders in einer und derselben Kugelfläche liegen, wenn eine und dieselbe Kugelfläche alle Seiten-Ebenen zugleich berührt, wenn eine und dieselbe Kugelfläche alle Kanten zugleich berührt, und wenn je zwei von diesen drei Umständen, oder alle drei zugleich Statt finden.

Druckfehler im 2ten Hefte dieses Bandes.

Pag. 193. lin. 25. loco $g^2 x = gx$ leg. $g^2 x = x$.
— 195. — 10. l. imaginaria leg. imaginarie
— — — — l. evadit leg. evadat
— — — 16. l. $g^r x = \sqrt[n]{\left(a.\frac{1-b^r}{1-b}+b^r x\right)}$ l. $g^r x = \sqrt[n]{\left(a.\frac{1-b^r}{1-b}+b^r x^n\right)}$
— — — 18. l. $g^{r+1} x = g^r x =$ etc. leg. $g^{r+1} x = g^r g x =$ etc.
— — — 24. l. $\int_0^c dx \sqrt[n]{[}(a+bx^n)$ etc. leg. $\int_0^c dx \sqrt[n]{[}(a+bx^n)$ etc.
— — — 31. l. $c^n(1-b^r)+b^r x$ leg. $c^n(1-b^r)+b^r x^n$
— 196. — 19. l. $= \frac{1}{3}$ leg. $= \frac{2}{3}$
— — — 26. l. ibidem leg. itidem
— 197. — 4. l. suppeditat leg. suppeditet.

30.

Note zur Theorie der Convergenz und Divergenz der Reihen.

(Von dem Herrn Prof. *J. L. Raabe* zu Zürich.)

Im 10. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik, redigirt von Ettingshausen und Baumgärtner, habe ich folgenden Lehrsatz bewiesen.

„Wenn u_n das allgemeine Glied einer Reihe vorstellt, und die Grenze „des Ausdruckes $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$ beim unendlich grofs werden von n gleich „k ist, so convergirt oder divergirt die in Rede stehende Reihe, je nach„dem k gröfser oder kleiner als die Einheit ist."

Dieses Theorem kann man mit Erfolg anwenden, um zwei Reihen, von denen das allgemeine Glied der Einen eine Function des der Andern ist, rücksichtlich ihrer Convergenz oder Divergenz zu vergleichen.

In der That sei u_n das allgemeine Glied der einen Reihe, und $f(u_n)$ stelle das allgemeine Glied der andern Reihe dar, wo $f(u_n)$ irgend eine willkürliche Function von u_n ist, die beim unendlich klein werden von u_n nicht unendlich grofs wird.

Setzt man nun

$$1. \quad k' = \text{lim.}\, n\left(\frac{f(u_n)}{f(u_{n+1})}-1\right),$$

wo sich die Grenze lim. auf das unendlich grofs werden von n bezieht, so convergirt oder divergirt die Reihe, deren allgemeines Glied $f(u_n)$ ist, je nachdem $k' >$ oder $<$ als die Einheit ist.

Aus der Gleichung

$$k = \text{lim.}\, n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$$

findet man:

$$\text{lim.}\, f(u_n) = \text{lim.}\left[f\left(u_{n+1}+\frac{u_{n+1}}{n}k\right)\right];$$

daher geht die Gleichung (1.) über in

$$2. \quad k' = \text{lim.}\, n\left\{\frac{f\left(u_{n+1}+\frac{u_{n+1}}{n}k\right)}{f(u_{n+1})}\right\}.$$

Entwickelt man nun $f\left(u_{n+1}+\frac{u_{n+1}}{n}.k\right)$ nach der Taylorschen Reihe, so hat man, wenn die vorausgesetzte Eigenschaft der Function $f(u_n)$ berücksichtigt wird,

$$k' = k \lim. \left(\frac{f'(u_{n+1})}{f(u_{n+1})}.u_{n+1}\right),$$

wo der Kürze wegen $f'(u_{n+1})$ statt $\frac{d.f(u_{n+1})}{d\,u_{n+1}}$ gesetzt wurde.

Setzt man nun

$$\frac{f'(u_{n+1})}{f(u_{n+1})}\,u_{n+1} = F(u_{n+1}),$$

so hat man

$$k' = k \lim. F(u_{n+1}).$$

Diese Gleichung zeigt die allgemeine Abhängigkeit der Gröfsen k' und k von einander.

In dem besondern Falle, wenn

$$\lim. F(u_{n+1}) = 1,$$

ist

$$k' = k,$$

und dann sind, je nachdem $k >$ und < 1 ist, die beiden Reihen gleichzeitig convergirend und divergirend.

Sei z. B.

$$f(u_{n+1}) = \frac{u_{n+1}^{\alpha}}{(1-u_{n+1})^{\beta}},$$

so hat man

$$\lim. F(u_{n+1}) = \alpha,$$

daher

$$k' = k\alpha.$$

Ist nun, um einen besondern Fall vor Augen zu haben,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

so sind die beiden Reihen:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots.+\frac{1}{n},$$

$$\frac{2^w}{1^{w+\alpha}}+\frac{3^w}{2^{w+\alpha}}+\frac{4^w}{3^{w+\alpha}}+\ldots.+\frac{n^w}{(n-1)^{w+\alpha}},$$

wo $w = \beta-\alpha$ ist.

Da hier $k = 1$ ist, so ist $k' = \alpha$, daher wird die zweite Reihe convergiren oder divergiren, je nachdem $\alpha >$ oder < 1 ist.

Zürich, den 21. August 1833.

31.

Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung.

(Schlufs des Aufsatzes No. 1. im ersten, No. 10. im zweiten, No. 18. im dritten, No. 30. im vierten Hefte X. Bandes, No. 4. im ersten, No. 12. im zweiten und No. 27. im dritten Hefte dieses Bandes.)

(Von dem Herrn Dr. *Stern*, zu Göttingen.)

Sechstes Capitel.

Fernere Anwendung der Kettenbrüche auf die Theorie der Gleichungen.

104.

Es sei die allgemeine Gleichung des zweiten Grades *)

$$1.\quad \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$$

gegeben, so hat man

$$2.\quad (\alpha x + \beta) x = \gamma \text{ und}$$

$$3.\quad x = \frac{\gamma}{\beta + \alpha x} = \frac{\gamma}{\beta + \frac{\alpha.\gamma}{\beta + \alpha x}} = F(\gamma : \beta + \alpha\gamma : \beta + \alpha\gamma : \beta + \alpha\gamma : \beta \text{ etc.}),$$

so dafs also die eine Wurzel der quadratischen Gleichung durch einen unendlichen periodischen Kettenbruch ausgedrückt ist. Auf ähnliche Weise findet man den Werth der zweiten Wurzel. Denn aus Gleichung (2.) folgt

$$\alpha x = -\beta + \frac{\gamma}{x},$$

oder

$$4.\quad x = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha x} = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{-\beta + \frac{\gamma}{x}} = -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{-\beta + \frac{\gamma}{-\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha x}}},$$

und nach gehöriger Reduction findet man hieraus

$$5.\quad x = -F\left(\frac{\beta}{\alpha} + \gamma : \beta + \alpha\gamma : \beta + \alpha\gamma : \beta \text{ etc.}\right).$$

Diesen Werth hätte man auch unmittelbar aus (3.) ableiten können, da die Summe beider Wurzeln $-\frac{\beta}{\alpha}$ sein mufs.

Sind die Wurzeln der Gleichung (1.) reell, so kann man daher durch die Formeln (3.) und (4.) Näherungswerthe derselben finden, und und zwar erhält man nach §. 5., wenn man m Theilnenner zur Berechnung anwendet, und $\alpha\gamma = \delta$ setzt, aus (3.) die Formel

*) Euler *Introd. in anal. inf. cp.* 18.

$$6.\quad x = \frac{\gamma\left[\beta^{m-1} + (m-2)\beta^{m-3}.\delta + \frac{(m-3)(m-4}{1.2}\beta^{m-5}.\delta^2 + \text{etc.}\right]}{\beta^m + (m-1)\beta^{m-2}.\delta + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\beta^{m-4}.\delta^2 \text{ etc.}},$$

und aus (5.) die Formel

$$7.\quad x = -\frac{\frac{1}{\alpha}\left[\beta^m + (m-1)\beta^{m-2}.\delta + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\beta^{m-4}.\delta^2 + \text{etc.}\right]}{\beta^{m-1} + (m-2)\beta^{m-3}.\delta + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}\beta^{m-5}.\delta^2 + \text{etc.}}.$$

Nur in dem Falle, wenn $\beta = 0$ ist, sind diese Formeln zur Berechnung untauglich.

So wie die Wurzel jeder quadratischen Gleichung durch einen periodischen Kettenbruch ausgedrückt werden kann, so ist auch umgekehrt jeder unendliche periodische Kettenbruch die Wurzel einer quadratischen Gleichung. Fängt die Periode schon beim zweiten Theilbruch an, so dafs z. B. der Kettenbruch

$$= F(a + b_1 : a_1 + b_2 : a_2 + \ldots . b_m : a_m + b_1 : a_1 + \ldots . b_m : a_m \text{ in inf.})$$

ist, so hat man

$$8.\quad x = a + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_m}{a_m + x - a}}} = \frac{(a_m + x - a).a,\ a_{m-1} + b^m.a,\ a_{m-2}}{(a_m + x - a).a_1,\ a_{m-1} + b^m.a_1,\ a_{m-2}} \text{ (§. 7.),}$$

welcher Ausdruck auf eine quadratische Gleichung zurückführt, deren Wurzel x ist. Sind mehrere der ersten Theilbrüche nicht in der Periode enthalten, so dafs man z. B. den Kettenbruch

$$x = F(c + d_1 : c_1 + d_2 : c_2 + \ldots . d_m : c_m + b_1 : a_1 + \ldots . b_m : a_m \text{ etc.}$$

hat, wo sich die Theilbrüche $\frac{b_1}{a_1}, \ldots . \frac{b_m}{a_m}$ periodisch wiederholen, so kann man statt x den Werth $x = c + \cfrac{d_1}{c_1 + \ddots + \cfrac{d_m}{y}}$ einführen, wo

$$y = F(c_m + b_1 : a_1 + \ldots . + b_m : a_m + b_1 : a_1 + \ldots . + b_m : a_m \text{ etc.})$$

ist; nun ist, wie eben bewiesen wurde, y die Wurzel einer quadratischen Gleichung, folglich auch x eine solche.

105.

Auch die Wurzeln einer Gleichung des dritten Grades können auf ähnliche Weise entwickelt werden. Da eine solche Gleichung immer auf die Form

$$9.\quad x^3 - ax - b = 0$$

zurückgeführt werden kann, so hat man

$$(x^2 - a)x = b \text{ oder } x^2 = a + \frac{b}{x},$$

also

$$10.\quad x = \sqrt{\left(a + \frac{b}{\sqrt{\left(a + \frac{b}{\sqrt{\left(a + \text{etc.}\right)}}\right)}}\right)},$$

wo sich jedes Wurzelzeichen auf den ganzen folgenden Ausdruck bezieht. Da jede Gleichung des 4ten Grades auf eine andere des 3ten Grades zurückgeführt werden kann, so können auch die Gleichungen des 4ten Grades auf dieselbe Weise aufgelöst werden.

Eben so erhält man aus der Gleichung

$$11.\quad x^{m+1} - ax - b = 0,$$

$$x^m - a = \frac{b}{x},$$

und

$$12.\quad x = \sqrt[m]{\left(a + \frac{b}{\sqrt[m]{\left(a + \frac{b}{\sqrt[m]{\left(a + \text{etc.}\right)}}\right)}}\right)},$$

und die Gleichung

$$13.\quad (x^m - a)^n (cx + d) = bx$$

giebt

$$x^m - a = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{c + \frac{d}{x}}\right)},$$

und

$$14.\quad x = \sqrt[m]{\left(a + \sqrt[n]{\left(\frac{b}{c + \frac{d}{\sqrt[m]{\left(a + \sqrt[n]{\left(\frac{b}{c + \frac{d}{\sqrt[m]{a + \text{etc.}}}}\right)}\right)}}}\right)}\right)}.$$

Die Ausdrücke (10.), (12.), (14.), sind jedoch keine Kettenbrüche in dem Sinne, in welchem dieses Wort bisher genommen wurde, da die einzelnen Theilbrüche nicht von einander unabhängig, sondern durch gewisse Operationen mit einander verbunden sind. Daher übergehe ich eine genauere Erörterung derselben, wiewohl sie eine solche, namentlich in Beziehung auf Convergenz und Divergenz, wohl verdienten.

106.

Statt der Formeln (3.) und (5.) könnte man noch eine Menge anderer entwickeln, die den Werth der Wurzeln der Gleichung (1.) angäben. Denn substituirt man statt x den Werth $y+\varepsilon$, so geht die Gleichung (1.) in folgende über:

15. $\alpha y^2+(2\alpha\varepsilon+\beta)y+\varepsilon^2+\beta\varepsilon-\gamma=0;$

setzt man $\frac{2\alpha\varepsilon+\beta}{\alpha}=p$, $\frac{\varepsilon^2+\beta\varepsilon-\gamma}{\alpha}=-q$, so findet man

16. $$y=\frac{q}{p+\frac{q}{p}},$$

oder

17. $$y=-(p+\frac{q}{p+\frac{q}{p\,\text{etc.})}},$$

also

18. $x=\varepsilon+\frac{q}{p+\frac{q}{p\,\text{etc.}}}$ oder 19. $x=\varepsilon-p-\frac{q}{p+\frac{q}{p\,\text{etc.}}}.$

107.

Am wichtigsten ist die Entwickelung der Wurzel einer quadratischen Gleichung unter der Form eines Kettenbruchs, dessen Theilzähler alle $=1$ und dessen Theilnenner ganze positive Zahlen sind. Um diesen Ausdruck zu finden, könnte man die in §. 87. gezeigte Methode anwenden, oder auch zuerst die Gleichung

$$\alpha x^2+\beta x-\gamma=0\ ^*)$$

auflösen, und dann den Werth der Wurzeln $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}}{2\alpha}$ in einen solchen Kettenbruch verwandeln (§. 86.). Die Operation schreitet aber viel leichter fort, wenn man folgende Methode anwendet **).

---

*) Es wird hier immer vorausgesetzt, dafs α, β, γ ganze Zahlen, und die Wurzeln der Gleichung reell sind.

**) Legendre *theor. d. nombr. art.* 59.

Man sei in der Entwickelung bis an den Theilnenner α_m gekommen, so dafs man als Werth der einen Wurzel

$$x = \frac{-\beta+\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}}{2\alpha} = {}^*)\, F(a+1 : a_1+1 : a_2+\ldots.+1 : a_{m-1}+1 : a_m+1 : z)$$

gefunden hat. Die Wurzel wird hier immer positiv gedacht; wäre sie negativ, so könnte man $-z$ statt x setzen, und den Werth von z betrachten. Es ist also

$$19.\quad \frac{-\beta+\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}}{2\alpha} = \frac{z.a,\ a_m+a,\ a_{m-1}}{z.a_1,\ a_m+a_1,\ a_{m-1}} \text{ (§. 7.)},$$

und

$$20.\quad z = \frac{-\beta.a_1,\ a_{m-1}-2\alpha.a,\ a_{m-1}+a_1,\ a_{m-1}\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}}{\beta.a_1,\ a_m+2\alpha.a,\ a_m-a_1,\ a_m\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit

$$\beta.a_1,\ a_m+2\alpha.a,\ a_m+a_1,\ a_m\sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}$$

multiplicirt, und zugleich bedenkt, dafs $a,\ a_m.a_1,\ a_{m-1}-a,\ a_{m-1}.a_1,\ a_m = \pm 1$ ist (§. 15.), so findet man

$$21.\quad z = \frac{\sqrt{A}+I}{D},$$

wo

$$22.\quad A = \tfrac{1}{4}(4\alpha\gamma+\beta^2),$$

$$23.\quad \pm I = -\tfrac{1}{2}\beta(a, a_m.a_1, a_{m-1}+a_1, a_m.a, a_{m-1}) - \alpha.a, a_m.a, a_{m-1}+\gamma\ a_1, a_m.a_1, a_{m-1},$$

$$24.\quad \pm D = \alpha.(a, a_m)^2+\beta.a, a_m.a_1, a_m-\gamma.(a_1, a_m)^2$$

ist. D ist also immer eine ganze Zahl. Da ferner

$$a,\ a_m.a_1,\ a_{m-1} = a,\ a_{m-1}.a_1,\ a_m \pm 1$$

ist, so mufs eine der Zahlen $a,\ a_m.a_1,\ a_{m-1}$ und $a,\ a_{m-1}.a_1,\ a_m$ gerade, die andere ungerade, also ihre Summe eine ungerade Zahl sein: folglich ist I eine ganze Zahl, wenn β gerade ist; im entgegengesetzten Fall enthält es den Nenner 2. Setzt man $z = a_{m+1}+\frac{1}{z_1}$, so kann man wieder auf ähnliche Weise

$$25.\quad z' = \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

und eben so, wenn man $z_{,} = a_{m+2}+\frac{1}{z_{,,}}$ setzt,

$$26.\quad z_{,,} = \frac{\sqrt{A}+I''}{D''}$$

finden. Die Werthe von $I_{,}$, $D_{,}$ und von $I_{,,}$, $D_{,,}$ kann man unmittelbar

---

*) Es wird im Folgenden immer vorausgesetzt, dafs x gröfser als 1 ist; im entgegengesetzten Falle könnte man $\frac{1}{x}$ statt x betrachten.

aus den Werthen von I, D ableiten, indem man überall statt m bezüglich $m+1$, $m+2$ substituirt; nur mufs man nicht vergessen, jedem folgenden Gliede in der Reihe $I, I_{,}, I_{,,}, \ldots$ und eben so in der Reihe $D, D_{,}, D_{,,}, \ldots$ das entgegengesetzte Zeichen des vorhergehenden zu geben, da z. B.

$$a, a_{m+1}.a_1, a_m - a, a_m.a_1, a_{m+1} = \mp 1$$

ist, wenn $a, a_m.a_1, a_{m-1} - a_1, a_m.a, a_{m-1} = \pm 1$ ist. Aus (21.) und (25.) folgt

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D} = a_{m+1} + \frac{D_{,}}{\sqrt{A}+I_{,}},$$

oder

$$A + \sqrt{A}.I + \sqrt{A}.I_{,} + II_{,} = a_{m+1}.D.\sqrt{A} + a_{m+1}.D.I_{,} + DD_{,}.$$

Hieraus erhält man die zwei Gleichungen

$$27. \quad I_{,} = a_{m+1}.D - I,$$

$$28. \quad A = (a_{m+1}.D - I)I_{,} + DD_{,},$$

und wenn man den Werth von $I_{,}$ aus (27.) in (28.) substituirt,

$$29. \quad A = I_{,}^2 + DD_{,},$$

oder

$$30. \quad D_{,} = \frac{A - I_{,}^2}{D}.$$

Man setze daher im Anfange der Entwickelung $\frac{-\beta}{2} = I$, $a = D$, und die gröfste in $\sqrt{A}$ enthaltene Zahl $= N$; alsdann ist der erste Theilnenner a die gröfste in $\frac{N+I}{D}$ enthaltene Zahl; dann ist $I_{,} = aD - I$, $D_{,} = \frac{A - I_{,}^2}{D}$; aus N, $D_{,}$, $I_{,}$ findet man wieder den zweiten Theilnenner a_1, und so kann man den ganzen Kettenbruch entwickeln. Die folgenden Nenner $D_{,,}$, $D_{,,,}$ u. s. w. können auch auf folgende Weise gefunden werden. Aus (27.) und (29.) folgt

$$31. \quad I_{,,} = a_{m+2}.D_{,} - I_{,},$$

$$32. \quad A = I_{,,}^2 + D_{,}D_{,,},$$

also

$$I_{,}^2 + DD_{,} = I_{,,}^2 + D_{,}D_{,,}$$

oder

$$D_{,,} = \frac{I_{,}^2 - I_{,,}^2}{D_1} + D;$$

nun ist

$$I_{,} + I_{,,} = a_{m+2}.D_{,} \text{ (31.)},$$

folglich

$$33. \quad D_{,,} = (I_{,} - I_{,,})a_{m+2} + D.$$

Im Anfange der Entwickelung kann es vorkommen, dafs die Nenner $D, D_{,}, \ldots$ abwechselnd positiv und negativ sind. Sind nemlich die Wurzeln der Gleichung noch nicht getrennt, so dafs beide zwischen $\frac{a,\ a^m}{a_1,\ a_m}$ und $\frac{a,\ a_{m+1}}{a_1,\ a_{m+1}}$

liegen (§. 87.), und substituirt man diese Werthe nach einander statt x in der gegebenen Gleichung, so erhält man die Werthe

$$A.\quad \alpha(a, a_m)^2 + \beta . a, a_m . a_1, a_m - \gamma(a_1, a_m)^2 \ldots,$$
$$B.\quad \alpha(a, a_{m+1})^2 + \beta . a, a_{m+1} . a_1, a_{m+1} - \gamma(a_1, a_{m+1})^2 \ldots,$$

die nothwendig dasselbe Zeichen haben müssen, da zwischen $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ und $\frac{a, a_{m+1}}{a_1, a_{m+1}}$ zwei Werthe liegen müssen, die, statt x substituirt, den ersten Theil der Gleichung auf Null reduciren. Nun ist

$$D = \pm(A),\ D_1 = \mp(B);$$

also haben D und D_1 in diesem Falle verschiedene Zeichen. Geht man aber in der Entwickelung weiter fort, so werden die Wurzeln getrennt, und man kommt bald an zwei Näherungswerthe $F(a, a_m)$, $F(a, a_{m+1})$, die nur Eine Wurzel zwischen sich enthalten, so dafs alsdann $(A.)$ und $(B.)$ verschiedene, und daher D und $D_,$ gleiche Zeichen haben. Ist man so weit gekommen, so ist $DD_,$ eine positive Zahl, und daher der Werth von $I_,$ innerhalb bestimmter Grenzen eingeschlossen, indem $I_,^2 = A - DD_,$, also

$$34.\quad I_, < \sqrt{A}$$

ist, und da $a_{m+2} D_, = I_, + I_{,,}$, so folgt

$$35.\quad D_, < 2\sqrt{A},$$

so dafs auch die Nenner $D_,, D_{,,} \ldots.$ zwischen bestimmten Grenzen eingeschlossen sind. Da aber der Kettenbruch ins Unendliche fortläuft, $D_,$ und $2I$ aber ganze Zahlen sind, so müssen auch dieselben zusammengehörenden Werthe von $D_,$ und $I_,$ sich unendlich oft wiederholen. Hieraus folgt, dafs nach einer gewissen Anzahl von Theilnennern (die auch Null sein kann) der Kettenbruch periodisch wird, d. h. dafs von dort an dieselbe Reihe von Theilnennern sich ins Unendliche wiederholt. Übrigens folgt aus den Formeln (34.) und (35.), dafs die Anzahl der in jeder Periode enthaltenen Theilnenner kleiner als $\sqrt{A} . 2\sqrt{A} = 2A$ sein mufs.

108.

Es folgt hieraus, dafs die eine Wurzel der quadratischen Gleichung $x = \frac{-\beta + \sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}{2\alpha}$ in einen periodischen Kettenbruch, dessen Theilzähler alle $= 1$ sind, entwickelt werden kann. Was nun die andere Wurzel betrifft, so wird der ihr entsprechende Kettenbruch unmittelbar durch folgendes Theorem gefunden. Wird der Werth von $x = \frac{-\beta + \sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}{2\alpha}$ durch den Kettenbruch

$$x = b + \cfrac{1}{b_1 + \ddots + \cfrac{1}{b_m + \cfrac{1}{F(a+1:a_1+\ldots+1:a_m+1:a+1:a_1+\ldots+1:a_m \text{ etc.})}}}$$

ausgedrückt, so dafs die Theilnenner $b, b_1, \ldots . b_m$ nicht in der Periode vorkommen, dagegen die Theilnenner $a, a_1, \ldots . a_m$ sich periodisch wiederholen, so ist

$$\frac{-\beta - \sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}}{2a} = b + \cfrac{1}{b_1 + \ddots + \cfrac{1}{b_m - F(a_m+1:a_{m-1}+\ldots+1:a+1:a_m+1:a_{m-1}\ldots+1:a \text{ etc.})}},$$

so dafs die nicht periodischen Theilnenner wieder dieselben sind, und in derselben Ordnung vorkommen, die periodischen dagegen ebenfalls dieselben sind, aber in umgekehrter Ordnung erscheinen. Man betrachte zuerst den Fall, wenn nur ein nicht periodischer Theilnenner b_m vorhanden ist. Alsdann ist

$$\frac{-\beta + \sqrt{(4\alpha\gamma+\beta^2)}}{2\alpha} = x = F(b_m + 1 : a + 1 : a_1 + \ldots . + 1 : a_m \text{ etc.}),$$

oder

$$x = b_m + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_m + x - b_m}}}$$

(Form. 8.) $= b_m + \dfrac{(a_m + x - b_m)a_1, a_{m-1} + a_2, a_{m-1}}{(a_m + x - b_m)a, a_{m-1} + a_1, a_{m-1}}$

oder

$$x = b_m + \frac{(x-b_m)a_1, a_{m-1} + a_1, a_m}{(x-b_m)a, a_{m-1} + a, a_m}.$$

Hieraus folgt

$$36. \quad x = b_m - \frac{[(b_m - x)a, a_m + a_1, a_m]}{(b_m - x)a, a_{m-1} + a_1, a_{m-1}}.$$

Setzt man nun

$$x_1 = b_m - F(a_m + 1 : a_{m-1} + \ldots . + 1 : a + 1 : a_m + \ldots . + 1 : a \text{ etc.}),$$

so ist

$$x_1 = b_m - \left(a_m + \cfrac{1}{a_{m-1} + \ddots + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b_m - x_1}}}\right),$$

oder

$$37.\quad x_1 = b_m - \frac{[(b_m - x_1)a_m, a + a_m, a_1]}{(b_m - x_1)a_{m-1}, a + a_{m-1}, a_1}.$$

Da nun

$$a_m, a = a, a_m;\ a_m, a_1 = a_1, a_m;\ a, a_{m-1} = a_{m-1}, a;\ a_1, a_{m-1} = a_{m-1}, a$$

ist, so sind die Ausdrücke (36.) und (37.) durchaus identisch, wenn man x mit x_1 vertauscht; daher mufs x_1 die andere Wurzel derselben Gleichung sein, deren eine Wurzel x ist, oder es ist $x_1 = \frac{-\beta - \sqrt{(4\alpha\gamma + \beta^2)}}{2\alpha}$.

Ist nun die Wurzel einer quadratischen Gleichung

$$= y = F(b + 1 : b_1 + \ldots + 1 : b_m + 1 : a + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_m \text{ etc.}),$$

so dafs $b, b_1 \ldots b_m$ die nicht periodischen Theilnenner sind, und führt man statt y eine andere unbekannte Gröfse ein, so dafs

$$y = b + \cfrac{1}{b_1 + \ddots + \cfrac{1}{b_{m-1} + \cfrac{1}{x}}},$$

und $x = F(b_m + 1 : a + \ldots + 1 : a_m \text{ etc.})$ ist, so erhält man eine andere quadratische Gleichung, deren eine Wurzel x, und deren andere daher $x_1 = b_m - F(a_m + 1 : a_{m-1} + \ldots + 1 : a + 1 : a_m \ldots + 1 : a \text{ etc.})$ ist; folglich ist die Wurzel der ursprünglichen Gleichung

$$y_1 = F(b + 1 : b_1 + \ldots + 1 : b_{m-1} + 1 : x_1)\ ^*).$$

Entwickelt man die Gleichung (36.), so findet man

$$38.\quad a, a_{m-1} \cdot x^2 + (a, a_m - 2b \cdot a, a_{m-1} - a_1, a_{m-1})x + b_m(b_m \cdot a, a_{m-1} + a_1, a_{m-1}) - b_m \cdot a, a_m - a_1, a_m,$$

folglich

$$\frac{b_m(b_m \cdot a, a_{m-1} + a_1, a_{m-1})}{a, a_{m-1}} - b_m \cdot \frac{a, a_m}{a, a_{m-1}} - \frac{a_1, a_m}{a, a_{m-1}} = x \cdot x_1,$$

oder, da

$$\frac{b_m \cdot a, a_{m-1} + a_1, a_{m-1}}{a, a_{m-1}} = F(b_m + 1 : a + \ldots + 1 : a_{m-1});\ \frac{a, a_m}{a, a_{m-1}} = \frac{a_m, a}{a_{m-1}, a} = F(a_m, a);$$

$$\frac{a_1, a_m}{a, a_{m-1}} = \frac{a_1, a_m}{a, a_m} \cdot a, a_m : \frac{a, a_{m-1}}{a, a_m} \cdot a, a_m = \frac{1}{F(a, a_m)} : \frac{1}{F(a_m, a)} = \frac{F(a_m, a)}{F(a, a_m)},$$

so ist

$$b_m[F(b_m + 1 : a + \ldots + 1 : a_{m-1}) - F(a_m, a)] - \frac{F(a_m, a)}{F(a, a_m)} = x \cdot x_1.$$

In dem besonderen Falle, wenn $b_m = 0$ ist, hat man, wenn man, statt x, x_1, ihre Werthe substituirt,

---

*) Man vergl. *Théor. des nombr.* §. X., Journ. für die Mathem. Bd. 6. S. 232 ff.

39. $$\frac{F(a_m, a)}{F(a, a_m)} = \frac{F(a_m+1 : a_{m-1}+\ldots.+1 : a+1 : a_m+1 : a_{m-1}+\ldots.+1 : a \text{ etc.})}{F(a+1 : a_1 \ +\ldots.+1 : a_m+1 : a+1 : a_1 \ +\ldots.+1\, a_m \text{ etc.})}.$$

Die Wahrheit dieses Ausdrucks läfst sich auch erweisen, ohne dafs man nöthig hat, auf die Theorie der Gleichungen zurückzugehen. Schreibt man nemlich statt $F(a+1 : a_1+\ldots.+1 : a_m+1 : a+1 : a_1+\ldots.+1 : a_m \text{ etc.})$ den Ausdruck $F(a+1 : a_1+\ldots.+1 : a_m+1 : a_{m+1}+1 : a_{m+2}+\ldots.+1 : a_{2m+1} \text{ etc.})$, so dafs $a = a_{m+1}$, $a_1 = a_{m+2}$, ... $a_m = a_{2m+1}$, ..., so hat man

40. $$F(a+1 : a_1+\ldots.+1 : a_m+1 : a_{m+1} \text{ etc.})$$
$$= \frac{1}{a_1, a_m}\left(a, a_m \pm \frac{a_1, a_m}{a_1, a_{2m+1} \pm \frac{(a_1, a_m)^2}{a_1, a_{2m+1}} \text{ etc.}}\right) \text{ (§. 24.).}$$

Schreibt man nun eben so statt

$$F(a_m+1 : a_{m-1}+\ldots.+1 : a+1 : a_m+1 : a_{m-1}+ \text{ etc.}$$

den Ausdruck

$$F(c+1 : c_1+\ldots.+1 : c_m+1 : c_{m+1}+1 : c_{m+2}+\ldots.+c_{2m+1} \text{ etc.}),$$

so dafs

$$c = a_m,\ c_1 = a_{m-1},\ c_m = a,\ c_{m+1} = a_m,\ c_{m+2} = a_{m-1} = c_1,\ c_{2m+1} = a = c_m,$$

so hat man:

41. $$F(a_m+1 : a_{m-1}+\ldots.+1 : a+1 : a_m \text{ etc.})$$
$$= \frac{1}{c_1, c_m}\left(c, c_m \pm \frac{c_1, c_m}{c_1, c_{2m+1} \pm \frac{c_1, c_m)^2}{c_1, c_{2m+1}} \text{ etc.}}\right);$$

nun ist $$c_1,\ c_m = a_{m-1},\ a = a, a_{m-1};\ c, c_m = a_m,\ a = a, a_m,$$

ferner

$$c_1, c_{2m+1} = c_1, c_m \cdot c_{m+1}, c_{2m+1} + c_1, c_{m-1} \cdot c_{m+2}, c_{2m+1} \text{ (§. 7. Form. } D)$$
$$= c_1, c_m(c_{m+1}, c_{2m+1} + c_1, c_{m-1}) = c_1, c_m, (a_m, a+a_{m-1}, a_1) = c_1, c_m(a, a_m+a_1, a_{m-1}).$$

Daher geht die Formel (41.) in folgende über:

42. $$F(a_m+1 : a_{m-1}+\ldots.) = \frac{1}{a, a_{m-1}}\left(a, a_m \pm \frac{1}{a, a_m+a_1, a_{m-1} \pm \frac{1}{a, a_m+a_1, a_{m-1}} \text{ etc.}}\right).$$

Auch ist

$$a_1, a_{2m+1} = a_1, a_m \cdot a_{m+1}, a_{2m+1} + a_1, a_{m-1} \cdot a_{m+2}, a_{2m+1} = a_1, a_m(a, a_m+a_1, a_{m-1}).$$

Daher geht die Formel (40.) in folgende über:

43. $$F(a+1 : a_1+\ldots.+1 : a_m \text{ etc.})$$
$$= \frac{1}{a_1, a_m}\left(a, a_m \pm \frac{1}{a, a_m+a_1, a_{m-1} \pm \frac{1}{a, a_m+a_1, a_{m-1}} \text{ etc.}}\right).$$

Dividirt man (42.) durch (43.), so kommt man wieder auf (39.) zurück.

Diese letztere Darstellung zeigt zugleich, dafs der Ausdruck (38.)

auch richtig ist, wenn die Theilzähler nicht alle $=1$, sondern vielmehr $=b_1$ sind.

109.

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, wenn die Gleichung (1.) eine reine quadratische, also $\beta=0$ ist. Alsdann sind die zwei Wurzeln nur im Vorzeichen verschieden: die eine ist $+\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$, die andere $-\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$. Ist also die gröfste in $\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$ enthaltene Zahl $=b$, so dafs $\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}=b+\frac{1}{k}$ ist, so ist $-\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}=-\left(b+\frac{1}{k}\right)$. Es kann aber nur der eine Theilnenner b nicht in der Periode enthalten sein; denn da der nicht periodische Theil des Kettenbruches beiden Wurzeln gemein ist, so würden beide Wurzeln, wenn mehr als ein nicht periodischer Theilnenner vorhanden wären, mit demselben positiven Theilnenner b beginnen. Von der anderen Seite mufs ein nicht periodischer Theilnenner nothwendig vorhanden sein, weil der von Anfang an periodische Kettenbruch

$$F(a+1:a_1+\ldots.+1:a_m+1:a+1:a_1+\ldots.+1:a_m \text{ etc.})$$

die Wurzel einer unreinen quadratischen Gleichung ist, wie man aus Formel (38.) findet, wenn man $b_m=0$ setzt. Es ist also die eine Wurzel

$$44.\quad \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}=F(b+1:a+\ldots.+1:a_m+1:a+\ldots.+1:a_m \text{ etc.}),$$

und daher die andere

$$45.\quad -\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}=F((b-a_m)-1:a_{m-1}+1:a_{m-2}+\ldots.+1:a+1:a_m+\ldots.+1:a \text{ etc.}).$$

Hieraus folgt $b-a_m=-b$, oder $a_m=2b$; ferner

$$a=a_{m-1},\quad a_1=a_{m-2},\quad a_2=a_{m-3} \text{ etc. (vergl. §. 14.);}$$

d. h. entwickelt man den Werth der Quadratwurzel einer ganzen oder gebrochenen (nicht quadratischen) Zahl unter der Form eines Kettenbruchs, dessen Theilzähler alle $=1$ sind, so ist der erste Theilnenner nicht in der Periode enthalten: diese fängt vielmehr bei dem zweiten Theilnenner an; und enthält sie $m+1$ Theilnenner $a, a_1 \ldots. a_m$, so ist der letzte $a_m=2b$, die übrigen sind paarweis einander gleich, und zwar so, dafs diejenigen, deren Indices zusammengenommen $=m-1$ sind, gleich sind; ist m eine ungerade Zahl, so hat die Periode einen mittleren Theilnenner, dem kein anderer entspricht (wiewohl er einem der übrigen gleich sein kann).

Es ist leicht einzusehen, dafs umgekehrt jeder Kettenbruch, der die zuletzt betrachtete Form hat, also

$x = F(b+1 : a+1 : a_1+....+1 : a_1+1 : a+1 : 2b+1 : a+1 : a_1+....+1 : a_1+1 : a+1 : 2b$ etc.) ist, die Quadrat-Wurzel einer ganzen oder gebrochenen Zahl ausdrückt, weil er die Wurzel einer quadratischen Gleichung darstellt, deren andere Wurzel $= -x$ ist. Ob aber x^2 eine ganze oder gebrochene Zahl ist, läfst sich leicht entscheiden. Der Kettenbruch (44.) führt nemlich auf die Gleichung

$$a, a_{m-1} . x^2 = b_1 (a, a_m - a_1, a_{m-1}) b^2 . a, a_{m-1} + a_1, a_m \quad \text{(Form. 38.);}$$

nun ist

$$a, a_m = a_m . a, a_{m-1} + a, a_{m-2} \text{ und } a_m = 2b\,;\ a, a_{m-2} = a_1, a_{m-1},$$

folglich

$$a, a_{m-1} . x^2 = b^2 . a, a_{m-1} + a_1, a_m,$$

und

$$46. \quad x^2 = b^2 + \frac{a_1, a_m}{a, a_{m-1}},$$

also ist x^2 eine ganze oder gebrochene Zahl, je nachdem $\frac{a_1, a_m}{a, a_{m-1}}$ das Eine oder das Andere ist.

110.

In dem besondern Falle, der hier betrachtet wird, gehen die Formeln (22.), (23.), und (24.) in folgende über:

$$45. \quad A = \alpha\gamma,$$

$$46. \quad \pm I = \gamma . a_1, a_m . a_1, a_{m-1} - \alpha . a, a_m . a, a_{m-1},$$

$$47. \quad \pm D = \alpha (a, a_m)^2 - \gamma . (a_1, a_m)^2.$$

Hier ist also I immer eine ganze Zahl; ferner, da das obere oder untere Zeichen genommen werden mufs, je nachdem $a, a_m . a_1, a_{m-1} - a, a_{m-1} . a_1, a_m$ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ gröfser oder kleiner als $\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$ ist, so folgt sogleich, dafs D von Anfang an immer positiv ist.

Dafs auch I von Anfang an positiv ist, läfst sich am natürlichsten aus folgendem allgemeinen Satze beweisen. Wenn irgend ein Ausdruck P in einen Kettenbruch, dessen Theilzähler alle $= 1$ sind, verwandelt wird, und es bedeuten $\frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}}$ und $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe desselben, so ist P^2 gröfser oder kleiner als $\frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} \times \frac{a, a_m}{a_1, a_m}$, je nachdem $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$ gröfser oder kleiner als $\frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}}$, d. h. je nachdem

$$a, a_m . a_1, a_{m-1} - a_1, a_m . a, a_{m-1} = +1 \text{ oder } = -1$$

ist. Denn im ersten Falle hat man $\frac{a, a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} = \frac{a, a_m}{a_1, a_m} - \frac{1}{a_1, a_m . a_1, a_{m-1}}$, also

$$\frac{a,\ a_{m-1}}{a_1,\ a_{m-1}} \times \frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m} = \left(\frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m}\right)^2 - \frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m} \cdot \frac{1}{a_1,\ a_m \cdot a_1,\ a_{m-1}};$$

setzt man nun P (welches kleiner als $\frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m}$ ist) $= \frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m} - q$, so ist $q < \frac{1}{2(a_1,\ a_{m-1} \cdot a_1,\ a_m)}$ (§. 15.), folglich

$$P^2 = \left(\frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m} - q\right)^2 = \left(\frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m}\right)^2 - \frac{2\,a,\ a_m}{a_1,\ a_m} \cdot q + q^2 > \frac{a,\ a_{m-1}}{a_1,\ a_{m-1}} \times \frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m}.$$

Im zweiten Falle liegt $\frac{1}{P}$ zwischen den Näherungswerthen $\frac{a_1,\ a_{m-1}}{a,\ a_{m-1}}$ und $\frac{a_1,\ a_m}{a,\ a_m}$, und ist kleiner als der letztere; folglich ist

$$\left(\frac{1}{P}\right)^2 > \frac{a_1,\ a_{m-1}}{a,\ a_{m-1}} \cdot \frac{a_1,\ a_m}{a,\ a_m}, \text{ oder } P^2 < \frac{a,\ a_{m-1}}{a_1, a_{m-1}} \cdot \frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m}.$$

Da nun hier $\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}$ zwischen $\frac{a,\ a_{m-1}}{a_1,\ a_{m-1}}$ und $\frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m}$ liegt, so ist auch $\frac{\gamma}{\alpha} \gtrless \frac{a,\ a_m \cdot a,\ a_{m-1}}{a_1,\ a_m \cdot a_1,\ a_{m-1}}$, je nachdem

$$a,\ a_m \cdot a_1,\ a_{m-1} - a_1,\ a_m \cdot a,\ a_{m-1} = +1$$

oder $= -1$ ist, also in jedem Falle I positiv. Auch ist $I_1^2 = A - DD_1'$ (Form. 29.), also I immer kleiner, als $\sqrt{A}$, und weil $a_{m+1} \cdot D = I + I_1$ (Form. 29.), auch D immer kleiner, als $2\sqrt{A}$.

111.

Hat man aufser $\beta = 0$ auch noch $\alpha = 1$, so dafs die Gleichung (1.) in

$$x^2 - y = 0$$

übergeht, und $x = \sqrt{\gamma} = \sqrt{A}$ ist, so sei die gröfste in $\sqrt{A}$ enthaltene ganze Zahl $= b_1$, also der letzte in der Periode enthaltene Theilnenner $= 2b$; setzt man daher in dem Ausdrucke $a_{m+1} \cdot D = I + I_1$ statt a_{m+1} den Werth $2b$, so hat man $2b = \frac{I + I_1}{D}$; nun können I, I_1 höchstens nur $= b$ sein, also mufs das entsprechende $D = 1$, und $I = b$, $I_1 = b$ sein. Die Formel (47.) giebt daher für diesen Fall $\pm 1 = (a,\ a_m)^2 - \gamma(a_1,\ a_m)^2$, wo das obere oder untere Zeichen genommen werden mufs, je nachdem $\frac{a,\ a_m}{a_1, a_m} \gtrless \sqrt{\gamma}$ ist. Da der Theilnenner $2b$ unendlich oft wiederkehrt, so mufs auch D unendlich oft $= 1$ werden, und es giebt daher unendlich viele Näherungswerthe $\frac{a,\ a_s}{a_1,\ a_s}$, die so beschaffen sind, dafs $\pm 1 = (a,\ a_s)^2 - \gamma(a_1, a_s)^2$ ist. Drückt man übrigens den Werth von $\sqrt{\gamma}$ durch

$$F(a + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_{m+1} + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_{m+1} \text{ etc.})$$

aus, wo $a=b$, $a_{m+1}=2b$ ist, und enthält die Periode $a, \ldots . a_{m+1}$ eine gerade Anzahl von Theilnennern, so nimmt $\frac{a,\ a_m}{a_1,\ a_m}$ eine gerade Stelle in der Reihe der Näherungswerthe ein, und ist daher gröfser als $\sqrt{\gamma}$, und dasselbe ist bei allen folgenden Näherungswerthen, die dem Theilnenner $2b$ vorausgehen, der Fall; alsdann mufs immer das obere Zeichen genommen werden. Ist dagegen die Anzahl der in der Periode enthaltenen Theilnenner ungerade, so nehmen die in Betrachtung kommenden Näherungswerthe abwechselnd eine ungerade oder gerade Stelle ein, und in diesem Falle mufs abwechselnd das untere oder das obere Zeichen genommen werden.

112.

Die eben vorgetragenen Lehren finden eine nicht ganz uninteressante Anwendung in der Auflösung der Gleichungen des 3ten Grades. Löst man eine solche Gleichung nach der Cardanischen Regel auf, so erhält man bekanntlich den Werth der Wurzel x unter der Form

$$x=\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}+\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}.$$

Ist nun x eine ganze Zahl, so mufs $\sqrt[3]{(a\pm\sqrt{b})}=x\pm\sqrt{y}$ sein, wo x, y rationale Zahlen bedeuten. Die Regel, welche man gewöhnlich giebt, um aus $\sqrt[3]{(a\pm\sqrt{b})}$ den gleichgeltenden Ausdruck $z\pm\sqrt{y}$ zu finden, führt, wie man weifs, wieder auf die Aufgabe zurück, eine Cubische Gleichung aufzulösen. Dagegen kann dieser Ausdruck leicht auf folgende Weise gefunden werden. Man entwickele den numerischen Werth von $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$ näherungsweise, und verwandle diesen Werth in einen Kettenbruch, der nur positive Theilnenner hat, und dessen Theilzähler alle $=1$ sind: ist dieser Ausdruck wirklich die Wurzel einer quadratischen Gleichung, so mufs der Kettenbruch periodisch sein, und man kann alsdann aus diesem Kettenbruche den Werth von $z\pm\sqrt{y}$ finden. Es sei z. B. die Gleichung $x_3^3-bx-40=0$ gegeben, so hat man $x=\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})}+\sqrt[3]{(20-\sqrt{392})}$; berechnet man den Werth von $\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})}$, so findet man dafür 3,41421 ....; verwandelt man nun diesen Ausdruck nach (86.) in einen Kettenbruch, so findet man

$$3{,}41421\ldots . = 3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+}}}}.$$

Vorausgesetzt, dafs alle folgenden Theilnenner ebenfalls $=2$ sind, hat man $\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})} = u = 3 + \frac{1}{2+u-3}$, woraus man $u = 2+\sqrt{2}$ findet, was wirklich der Werth von $\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})}$ ist, also

$$x = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4.$$

Es kann sich zuweilen ereignen, dafs ein Kettenbruch scheinbar periodisch ist, der bei fortgesetzter Berechnung sich nicht als solcher zeigen würde. Berechnet man aus dem als periodisch angenommenen Kettenbruche den Werth von $z+\sqrt{y}$, so mufs sich sogleich zeigen, ob dieser Ausdruck wirklich den Werth von $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$ angiebt. Auch könnte es sein, dafs sich der Ausdruck $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$ wirklich in einen anderen $z+\sqrt{y}$ verwandeln liefse, während der Kettenbruch anscheinend nicht periodisch ist, weil man bei Entwickelung des Werthes von $\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}$, die Annäherung nicht weit genug getrieben hat. Die hierher gehörenden Bemerkungen können indessen um so eher weggelassen werden, da der Gebrauch der Cardanischen Regel so sehr beschränkt ist.

Siebentes Capitel.

Anwendung der Kettenbrüche auf die höhere Arithmetik.

Die Theorie der Kettenbrüche steht mit manchen Theilen der höheren Arithmetik, und namentlich mit der Auflösung der unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades, in genauer Verbindung. Soll jedoch ihre Anwendung auf diesen Theil der Mathematik in ihrem ganzen Umfange behandelt werden, so kann man nicht umhin eine Menge von Lehren aus der höheren Arithmetik selbst zu erörtern. Da dies aber hier nicht geschehen kann, so soll nur dasjenige hervorgehoben werden, was aus dem Vorhergehenden unmittelbar abgeleitet werden kann.

113.

Es soll die unbestimmte Gleichung

$$1. \quad ax - by = 1$$

aufgelöst werden, wo a, b und die unbekannten x, y ganze Zahlen sind. Die Zahlen a, b müssen nothwendig Primzahlen unter sich sein, denn wäre $a = m.t$, $b = n.t$, so würde die Gleichung

$$t(mx - ny) = 1$$

widersinnig sein. Man verwandele $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch, dessen Theilzähler alle $= 1$, dessen Theilnenner ganze positive Zahlen sind; ist $\frac{a_1}{b_1}$ der dem Bruche $\frac{a}{b}$ unmittelbar vorhergehende Näherungswerth, so hat man $ab_1 - a_1.b = \pm 1$. Gilt das obere Zeichen, so hat man unmittelbar $x = b_1$, $y = a_1$, oder allgemeiner

$$x = b_1 + bz, \; y = a_1 + az,$$

wo z jede beliebige ganze Zahl bedeuten kann. Gilt aber das untere Zeichen, so setze man $x = -b_1$, $y = -a_1$, oder allgemeiner

$$x = -b_1 + bz, \; y = -a_1 + az.$$

Hieraus folgt unmittelbar de Möglichkeit, die Gleichung

$$2. \quad ax - by = c$$

aufzulösen, wo wieder a, b, c und die Unbekannten x, y ganze Zahlen bedeuten. Es wird vorausgesetzt, dafs a, b, c keinen gemeinschaftlichen Factor haben, weil man sonst die ganze Gleichung mit diesem dividiren

kann. Hiernach können auch a und b keinen gemeinschaftlichen Factor haben, weil dieser sonst nothwendig auch in c enthalten sein müfste. Man löse zuerst die Gleichung $at-bu=1$ auf; es sei $t=\pm b_1$, $u=\pm a_1$, so sind

$$x=\pm b_1 c+bz,\quad y=\pm a_1 c+az$$

die allgemeinen Werthe, die der Gleichung (2.) Genüge thun *).

114.

Wenn die Gleichung $x^2-Ay^2=D_1$, wo x, y, A, D **) ganze Zahlen sind und $D<\sqrt{A}$ ist, wirklich auflösbar ist, so mufs $\frac{x}{y}$ ein Näherungswerth von $\sqrt{A}$ sein, wenn $\sqrt{A}$ nach §. 107. in einen Kettenbruch verwandelt wird; es wird hierbei vorausgesetzt, dafs x und y keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Denn man verwandle $\frac{x}{y}$ in einen Kettenbruch, es sei dieser $=F(a+1:a_1+\ldots.+1:a_n)$, also $\frac{x}{y}=\frac{a,\,a_n}{a_1,\,a_n}$. Man setze für den Augenblick voraus, es sei $\frac{a,\,a_n}{a_1,\,a_n}$ gröfser, als der vorhergehende Näherungswerth $\frac{a,\,a_{n-1}}{a_1,\,a_{n-1}}$; nun ist $\frac{a,\,a_n^2}{a_1,\,a_n^2}=A+\frac{D}{y^2}$, also $\frac{a,\,a_n}{a_1,\,a_n}>\sqrt{A}$, und (weil $D<\sqrt{A}$) $\frac{a,\,a_n}{a_1,\,a_n}<\sqrt{A}+\frac{1}{y^2}$; ferner ist

$$\frac{a,\,a_n}{a_1,\,a_n}-\frac{a,\,a_{n-1}}{a_1,\,a_{n-1}}=\frac{1}{a_1,\,a_n\,.\,a_1,\,a_{n-1}}>\frac{1}{y^2},$$

also $\left(\text{da } \frac{a,\,a_n}{a_1,\,a_n}-\sqrt{A}<\frac{1}{y^2}\right)$ $\frac{a,\,a_{n-1}}{a_1,\,a_{n-1}}<\sqrt{A}$, d. h. es liegt $\sqrt{A}$ zwischen $\frac{a,\,a_n}{a_1,\,a_n}$ und $\frac{a,\,a_{n-1}}{a_1,\,a_{n-1}}$. Setzt man nun $I=A\,.\,a_1,\,a_m\,.\,a_1,\,a_{m-1}-a,\,a_m\,.\,a,\,a_{m-1}$, so ist I eine positive Zahl (§. 110.), und man hat

$$3.\quad \sqrt{A}=a+\cfrac{1}{a_1+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{\frac{\sqrt{A}+I}{D}}}}.$$

Wäre $\frac{a,\,a_{n-1}}{a_1,\,a_{n-1}}$ gröfser, als $\frac{a,\,a_n}{a_1,\,a_n}$, so könnte man zwischen diesen Brüchen den Bruch $F(a+1:a_1+\ldots.+1:a_n-1)=\frac{s}{t}$ einschalten; alsdann ist

*) Diese Auflösungsmethode verdankt man **Lagrange** (*Mém. de l'ac. de Berlin* 1767). Der Aufsatz von **Pezzi** in *Memorie della societa italiana* **T. 11.** enthält durchaus nichts Neues.

) Überhaupt sollen im Folgenden alle Buchstaben **ganze Zahlen bedeuten.

$\frac{s}{t} < \frac{a, a_n}{a_1, a_n}$, und $\sqrt{A}$ zwischen $\frac{s}{t}$ und $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ enthalten, so dafs man wieder alle früheren Resultate erhält, wenn man nur statt $\frac{a, a_{n-1}}{a_1, a_{n-1}}$ überall $\frac{s}{t}$ setzt.

Soll daher die Gleichung $x^2 - Ay^2 = D$, unter der Voraussetzung, dafs $D < \sqrt{A}$ ist, aufgelöst werden, so braucht man nur $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln: findet sich alsdann unter den Werthen von z (§. 107. Form. 21.) einer, dessen Nenner D ist, so ist die Gleichung aufgelöst, wenn man den Näherungswerth $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ berechnet, zu welchem dieses z gehört, indem man $x = a, a_n$; $y = a_1, a_n$ setzt, vorausgesetzt, dafs $\frac{a, a_n}{a_1, a_n} > \sqrt{A}$ ist; im entgegengesetzten Falle wird durch diese Werthe die Gleichung $x^2 - Ay^2 = -D$ gelöst. Ist $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ nicht der Näherungswerth, der einem dem mittlern vorangehenden Theilnenner (§. 109.) entspricht, so kommt der Theilnenner a_{n+1}, und daher auch D in derselben Periode zweimal vor, und es wird alsdann, wenn der Näherungswerth $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$, der dem ersten D entspricht, der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -D$ Genüge leistet, der Näherungswerth $\frac{a, a_m}{a_1, a_m}$, der dem zweiten D entspricht, die Gleichung $x^2 - Ay^2 = D$ auflösen, wenn man $x = a, a_m$; $y = a_1, a_m$ setzt. (Vgl. §. 111.)

115.

Lagrange hat zuerst gezeigt, dafs durch Hülfe der Kettenbrüche die Gleichung

$$4. \quad x^2 - Ay^2 = 1$$

immer auflösbar ist, wenn A eine nicht quadratische Zahl bedeutet. Zu diesem Endzwecke verwandelt man $\sqrt{A}$ in einen Kettenbruch nach §. 111.; es sei

$$\sqrt{A} = F(a+1 : a_1 + \ldots + 1 : a_m + 1 : 2a + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_m + 1 : 2a \text{ etc.}),$$

so hat man

$$(a, a_m)^2 - A(a_1, a_m)^2 = \pm 1;$$

gilt das obere Zeichen, so hat man sogleich $x = a, a_m$; $y = a_1, a_m$; gilt das untere, so ist x der Zähler, y der Nenner des Bruches

$$F(a+1 : a_1 + \ldots + 1 : a_m + 1 : 2a + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_m \text{ etc.})$$ (vergl. §. 111.).

Die hier angegebenen Werthe sind zugleich die kleinsten, die der Gleichung (4.) Genüge leisten. Wir wollen dies nur für den ersten Fall beweisen, weil dasselbe für den zweiten gilt. Hätte man noch kleinere Werthe, als $x = a, a_m$; $y = a_1, a_m$, allenfalls $x = p$, $y = q$, so müfste $\frac{p}{q}$ ein Näherungswerth von $\sqrt{A}$ sein; es sei $\frac{p}{q} = \frac{a, a_n}{a_1, a_n}$, und es wäre

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{A}+I}{1}}}};$$

aber aus den Gleichungen

$$(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2 = 1, \quad A.a_1, a_n.a_1, a_{n-1} - a, a_n.a, a_{n-1} = I$$

folgt, wenn man die erste mit a_1, a_{n-1}, die zweite mit a_1, a_n multiplicirt, und die Resultate addirt,

$$a_1, a_n.I + a_1, a_{n-1} = a, a_n, \quad \text{also} \quad I = \frac{a, a_n}{a_1, a_n} - \frac{a_1, a_{n-1}}{a_1, a_n};$$

es ist aber $\frac{a, a_n}{a_1, a_n} = a + \frac{a_2, a_n}{a_1, a_n}$ (§. 3.), also $I = a + \frac{a_2, a_n - a_1, a_{n-1}}{a_1, a_n}$;

nun ist a_2, a_n und a_1, a_{n-1} jedes kleiner, als a_1, a_n, um so mehr $a_2, a_n - a_1, a_{n-1}$, es mufs daher $a_2, a_n = a_1, a_{n-1}$ sein, weil sonst I ein Bruch wäre: folglich ist $I = a$, und $\frac{\sqrt{A}+I}{1}$ würde den Theilnenner $2a$ geben, d. h. die Periode würde bei a_n endigen, gegen die Voraussetzung.

Schon §. 111. wurde bemerkt, dafs es unendlich viele Werthe giebt, die der Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ Genüge leisten, und aus (114.) folgt, dafs überhaupt alle Werthe, die diese Gleichung auflösen, aus den Näherungswerthen von $\sqrt{A}$ gefunden werden. Man braucht aber diese Näherungswerthe nicht besonders zu berechnen, sondern sobald $x = a, a_m$; $y = a_1, a_m$ gefunden ist, so kann man die andern Werthe von x, y daraus ableiten. Man setze nemlich

$$\left.\begin{array}{ll} 5. & a, a_m + a_1, a_m\sqrt{A})^n = x + y\sqrt{A} \\ 6. & a, a_m - a_1, a_m\sqrt{A})^n = x - y\sqrt{A} \end{array}\right\},$$ wo n irgend eine ganze Zahl

bedeutet, so erhält man, wenn man (5.) mit (6.) multiplicirt,

$$[(a, a_m)^2 - A(a_1, a_m)^2]^n = x^2 - Ay^2 = 1,$$

wie verlangt wurde. Die Werthe von x und y findet man bequemer durch die Formeln

$$7. \quad x = \frac{(a, a_m + a_1, a_m\sqrt{A})^n + (a, a_m - a_1, a_m\sqrt{A})^n}{2} \text{ *)},$$

$$8. \quad y = \frac{(a, a_m + a_1, a_m\sqrt{A})^n - (a, a_m - a_1, a_m\sqrt{A})^n}{2\sqrt{A}}.$$

Man bezeichne die Werthe von x und y, die dem Exponenten n entspre-

*) *Hist. de l'acad. de Berlin an.* 1767.

chen, durch x_n, y_n; sobald nun zwei Werthe x_{n-1}, y_{n-1} und x_n, y_n gegeben sind, so kann man daraus den Werth von x_{n+1}, y_{n+1} finden. Denn es ist

$$x_{n+1} = \frac{(a, a_m + a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}((a, a_m)^2 + 2a, a_m . a_1, a_m \sqrt{A} + A(a_1, a_m)^2)}{2}$$
$$+ \frac{(a, a_m - a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}((a, a_m)^2 - 2a, a_m . a_1, a_m \sqrt{A} + A(a_1, a_m)^2)}{2};$$

es ist aber auch

$$x_n . 2x_1 = \frac{(a, a_m + a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}(2(a, a_m)^2 + 2a, a_m . a_1, a_m \sqrt{A})}{2}$$
$$+ \frac{(a, a_m - a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}(2(a, a_m)^2 - 2a, a_m . a_1, a_m \sqrt{A})}{2};$$

nun ist $A(a_1, a_m)^2 = (a, a_m)^2 - 1$; substituirt man diesen Werth in dem Werthe von x_{n+1}, so findet man

$$x_{n+1} = \frac{(a, a_m + a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}(2(a, a_m)^2 + 2a, a_m . a_1, a_m \sqrt{A} - 1)}{2}$$
$$+ \frac{(a, a_m - a_1, a_m \sqrt{A})^{n-1}(2(a, a_m)^2 - 2a, a_m . a_1, a_m \sqrt{A} - 1)}{2} = x_n . 2x_1 - x_{n-1},$$

und eben so findet man $y_{n+1} = y_n . 2y_1 - y_{n-1}$. Die Werthe $x_1, x_2, x_3 \ldots$, und eben so die Werthe $y_1, y_2, y_3, \ldots$ bilden daher eine recurrirende Reihe, deren Beziehungsscale $2x_1, -1$ ist. Dafs die Formeln (7.) und (8) keine Werthe liefern können, die nicht in den Näherungswerthen von $\sqrt{A}$ enthalten sind, ist klar; es mufs nur noch bewiesen werden, dafs die Formeln (7.) und (8.) alle möglichen Werthe von x und y geben. Man nehne an, es entsprächen die Werthe $\frac{x_n}{y_n}$, $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ bezüglich den Näherungswerthen $\frac{a, a_r}{a_1, a_r}$, $\frac{a, a_s}{a_1, a_s}$, und es lägen zwischen diesen Näherungswerthen noch andere, die der Gleichung (4.) Genüge leisten. Sei die auf $\frac{a, a_r}{a_1, a_r}$ zunächst folgende $= \frac{a, a_{r+m+1}}{a_1, a_{r+m+1}}$, und zwar

$$a_{r+1} = 2a; \; a_{r+2} = a_1; \; a_{r+3} = a_2; \; \ldots . \; a_{r+m+1} = a_m .$$

Nach §. 9. Formel (*F.*) ist

$$\frac{a, a_{r+m+1}}{a_1, a_{r+m+1}} - \frac{a, a_r}{a_1, a_r} = \frac{a, a_{r+m+1} . a_1, a_r - a_1 . a_{r+m+1} . a, a_r}{a_1, a_r} = \frac{a_{r+2} . a_{r+m+1}}{a_1, a_{r+m+1} . a_1, a_r}$$
$$= \frac{a_1, a_m}{a_1, a_{r+m+1} . a_1, a_r} .$$

Man findet aber leicht, wenn man statt x_n, y_n, x_{n+1}, y_{n+1}, ihre Werthe aus Formel (7.) und (8.) substituirt, dafs $x_n . y_{n+1} - x_{n+1} . y_n = a_1, a_m$ ist, also $\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{a_1, a_m}{a_1, a_r . a_1, a_s}$; nun ist $a_1, a_s > a_1, a_{r+m+1}$: es wäre also

$\frac{a, a_r}{a_1, a_r} - \frac{a, a_s}{a_1, a_s} < \frac{a, a_r}{a_1, a_r} - \frac{a, a_{r+m+1}}{a_1, a_{r+m+1}}$ gegen die Voraussetzung, da ja $\frac{a, a_{r+m+1}}{a_1, a_{r+m+1}}$ zwischen $\frac{a, a_r}{a_1, a_r}$ und $\frac{a, a_s}{a_1, a_s}$ liegen soll.

Man bemerke noch Folgendes: Da alle Theilnenner des Kettenbruchs, der den Werth von $\sqrt{A}$ angiebt, die gröfste ganze Zahl sind, die in einem Ausdrucke von der Form $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$ enthalten ist, aber erst das D, welches dem letzten Theilnenner $2a$ der Periode entspricht, $=1$ ist, jedes vorhergehende dagegen $\geqq 2$ sein mufs, und I nicht gröfser als a sein kann, so folgt daraus, dafs alle Theilnenner, die in der Periode enthalten sind (den letzten $2a$ ausgenommen), $=a$ oder $<a$ sein müssen.

116.

Das Aufsuchen der kleinsten Werthe, die der Gleichung (4.) Genüge leisten, führt oft zu sehr beschwerlichen Rechnungen: so z. B. hat, wenn $A=331$ ist, die Periode des Kettenbruchs, der den Werth von $\sqrt{A}$ angiebt, 34 Theilnenner. Eine Abkürzung des gewöhnlichen Verfahrens scheint aber ganz besonders von der Auflösung einer an und für sich sehr interessanten Frage abzuhängen, nemlich: ob man nicht, wenn eine Zahl A gegeben ist, aus derselben alle Theilnnener des entsprechenden Kettenbruchs durch eine allgemeine Formel ableiten kann. Die Lösung dieser Frage, die bis jetzt die Mathematiker wenig beschäftigt zu haben scheint, scheint um so eher möglich zu sein, da man wirklich für gewisse einzelne Fälle den Zusammenhang zwischen A und den Theilnennern nachweisen kann. Einige solche Fälle haben schon früher Euler *), Kausler **) und Degen ***) gegeben; sie lassen sich aber sehr vermehren. Ich habe in der folgenden Tabelle nur eine Anzahl von Formeln zusammengestellt, in welcher die Anzahl der Theilnenner nicht sehr grofs ist; sie enthalten die meisten der früher bekannten als einzelne Fälle. Hierbei ist folgende Abkürzung angewandt worden: Da dieselben Theilnenner in der Periode in umgekehrter Ordnung wiederkehren, so sind die Theilnenner überhaupt nur bis zum mittleren Theilnenner, wenn ein solcher vorhanden war, angegeben, dieser aber in Klammern eingeschlossen worden (§. 109). War kein solcher mittlerer Theilnenner vorhanden, so sind die zwei mittelsten und einander gleichen Theilnenner in Klammern eingeschlossen worden. Findet man also z. B. bei Formel [6] die Theilnenner $n, 1, (n-1)$ angegeben, so heifst dies, dafs die Periode aus den Theilnennern $1, n-1, 1, 2n$ besteht.

---

*) *Novi comment. acad. Petr. T.* 11. *pg.* 46.
**) *Mém. de l'ac. de Petersb. T.* 2. *pg.* 95. *sqq.*
***) *Canon Pellianus pg. XVII.*

	Ist die Zahl A	so sind die Theilnenner
[1]	$=m^2n^2+m$	$=mn, (2n)$
[2]	$=m^2n^2+2m$	$=mn, (n)$
[3]	$=m^2n^2+2mn$	$=mn, (1)$
[4]	$=m^2(n+2)^2-2m$	$=m(n+2)-1, 1, (2n-1)$
[5]	$=mn+m-1)^2+2(mn+m-1)-n$	$=m(n+1)-1, 1, (2(m-1))$
[6]	$=n^2+2n-1$	$=n, 1, (n-1)$
[7]	$=(2n+3)^2+(4n+3)$	$=2n+3, 1, (n)$
[8]	$=(2m+1)^2.n^2-2n$	$=(2m+1)n-1, 1, (2m-1)$
[9]	$=[(m^2+m)n-(1+2m)]^2+(1+2m)n-4$	$=(m^2+m)n-(1+2m), m, (2)$
[10]	$=(6n-1)^2+4n-1$	$=(6n-1), 3, (3n-1)$
[11]	$=(5n+2)^2+5n+1$	$=5n+2, 2, (2n)$
[12]	$=(15n-2)^2+8n-1$	$=15n-2, 3, (1)$
[13]	$=(3n+1)^2+3n+2$	$=3n+1, 1, 1, (2n)$
[14]	$=(3n+1)^2+2n+1$	$=3n+1, 2, 1, (3n)$
[15]	$=(3n+1)^2+4n+2$	$=3n+1, 1, 2, 3n+1$
[16]	$=4n^2+4n-3$	$=2n, 1, n-1, (2)$
[17]	$=(15n-7)^2+11n-5$	$=15n-7, 2, 1, (2)$
[18]	$=(10n-3)^2+4n-1$	$=10n-3, 4, 1, (5n-3)$
[19]	$=36n^2-17n+2=(4n-1)(9n-2)$	$=6n-2, 1, 1, (2)$
[20]	$=(9n+2)^2+8n+2$	$=9n+2, 2, 4, (9n+2)$
[21]	$=(10n-3)^2+11n+3$	$=10n-3, 1, 1, (4)$
[22]	$=(20m+8)^2+31m+13=(16m+7)(25m+11)$	$=20m+8, 1, 3, (2)$
[23]	$=(7n-2)^2+8n-2$	$=7n-2, 1, 1, 3, (7n-2)$
[24]	$=(17n-3)^2+12n-2$	$=17n-3, 2, 1, 5, (17n-3)$
[25]	$=(7n+1)^2+6n+1$	$=7n+1, 2, 2, 1, (7n)$
[26]	$=(6n+2)^2+4n+1$	$=6n+2, 3, 3n, 1, (4)$
[27]	$=(4n+2)^2+8$	$=4n+2, n, 1, 1, (2n)$
[28]	$=(9n+3)^2+18$	$=9n+3, n, 2, 1, 2n, (9n+3)$
[29]	$=(9n-3)^2+10n-3$	$=9n-3, 1, 1, 3, 1, (9n-4)$
[30]	$=(12n-4)^2+16n-4$	$=12n-4, 1, 2, 3n-2, 1, 5, (6n-2)$
[31]	$=(12n+3)^2+3n+3$	$=12n+3, 2, 1, 3n, 5, 1, (6n)$
[32]	$=(6n+8)^2+12n+5$	$=6n+8, 1, n, 2, 3n+3, 1, (4n+4)$
[33]	$=(4n+1)^2+(3n+1)^2$	$=5n+1, (2, 2)$
[34]	$=(15n+2)^2+(8n+1)^2$	$=17n+2, (4, 4)$
[35]	$=(2n+1)^2+2^2$	$=2n+1, n, (1, 1)$
[36]	$=(4n-1)^2+(3n-1)^2$	$=5n-2, 1, (1, 1)$
[37]	$=(15n-2)^2+(8n-1)^2$	$=17n-3, 1, (3, 3)$
[38]	$=(12n-7)^2+(5n-3)^2$	$=13n-8, 2, (1, 1)$
[39]	$=(20n+1)^2+(21n+1)^2$	$=29n+1, 2, (2, 2)$
[40]	$=(12n-5)^2+(5n-2)^2$	$=13n-6, 1, 1, (1, 1)$
[41]	$=(6n+1)^2+(8n+2)^2$	$=10n+2, 4, 1, 5n, (3, 3)$
[42]	$=(6n-1)^2+(8n-2)^2$	$=10n-3, 1, 4, 5n-2, 1, (2, 2)$

Diese Formeln, die sich noch in's Unendliche vermehren liefsen, können mit gutem Nutzen gebraucht werden, wenn man Tafeln berechnen will, die für jedes A die kleinsten Werthe von x und y angeben, welche der Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ Genüge leisten. Sie geben übrigens zu eben so viel einzelnen Theoremen über diese Werthe Veranlassung. So z. B. kann man sagen, wenn $A = n^2 + 2n - 1$ ist, so sind die geringsten Werthe von x und y, die der Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ Genüge leisten, nach [6], Zähler und Nenner des Bruches $\frac{n(n+2)}{n+1}$, d. h. $x = n(n+2)$, $y = n+1$. Einzelne Formeln können auch bei der Untersuchung über die Zerfällung der Zahlen in Factoren dienen. Ist z. B. die gröfste in $\sqrt{A}$ enthaltene Zahl $6n-2$, und die Periode des entsprechenden Kettenbruchs

$$= 1, 1, 2, 1, 1, 2, (6n-2),$$

so ist nach [19] die Zahl A nothwendig ein Product aus den Factoren $(4n-1)(9n-2)$; einen ähnlichen Satz würde [22] geben. So lange jedoch diese Formeln noch vereinzelt sind, können sie nur einen sehr untergeordneten Werth haben.

116.

Die Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ ist nach §. 111. und 114. nur und immer auflösbar, wenn die Periode eine ungerade Anzahl von Theilnennern enthält, d. h. wenn sie keinen mittleren Theilnenner hat. Es ist daher interessant, zu untersuchen, wie die Zahl A beschaffen sein mufs, damit diese Gleichung wirklich aufgelöst werden kann. Man nehme an, es sei a die gröfste ganze in $\sqrt{A}$ enthaltene Zahl, und die Periode bestehe aus den Gliedern

$$a_1, a_2, \ldots . a_n, a_n, \ldots . a_2, a_1, 2a,$$

so ist

$$\sqrt{A} = a + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_n + \ddots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{2a + \sqrt{A} - a}}}}} = a + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_n + \ddots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\sqrt{A} + a}}}}} \qquad (\text{§. 14. Form. 8.}).$$

Man setze nun

$$\frac{M}{N} = a_n + \ddots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\sqrt{A}+a}} = \frac{(\sqrt{A}+a)(a_n, a_1)+(a_n, a_2)}{(\sqrt{A}+a)(a_{n-1}, a_1)+(a_{n-1}, a_2)},$$

so ist

$$\sqrt{A} = + \frac{\frac{M}{N}(a_2, a_n)+a_2, a_{n-1}}{\frac{M}{N}(a_1, a_n)+a_1, a_{n-1}}.$$

Hieraus findet man nach gehöriger Reduction

9. $$A = \frac{[a(a_1, a_n)+a_2, a_n]^2+[a(a_1, a_{n-1})+a_2, a_{n-1}]^2}{(a_1, a_n)^2+(a_1, a_{n-1})^2} = \frac{(a, a_n)^2+(a, a_{n-1})^2}{(a_1, a_n)^2+(a_1, a_{n-1})^2},$$

oder

10. $$(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2 = -[(a, a_{n-1})^2 - A(a_1, a_{n-1})^2].$$

Nimmt man nun an, dafs

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I_1}{D_1}$$

bezüglich die Werthe von z sind, die den Näherungswerthen $\frac{a, a_{n-1}}{a_1, a_{n-1}}$, $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ entsprechen (§. 107. Form. 21.), so ist

$$(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2 = \pm D_1,$$
$$(a, a_{n-1})^2 - A(a_1, a_{n-1})^2 = \pm D,$$

folglich

$$D_1 = D,$$

aber auch

$$A = I_1^2 + DD_1 \text{ (§. 107. Form. 29.)}$$

also

11. $$A = I_1^2 + D_1^2.$$

Die Zahlen I_1 und D_1 können keinen gemeinschaftlichen Factor haben, denn hätten sie einen solchen, so müfste er nach (11.) auch ein Factor von A sein; hieraus würde folgen, dafs er auch ein Factor von a, a_n ist, da man $(a, a_n)^2 = \pm D_1 + A(a_1, a_n)^2$ hat, und eben so würde folgen, dafs er auch ein Factor von a, a_{n-1} ist; es müfsten also a, a_n und a, a_{n-1} einen gemeinschaftlichen Factor haben, was nicht möglich ist, da sie Zähler und Nenner des Kettenbruchs

$$F(a_n+1 : a_{n-1}+\ldots.+1 : a)$$

sind (§. 10.).

Die Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ kann daher nur dann statt finden, wenn sich A in zwei Quadrate zerlegen läfst, deren Wurzeln Primzahlen zu einander sind; es mufs daher A entweder $= (2t)^2 + (2u+1)^2$ oder

$= (2t+1)^2+(2u+1)^2$ sein, d. h. die Gleichung hat keine Auflösung, wenn A in der Form $4n$ oder in der Form $4n+3$ enthalten ist.

Es verdient noch bemerkt zu werden, dafs auch y die Summe zweier Quadrate ist, deren Wurzeln Primzahlen zu einander sind. Da nemlich y der Nenner des Kettenbruchs

$$F(a+1:a_1+\ldots.+1:a_n+1:a_n+\ldots.+1:a_1)$$

ist, so findet man $y=(a_1, a_n)^2+(a_1, a_{n-1})^2$; aber a_1, a_n und a_1, a_{n-1} sind Zähler und Nenner des Kettenbruchs $F(a_n+1:a_{n-1}+\ldots.+1:a_1)$, und haben daher keinen gemeinschaftlichen Factor.

117. 118

Hat die Periode einen mittleren Theilnenner, so dafs sie aus den Gliedern

$$a_1, a_n, \ldots. a_n, a_{n+1}, a_n \ldots. a_2, a_1$$

besteht, und ist a die gröfste in $\sqrt{A}$ enthaltene Zahl, $\frac{p}{q}$ der erste Näherungswerth, der der Gleichung

$$x^2-Ay^2=1$$

Genüge leistet, so ist

$$\frac{p}{q}=a+\cfrac{1}{a_1+\ddots+\cfrac{1}{a_{n+1}+\cfrac{1}{\cfrac{a_1, a_n}{a_1, a_{n-1}}}}}=\frac{\left(a_{n+1}+\frac{a_1, a_{n-1}}{a_1, a_n}\right)a, a_n+a, a_{n-1}}{\left(a_{n+1}+\frac{a_1, a_{n-1}}{a_1, a_n}\right)a_1, a_n+a_1, a_{n-1}}.$$

Hieraus findet man

$$p=a, a_n(a_{n+1}.a_1, a_n+2a_1, a_{n-1})+a, a_{n-1}.a_1, a_n-a, a_n.a_1, a_{n-1},$$
$$q=a_1, a_n(a_{n+1}.a_1, a_n+2a_1, a_{n-1}).$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung

$$p^2-Aq^2=1=(a, a_{n-1}.a_1, a_n-a, a_n.a_1, a_{n-1})^2,$$

so erhält man

$$[(a, a_n)^2-A(a_1, a_n)^2](a_{n+1}.a_1, a_n+2a_1, a_{n-1})=\pm 2a, a_n;$$

nun ist aber auch

$$(a, a_n)^2-A(a_1, a_n)^2=\pm D\ ^*),$$

folglich

$$12.\quad a_{n+1}.a_1, a_n+2a_1, a_{n-1}=\frac{2a, a_n}{D},$$

d. h. D ist ein Factor von $2a, a_n$.

---

*) Wenn nemlich $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$ der Werth von z ist, aus dem man a_{n+1} findet.

Die Zahlen a, a_n und a_1, a_n haben keinen gemeinschaftlichen Factor; ist daher D eine ungerade Zahl (und mithin ein Factor von a, a_n), so folgt

$$13. \quad \frac{(a, a_n)^2}{D} - \frac{A(a_1, a_n)^2}{D} = \pm 1,$$

D mufs also auch ein Factor von A sein. Es sei $a, a_n = k.D$, $A = l.D$, so folgt aus (13.)

$$14. \quad l(a_1, a_n)^2 - D.k^2 = \mp 1.$$

Ist D eine gerade Zahl $= 2E$, so ist E ein Factor von a, a_n; die Gleichung (12.) geht daher in folgende über:

$$15. \quad \frac{(a, a_n)^2}{E} - \frac{A(a_1, a_n)^2}{E} = \pm 2;$$

es mufs hier wieder E ein Factor von A sein; setzt man $a, a_n = k.E$, $A = l.E$, so hat man

$$16. \quad l(a_1, a_n)^2 - E.k^2 = \pm 2.$$

Ist A eine Primzahl von der Form $4n+1$, so mufs $l = 1$ und $A = D$ sein, wenn D eine ungerade Zahl ist; die Gleichung (14.) geht alsdann in folgende über:

$$17. \quad (a_1, a_n)^2 - A.k^2 = \mp 1.$$

Diese Gleichung kann aber nicht statt haben, man möge das obere oder untere Zeichen nehmen; denn im ersten Falle würde die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = -1$$

eine Auflösung haben, was nicht möglich ist, da der Kettenbruch einen mittleren Theilnenner hat; im zweiten Falle würde die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = 1,$$

durch Werthe von x und y aufgelöst werden, die kleiner als p und q sind, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. Aus Gleichung (16.) würde folgen

$$18. \quad (a_1, a_n)^2 - Ak^2 = \pm 2,$$

wenn $A = E$ und folglich $l = 1$ wäre; diese Annahme ist aber unmöglich, weil sonst $D = 2A$, also $D > 2\sqrt{A}$ wäre, gegen §. 110. Es müfste folglich $E = 1$, $A = l$ sein, und es würde daher aus Gleichung (16.) die Gleichung

$$19. \quad k^2 - A(a_1, a_n)^2 = \pm 2$$

folgen. Sind aber k und a_1, a_n beide gerade Zahlen, so sind ihre Quadrate in der Form $4m$ enthalten: es müfste daher $k^2 - A(a_1, a_n)^2$ durch 4 theilbar sein. Ist k eine gerade, a_1, a_n eine ungerade Zahl, so ist k^2 in der Form $4m$, $(a_1, a_n)^2$ in der Form $4m+1$ enthalten: es ist also auch $A(a_1, a_n)^2$ in der Form $4m+1$ enthalten, und daher kann $k^2 - A(a_1, a_m)^2$

nicht durch 2 theilbar sein. Ist endlich a_1, a_n und k ungerade, so ist sowohl k^2 als auch $(a_1, a_n)^2$ in der Form $4m+1$ enthalten, daher mufs $k^2 - A(a_1, a_m)^2$ durch 4 theilbar sein. Es kann daher unter der Voraussetzung, dafs A eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist, weder die Gleichung (17.) noch die Gleichung (19.) statt haben, d. h. es kann überhaupt eine solche Zahl nicht so beschaffen sein, dafs die Periode des ihrer Quadratwurzel entsprechenden Kettenbruchs einen mittleren Theilnenner enthielte; es ist daher für eine solche Zahl immer möglich, die Gleichung

$$x^2 - Ay^2 = -1$$

zu lösen, und sie besteht aus der Summe zweier Quadrate, deren Werth man jedesmal durch die Entwickelung des Kettenbruchs finden kann; es ist nemlich

$$A = I_1^2 + D_1^2,$$

wo I_1 und D_1 die in §. 116. bezeichneten Werthe haben. Die Natur der Zahlen I_1 und D_1 kann noch genauer bestimmt werden. Es ist klar, dafs eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade sein mufs: es ist aber immer I_1 gerade, D_1 ungerade. Denn in §. 116. wurden die zwei Gleichungen

$$(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2 = \pm D_1, \qquad (a, a_{n-1})^2 - A(a_1, a_{n-1})^2 = \mp D_1$$

gefunden; da nun $a, a_n . a_1, a_{n-1} - a_1, a_n . a, a_{n-1} = \pm 1$ ist, so können die Zahlen a, a_n; a_1, a_n; a, a_{n-1}; a_1, a_{n-1} weder alle gerade noch alle ungerade sein; es müssen vielmehr entweder drei ungerade und eine gerade sein, oder es müssen von den Zahlen a, a_n; a_1, a_{n-1}; a, a_{n-1}; a_1, a_n entweder nur die zwei ersten, oder nur die zwei letzten gerade sein. Die Voraussetzung, dafs drei Zahlen ungerade sind, eine gerade, ist aber unstatthaft, weil sonst von den zwei Ausdrücken

$$(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2 \text{ und } (a, a_{n-1})^2 - A(a_1, a_{n-1})^2$$

einer einer geraden, der andere einer ungeraden Zahl entspräche. Es mufs daher nothwendig eine der zwei Zahlen a, a_n und a_1, a_n gerade, die andere ungerade sein, und dasselbe gilt von den zwei Zahlen a, a_{n-1} und a_1, a_{n-1}. Mithin ist $(a, a_n)^2 - A(a_1, a_n)^2$ und $(a, a_{n-1})^2 - A(a_1, a_{n-1})^2$, also auch D_1 eine ungerade Zahl, und I_1 eine gerade *).

118.

Ist A eine Primzahl von der Form $4m+3$, so mufs der $\sqrt{A}$ entsprechende Kettenbruch eine Periode mit mittlerem Theilnenner haben

*) Dies hat zuerst *Gaufs* auf anderem Wege gefunden. *Disq. arith. art.* 265.

(116.). Da nun die Gleichung (17.) auch für diesen Fall nicht statt haben kann, so mufs die Gleichung (19.) gelten, also $D=2$ sein. Ist A von der Form $8m+3$, so kann nur die Gleichung

$$k^2-A(a_1, a_n)^2=-2,$$

ist dagegen $A=8m+7$, nur die Gleichung

$$k^2-A(a_1, a_n)^2=2$$

realisirt werden. Denn es ist einleuchtend, dafs in jedem Falle die Zahlen k und a_1, a_n ungerade, also ihre Quadrate in der Form $8m+1$ enthalten sein müssen. Ist $A=8m+3$, so kann nicht $k^2-2=A(a_1, a_n)^2$, d. h. $8m+1-2=(8m+3)(8m+1)$ sein, und ist $A=8m+7$, so kann nicht $k^2+2=A(a_1, a_n)^2$, d. h. $8m+1+2=(8m+7)(8m+1)$ sein. Da $a, a_n=kE$ und $E=1$ ist, so hat man, wenn A in der Form $8m+3$ enthalten ist,

$$(a, a_n)^2-A(a_1, a_n)^2=-2;$$

ist dagegen A in der Form $8m+7$ enthalten, so hat man

$$(a, a_n)^2-A(a_1, a_n)^2=2,$$

d. h. je nachdem A eine Primzahl von der Form $8m+3$ oder $8m+7$ ist, wird der mittlere Theilnenner a_{n+1} eine gerade oder ungerade Stelle einnehmen, weil, je nachdem das Eine oder das Andere der Fall ist, $\frac{a, a_n}{a_1, a_n}$ kleiner oder gröfser als $\sqrt{A}$ sein, und daher a_n eine ungerade oder gerade Stelle einnehmen mufs.

Sobald A eine Primzahl ist, so kann nur in dem Werthe des Ausdrucks $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$, aus welchem sich der Theilnenner a_{n+1} ergiebt, $D=2$ sein: denn fände sich ein anderer Ausdruck $\frac{\sqrt{A}+I_1}{2}$, der einem anderen Theilnenner entspräche, so würde sowohl die Gleichung $x^2-Ay^2=2$ als $x^2-Ay^2=-2$ aufgelöst werden können, was, wie so eben bewiesen wurde, unmöglich ist (vergl. §. 114.). Übrigens hängt der Beweis des Satzes, dafs die Gleichung $x^2-Ay=-2$, und die Gleichung $x^2-Ay^2=2$ bezüglich nicht für die Zahlen $A=8m+7$, $A=8m+3$ statt haben kann, nicht von dem Umstande ab, dafs diese Zahlen Primzahlen sind, sondern gilt auch für alle übrigen.

Das Vorstehende bietet ein neues Hülfsmittel dar, die Primzahlen von der Form $4n+3$ von den zusammengesetzten Zahlen in vielen Fällen zu unterscheiden. Ist nemlich eine Zahl $A=4n+3$ gegeben, s^{o}

entwickele man den dem Werthe $\sqrt{A}$ entsprechenden Kettenbruch. Ist alsdann in dem Ausdrucke $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$, aus welchem man den mittleren Theilnenner findet, D nicht $=2$, so ist man sicher, dafs A keine Primzahl ist, wiewohl umgekehrt $D=2$ und A dennoch eine zusammengesetzte Zahl sein kann. Sobald A eine ungerade Zahl und $D=2$ ist, so ist der mittlere Theilnenner $a_{n+1}=a$ oder $=a-1$, je nachdem a eine ungerade oder gerade Zahl ist. Denn aus der allgemeinen Gleichung

$$A=I_1^2+DD_1 \quad (\S.\ 107.,\ 29.)$$

folgt im vorliegenden Falle, wo $D_1=2$ ist,

$$I_1^2=A-2D,$$

oder

$$I_1^2>A-4,$$

und, wenn man $A=a^2+m$ setzt,

$$I_1^2>a^2+m-4,$$

mithin

$$I_1>a-2;$$

da aber zugleich I_1 nicht gröfser als a sein kann, so kann es nur $=a$ oder $=a-1$ sein. Ferner mufs I_1 eine ungerade Zahl sein, weil A ungerade und $A=I_1^2+DD_1$ ist, folglich $I_1=a$ oder $=a-1$, je nachdem a ungerade oder gerade ist; da aber a_{n+1} die gröfste in $\frac{a+I_1}{2}$ enthaltene Zahl ist, so folgt $a_{n+1}=I_1$. Man kann daher auch sagen: wenn A eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist, so mufs der mittlere Theilnenner $=a$ oder $=a-1$ sein, je nachdem a ungerade oder gerade ist.

Für den Werth $D=2$ folgt (aus §. 117. Formel 12.):

$$a_{n+1}=\frac{a,\,a_n-2a_1,\,a_{n-1}}{a_1,\,a_n};$$

nun ist

$$a,\,a_n=a.a_1,\,a_n+a_2,\,a_n,$$

also

$$a_{n+1}=a+\frac{a_2,\,a_n-2a_1,\,a_{n-1}}{a_1,\,a_n}.$$

Ist $A=4n+3$, so hat man daher $a_2,\,a_n=2a_1,\,a_{n-1}$, wenn a ungerade ist, und $2a_1,\,a_{n+1}-a_2,\,a_n=a_1,\,a_n$, wenn a gerade ist.

119.

Die Aufgabe: alle Werthe zn finden, welche der Gleichung $x^2-Ay^2=1$ Genüge leisten, ist als einzelner Fall in folgender allgemeineren enthalten. Es sei der Ausdruck $\frac{I+\sqrt{A}}{D}$ gegeben, wo $2I$, D, A ganze Zah-

len bedeuten, und $I<\sqrt{A}$, $D<2\sqrt{A}$ ist; man soll die Werthe finden, die der Gleichung

$$20.\quad x^2-Ay^2=n^2$$

Genüge leisten, wenn n den gröfsten gemeinschaftlichen Factor der drei Zahlen $2I$, D, $\frac{A-I^2}{D}=D^0$ bedeutet. Da hier von Anfang an die Werthe von I und D in Grenzen eingeschlossen sind, so mufs derselbe Werth $\frac{I+\sqrt{A}}{D}$ auch wieder vorkommen, wenn man die Entwickelung dieses Werthes durch einen Kettenbruch ausführt. Dieser Kettenbruch ist daher von Anfang an periodisch. Es seien die Glieder der Periode

$$a_1, a_2 \ldots . a_m,$$

also

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D}=a+\cfrac{1}{a_1+\ddots+\cfrac{1}{a_m+\cfrac{1}{\frac{\sqrt{A}+I}{D}}}}=\frac{\frac{\sqrt{A}+I}{D}a,a_m+a,a_{m-1}}{\frac{\sqrt{A}+I}{D}a_1,a_m+a_1,a_{m-1}}.$$

Hieraus findet man die zwei Gleichungen

$$\frac{A+I^2}{D^2}.a_1,a_m+(a_1,a_{m-1}-a,a_m)\frac{I}{D}=a,a_{m-1},$$

$$\frac{2I}{D_2}.a_1,a_m+\frac{a_1,a_{m-1}-a,a_m}{D}=0,$$

also

$$\frac{a_1,a_m.I}{D}=\frac{a,a_m-a_1,a_{m-1}}{2},$$

und

$$a,a_{m-1}=a_1,a_m\frac{(A-I^2)}{D^2}=\frac{a_1,a_m.D^0}{D}.$$

Man setze $a,a_m-\frac{a_1,a_m}{D}.I=\varphi$; $\frac{a_1,a_m}{D}=\psi$, so ist

$$\varphi^2-A.\psi^2=(a,a_m)^2-\frac{2a,a_m.a_1,a_m}{D}I+\frac{(a_1,a_m)^2.I^2}{D^2}-A.\frac{A.(a_1,a_m)^2}{D^2}$$

$$=(a,a_m)^2-\frac{2a,a_m.a_1,a_m}{D}I-\frac{(a_1,a_m)^2.D^0}{D}$$

$$=(a,a_m)^2-2a,a_m\frac{(a,a_m-a_1,a_{m-1})}{2}-a_1,a_m.a,a_{m-1}$$

$$=a,a_m.a_1,a_{m-1}-a_1,a_m.a,a_{m-1}=\pm 1,$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden mufs, je nachdem $\frac{a,a_m}{a_1,a_m}$ gröfser oder kleiner als $\frac{\sqrt{A}+I}{D}$ ist, d. h. je nachdem die Anzahl

der in der Periode enthaltene Theilnenner gerade oder ungerade ist; setzt man im letzteren Falle den Kettenbruch

$$F(a+1:a_1+\ldots.+1:a_m+1:a+1:a_1+\ldots.+1:a_m)=\frac{p}{q},$$

und

$$p-\frac{q.I}{D}=\varphi',\ \frac{q}{D}=\psi',$$

so hat man

$$\varphi'^2-A\psi'^2=1.$$

Es kann nun leicht bewiesen werden, dafs im ersten oder letzten Falle bezüglich

$$n.\varphi \text{ und } n\psi \text{ oder } n.\varphi' \text{ und } n\psi'$$

die kleinsten Werthe von x und y sind, die der Gleichung (20.) Genüge leisten, und dafs man alle übrigen Werthe durch die Formeln

$$x=\frac{(n\varphi+n\psi\sqrt{A})^e+(n\varphi-n\psi\sqrt{A})^e}{2},$$

$$y=\frac{(n\varphi+n\psi\sqrt{A})^e-(n\varphi-n\psi\sqrt{A})^e}{2\sqrt{A}}$$

im ersten Falle, oder durch die Formeln

$$x=\frac{(n\varphi'+n\psi'\sqrt{A})^e+(n\varphi'-n\psi'\sqrt{A})^e}{2},$$

$$y=\frac{(n\varphi'+n\psi'\sqrt{A})^e-(n\varphi'-n\psi'\sqrt{A})^e}{2\sqrt{A}}$$

im zweiten Falle erhält. Die genaue Erörterung wird jedoch hier übergangen, um die Abhandlung nicht zu sehr auszudehnen *).

Schlüfslich möge noch Folgendes bemerkt werden. Die Eigenschaft der in der Form $4n+1$ enthaltenen Primzahlen, dafs der ihrer Quadratwurzel entsprechende Kettenbruch keinen mittleren Theilnenner enthalten kann, kann in vielen Fällen dazu dienen, diese Primzahlen von den zusammengesetzten zu unterscheiden. Ist nemlich eine Zahl $A=4n+1$ gegeben, so verwandle man $\sqrt{A}$ in den entsprechenden Kettenbruch; enthält dieser einen mittleren Theilnenner, so weifs man mit Gewifsheit, dafs A keine Primzahl ist.

---

*) Die Auflösung der Gleichung (20.) hat zuerst Gaufs gegeben (*Disq. arithm. art.* 199.); man vergleiche auch Legendre *Théorie des nombr. part.* 1. §. IX.

Zusätze.

Zu §. 17.

Eine, der hier angenommenen, ähnliche Bezeichnung hat schon Legendre gebraucht. S. *Traité de fonct. ellipt. T.* 2. *pag.* 509.

Zu §. 28.

Man vergl. Euler *Introd. in. anal. inf. Cap.* 18.

Zu §. 31.

Anmerk. Da

$$1+\frac{A_1 x^h}{\alpha_1 - R} = \frac{1}{1-\frac{A_1 x^h}{\alpha_1 + A_1 x^h - R}},$$

so kann man statt

$$1.\quad {}_{1-\infty}^{m}F\left(1+\frac{A_1 x^h}{\alpha_1 - \frac{A_{m-1}\alpha_m^2 . A_{m+1} . x^h}{A_m . \alpha_{m+1} + A_{m+1} . x^h . \alpha_m}}\right)$$

auch folgenden Ausdruck schreiben:

$$2.\quad {}_{1-\infty}^{m}F\left(\frac{1}{1-\frac{A_1 x^h}{\alpha + A_1 x^h - \frac{A_{m-1} . \alpha_m^2 A_{m+1} . x^h}{A_m . \alpha_{m+1} + A_{m+1} . x^h . \alpha_m}}}\right).$$

Aus dem Ausdrucke

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{3}{3} - \frac{4}{4} \ldots .$$

findet Euler (*Opusc. anal. T.* 2. *pag.* 155.) vermittelst der Formel (2.)

$$2 = 1 + \frac{2}{0 + \frac{3.4}{0 \text{ etc.}}},$$

oder

$$2 = 1 + \frac{2.1^2.2.4.3^2.4.6.5^2.6.8.7^2 \ldots .}{1.3.2^2.3.5.4^2.5.7.6^2.7.9.8^2 \ldots .},$$

und bemerkt hierbei „*cujus veritas non facile perspicitur, quoniam numeri factorum in numeratore et denominatore non aequales statui possunt, etiamsi ambo sint infiniti.*" Indessen läfst sich die Wahrheit dieses Ausdrucks ganz einfach auf folgende Weise darthun: Nimmt man das unendliche Product stückweise, so hat man

$$\frac{2.1^2.2}{1.3} = \frac{4}{3},\quad \frac{2.1^2.2.4}{1.3.2^2} = \frac{1.2^2.4}{1.2^2.3} = \frac{4}{3},\quad \frac{2.1^2.2.4.3^2}{1.3.2^2.3.5} = \frac{1.2^2.3^2.4}{1.2^2.3^2.5} = \frac{4}{5},$$

$$\frac{2.1^2.2.4.3^2.4.6}{1.3.2^2.3.5.4^2} = \frac{1^2.2^2.3^2.4^2.6}{1.2^2.3^2.4^2.5} = \frac{6}{5},$$

$$\frac{2.1^2.2.4.3^2.4.6.5^2}{1.3.2^2.3.5.4^2.5.7} = \frac{1.2^2.3^2.4^2.5^2.6}{1.2^2.3^2.4^2.5^2.7} = \frac{6}{7} \text{ etc.}$$

Überhaupt kommen im Zähler die Quadrate aller ungeraden Zahlen vor, und aufserdem kommen alle geraden Zahlen doppelt vor, so dafs $(2m-1)^2$ zwischen $2m$ und $2m$ steht. Im Nenner dagegen kommen die Quadrate aller geraden Zahlen vor, und ferner alle ungeraden Zahlen doppelt, so dafs jedes Quadrat $(2m)^2$ zwischen $2m+1$ und $2m+1$ steht. Nimmt man daher den Zähler bis zur Stelle, wo der Factor $2m$ zum ersten Male vorkommt, so wird dieser

$$=1.2^2.3^2....2(m-1)^2.2m;$$

nimmt man hierzu den Nenner bis zum Factor $2(m-1)^2$, so wird der Nenner

$$=1^2.2^2.3^2....2(m-1)^2.2m-1,$$

und der ganze Bruch

$$=\frac{1^2.2^2.3^2....2(m-1)^2.2m}{1^2.2^2.3^2....2(m-1)^2.2m-1}=\frac{2m}{2m-1}.$$

Nimmt man dagegen die Zähler bis zur Stelle, wo der Factor $2(m-1)^2$ vorkommt, so wird dieser

$$=1^2.2^2.3^2....(2m-1)^2.2m;$$

nimmt man hierzu den Nenner bis zur Stelle, wo $2m+1$ zum ersten Male vorkommt, so wird dieser

$$=1.2^2.3^2....(2m-1)^2.2m+1,$$

und der ganze Bruch

$$=\frac{1.2^2.3^2....(2m-1)^2.2m}{1.2^2.3^2....(2m-1)^2.2m+1}=\frac{2m}{2m+1}.$$

Ist nun m unendlich grofs, so fallen in beiden Fällen Zähler und Nenner zusammen, und man hat daher

$$1=\frac{2.1^2.2.4.3^2.4....}{1.3.2^2.3.5.4^2....}.$$

Zu §. 34.

An die Formel

$$(a)=(b).(c)$$

läfst sich die allgemeinere Frage knüpfen, wie man das Product zweier Kettenbrüche wieder unter der Form eines Kettenbruchs darstellen kann. Es seien die zwei Kettenbrüche

$$[1]=a+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3\ \text{etc.}}}} \qquad \text{und} \qquad [2]=A+\cfrac{B_1}{A_1+\cfrac{B_2}{A_2+\cfrac{B_3}{A_3\ \text{etc.}}}}$$

gegeben: man soll einen dritten Kettenbruch

$$[3] = c + \cfrac{d_1}{c_1 + \cfrac{d_2}{c_2 + \cfrac{c_3}{d_3 \text{ etc.}}}}$$

finden, so dafs

$$[3] = [1].[2]$$

ist. Verwandelt man den Kettenbruch [1] in eine Reihe (nach §. 28.), so dafs

$$[1] = a(1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots.)$$

ist, und eben so den Kettenbruch [2], so dafs

$$[2] = A(1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \ldots.)$$

ist, so hat man bekanntlich

$$[1].[2] = aA(1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots.),$$

wo $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$; $\gamma_2 = \alpha_2 + \alpha_1\beta_1 + \beta_2$; $\gamma_3 = \alpha_3 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \beta_3$ u. s. w. ist. Hieraus folgt (nach §. 32.)

$$[1].[2] = \left(1 + \cfrac{\gamma_1}{1 - \cfrac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - \cfrac{\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2 + \gamma_3 - \text{etc.}}}}\right) \times a.A.$$

Es ist aber

$$\alpha_1 = \frac{b_1}{a.a_1}; \quad \alpha_2 = -\frac{b_1.b_2}{a.a_1.a_1,a_2}; \quad \alpha_3 = \frac{b_1.b_2.b_3}{a.a_1,a_2.a_1,a_3} \ldots.$$

$$\beta_1 = \frac{B_1}{A.A_1}; \quad \beta_2 = -\frac{B_1.B_2}{A.A_1.A_1,A_2}; \quad \beta_3 = \frac{B_1.B_2.B_3}{A.A_1,A_2.A_1,A_3} \ldots.$$

und daher

$$\gamma_1 = \frac{b_1}{a.a_1} + \frac{B_1}{A.A_1},$$

$$\gamma_2 = \frac{b_1.B_1}{a.a_1.A.A_1} - \frac{b_1.b_2}{a.a_1.a_1,a_2} - \frac{B_1.B_2}{A.A_1.A_1,a_2},$$

$$\gamma_3 = \frac{b_1.b_2.b_3}{a.a_1,a_2.a_1,a_3} - \frac{b_1.b_2.B_1}{a.a_1.a_1,a_2.A.A_1} - \frac{b_1.B_1.B_2}{a.a_1.A.A_1.A_1,A_3} + \frac{B_1.B_2.B_3}{A.A_1,A_2.A_1,A_3},$$

. . . . . .

Wendet man diese Erörterungen auf das Beispiel des §. 34. an, indem man $[1] = (1+x)^r$, $[2] = (1+x)^n$ setzt, so ergiebt sich

$$a = 1, \; a_1 = 1, \quad a_2 = 2 + (r-1)x, \; a_3 = 3 + (r-2)x \ldots.$$
$$b_1 = rx, \; b_2 = -(r-1)x, \; b_3 = -2(r-2)x \ldots.$$

und

$$A = 1, \; A_1 = 1, \quad A_2 = 2 + (n-1)x, \; A_3 = 3 + (n-2)x \ldots.$$
$$B_1 = nx, \; B_2 = -(n-1)x, \; B_3 = -2(n-2)x \ldots.,$$

folglich

$$\gamma_1 = (r+n)x,$$

$$\gamma_2 = rnx^2 + \frac{r(r-1).x^2}{2+(r-1)x-(r-1)x} + \frac{n.(n-1)x^2}{2+(n-1)x-(n-1)x} = \frac{(r+n-1)(r+n)x^2}{2},$$

$$\gamma_3 = \frac{2r(r-1)(r-2)x^3}{2.6} + \frac{r(r-1)n.x^3}{2} + \frac{r.n(n-1)x^3}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)x^3}{2.6}$$

$$= \frac{(r+n)(r+n-1)(r+n-2)x^3}{6},$$

also

$$(1+x)^{r+n} = 1 + \cfrac{(r+n)x}{1 - \cfrac{(r+n-1)(r+n)x^2:2}{(r+n)x + \cfrac{(r+n-1)(r+n)x^2}{2} - \cfrac{(r+n)x.(r+n)(r+n-1)(r+n-2)x^3:6}{\cfrac{(r+n-1)(r+n)x^2}{2} + \cfrac{(r+n)(r+n-1)(r+n-2)x^3}{6}}}} \text{ etc.}$$

Hieraus findet man, nach gehöriger Reduction,

$$(1+x)^{r+n} = 1 + \cfrac{(r+n)x}{1 - \cfrac{(r+n-1)x}{2+(r+n-1)x - \cfrac{2(r+n-2)x}{3+(r+n-2)x \text{ etc.}}}},$$

wie schon §. 34. gefunden wurde.

Auf ähnliche Weise würde man auch einen Kettenbruch finden können, der dem Producte von mehr als zwei Kettenbrüchen gleich wäre.

Verbindet man das hier über die Multiplication der Kettenbrüche Gesagte mit der Bemerkung, dafs man jede ganze Zahl, und zwar auf verschiedene Weise, in einen Kettenbruch, der ohne Ende fortläuft, verwandeln kann, so kann man hierdurch eine Menge von Formeln ableiten. So z. B. ergiebt sich aus dem Ausdrucke $m = \frac{n.m}{n-m+m}$ die Formel

$$[4] \quad m = \cfrac{nm}{n-m+\cfrac{nm}{n-m+\cfrac{nm}{n-m \text{ etc.}}}} \qquad \text{(vergl. §. 65.).}$$

Hieraus läfst sich schon manche merkwürdige Beziehung finden. Setzt man z. B. $n = m+1$, so hat man $m = \cfrac{m.m+1}{1+\cfrac{m.m+1}{1+\text{etc.}}}$ (wie man auch finden würde, wenn man den ganzen Kettenbruch $= x$ setzte, weil alsdann $x = \frac{m.m+1}{1+x}$ wäre). Setzt man $n = m+2$, so hat man

$$[5] \quad m = \cfrac{m.m+2}{2+\cfrac{m.m+2}{2+\text{etc.}}};$$

eben so ist

$$[6] \quad r = \frac{r.r+2}{2+\frac{r.r+2}{2+\text{etc.}}},$$

also

$$[5].[6] = mr = \frac{mr.mr+2}{2+\frac{mr.mr+2}{2\text{ etc.}}},$$

und wenn man eine gröfsere Anzahl von ganzen Zahlen m, r, s, t, ... in Kettenbrüche verwandelte, so fände man auf dieselbe Weise

$$\frac{m.m+2}{2+\frac{m.m+2}{2\text{ etc.}}} \times \frac{r.r+2}{2+\frac{r.r+2}{2\text{ etc.}}} \times \frac{s.s+2}{2+\frac{s.s+2}{2\text{ etc.}}} \times .... = \frac{(mrs....)(mrs....+2)}{2+\frac{(mrs....)(mrs....+2)}{2\text{ etc.}}},$$

Diese Betrachtungen lassen sich in's Unendliche fortsetzen, bieten aber weiter keine Schwierigkeit dar, und können daher hier abgebrochen werden.

Auf eine andere Weise kann jede ganze Zahl in einen Kettenbruch vermittelst der Formel $m = m-1+\frac{m}{m}$ verwandelt werden, aus welcher man

$$[7] \quad m = m-1+\frac{m}{m-1+\frac{m}{m-1\text{ etc.}}}$$

findet. Es böte sich hier auch die Gelegenheit dar, mancherlei interessante Reihen zu entwickeln; der Kürze halber möge hier nur folgende Platz finden. Setzt man in Formel [7] für m den Werth 2, so hat man

$$2 = 1+\frac{2}{1+\frac{2}{1+\frac{2}{1\text{ etc.}}}};$$

verwandelt man diesen Kettenbruch nach (§. 28.) in eine Reihe, so findet man

$$2 = 1+\frac{2}{1}-\frac{2^2}{1.3}+\frac{2^3}{3.5}-\frac{2^4}{5.11}+\frac{2^5}{11.21}-....$$

Das Gesetz, nach welchem diese Reihe fortgeht, ist einleuchtend

Eine andere Formel, vermöge welcher man eine ganze Zahl in einen Kettenbruch verwandeln kann, ist auch folgende:

$$[8] \quad m = m+1-\frac{m}{m+1-\frac{m}{m+1\text{ etc.}}},$$

welche man aus $m = m+1-\frac{m}{m}$ ableiten kann (vergl. §. 62.).

Verbindet man nun eine der Formeln [4], [7], [8] mit irgend einem bekannten Kettenbruche durch Multiplication, so kann man hierdurch eine

unzählige Menge neuer Kettenbrüche finden. Jedoch mufs der Verfasser gestehen, dafs er auf diesem Wege, gegen Erwarten, nur sehr verwickelte Ausdrücke gefunden hat, selbst wenn die einfachsten Verbindungen angewandt wurden. Es soll z. B. der Kettenbruch

$$1 = 2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2\ \text{etc.}}}$$

(den man aus Form. [8] erhält, wenn man $m = 1$ setzt) mit dem Kettenbruche

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1.2}{1 + \cfrac{2.3}{1 + \cfrac{3.4}{1\ \text{etc.}}}}} \qquad \text{(§. 49. Form. 5.)}$$

multiplicirt werden. Setzt man den ersten Kettenbruch $= [1]$, den zweiten $= [2]$, so hat man

$$a = 2,\ a_1 = 2,\ a_1,\ a_2 = 3,\ a_1,\ a_3 = 4,\ a_1,\ a_4 = 5,\ \ldots.$$
$$b_1 = -1,\ b_2 = -1,\ b_3 = -1,\ b_4 = -1,\ \ldots.$$
$$A = 1,\ A_1 = 1,\ A_1,\ A_2 = 3,\ A_1,\ A_3 = 9,\ A_1,\ A_4 = 45,\ \ldots.$$
$$B_1 = 1,\ B_2 = 1.2,\ B_3 = 2.3,\ B_4 = 3.4,\ \ldots.$$

mithin

$$\gamma_1 = \frac{3}{4},\ \gamma_2 = -1,\ \gamma_3 = \frac{35}{72},\ \gamma_4 = -\frac{53}{90},$$

und

$$\frac{\pi}{2} = 1 \times \left(1 + \cfrac{\frac{3}{4}}{1 + \cfrac{1}{-\frac{1}{4} - \cfrac{\frac{3}{4}\cdot\frac{35}{72}}{-\frac{37}{72} - \cfrac{\frac{53}{90}}{-\frac{74}{720}\ \text{etc.}}}}}\right) = 2 \times \left(1 + \cfrac{\frac{3}{4}}{4 - \cfrac{4.4}{1 - \cfrac{3.35}{37 - \cfrac{53.72.8}{74\ \text{etc.}}}}}\right)$$

Zu §. 49.

Verwandelt man das unendliche Product

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\ldots$$

nach Formel (4.) in einen Kettenbruch, so findet man

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots = 1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1.2}{4-\cfrac{2.3}{7-\cfrac{4.5}{11-\cfrac{6.7}{17-\cfrac{10.11}{23\text{ etc.}}}}}}};$$

nun ist aber

$$1=\frac{1}{2-\frac{2}{4-2}},\quad 2=\frac{2.3}{7-4},\quad 4=\frac{4.5}{11-6},\quad 6=\frac{6.7}{17-10},\quad 10=\frac{19.11}{23-12}\text{ etc.}$$

also

$$1=\cfrac{1}{2-\cfrac{1.2}{4-\cfrac{2.3}{7-\cfrac{4.5}{11\text{ etc.}}}}}\qquad\text{(vergl. §. 65.),}$$

also

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\ldots=0,$$

wie schon Euler gefunden hat. (*Introd. in. anal. inf. T.* 1. §. 277.)

Zu §. 53.

Zu den convergenten Kettenbrüchen rechne ich auch diejenigen, welche sich einem bestimmten Werthe oder einem anderen bestimmten Werthe nähern, je nachdem man $2n$ oder $2n+1$ Theilbrüche zur Berechnung anwendet. Diese Kettenbrüche entsprechen den Reihen, bei welchen man sich einem bestimmten Werthe oder einem anderen bestimmten Werthe immer mehr nähert, je nachdem man $2n$ oder $2n+1$ Glieder zur Berechnung anwendet. Eine solche Reihe ist z. B. die folgende:

$$(A)=\frac{2}{1}\mp\frac{3}{2}\pm\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}\text{ etc.}$$

Vereinigt man je zwei auf einander folgende Glieder, so geht die Reihe (A) in folgende über:

$$(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{7.8}+\ldots=\text{log. nat. 2.}$$

Das allgemeine Glied der Reihe (A) ist $\frac{m+1}{m}$, so dafs die einzelnen Glieder sich mehr und mehr der Einheit nähern, und wenn man $m=\infty$ setzt, wird der letzte Theil der Reihe

$$=+1-1+1-1+1-1\text{ etc.}$$

sein. Daher wird der Werth der Reihe (*A*) gegen den bestimmten Werth log. nat. 2. oder gegen den Werth log. nat. $2+1$ convergiren, je nachdem man eine gerade oder ungerade Anzahl von Gliedern zur Berechnung anwendet. Man kann aber jede convergirende Reihe in eine der Reihe *A* ähnliche Reihe verwandeln, wenn man zwischen je zwei Gliedern die Glieder $+1-1$ einschaltet. Solche Reihen könnte man allenfalls zweideutige convergirende Reihen nennen; in keinem Falle dürfen sie aber wohl zu den divergirenden Reihen gerechnet werden. Verwandelt man nun eine solche Reihe nach §. 31. in einen Kettenbruch, so mufs dieser ein zweideutiger convergirender Kettenbruch sein, d. h. ein Kettenbruch, dessen Werth sich immer mehr einem bestimmten oder einem andern bestimmten Werthe nähert, je nachdem man eine gerade oder ungerade Anzahl von Theilbrüchen zur Berechnung anwendet. Hiernach ist das, was in §. 54. gesagt worden ist, zu ergänzen. Sind nemlich bei einem zweideutigen convergirenden Kettenbruche alle Theilzähler und Theilnenner positiv, so kommt man allerdings auch dem wahren Werthe desto näher, je mehr Glieder man zur Berechnung anwendet; da aber ihr wahrer Werth zweideutig ist, oder da die Reihe, so zu sagen, zwei wahre Werthe hat, so kommt man bald dem einen, bald dem andern näher. So z. B. ergiebt sich aus der Reihe (*A*) der zweideutige convergirende Kettenbruch

$$\cfrac{2}{1+\cfrac{1^3.3}{1+\cfrac{2^3.4}{1+\cfrac{3^3.5}{1+\text{etc.}}}}},$$

welchen Kettenbruch schon Euler (*Opusc. anal. T.* 2. *pag.* 156.) gefunden hat (nur dafs er den Werth der Reihe $(A) = \text{log. nat. } 2+\frac{1}{2}$ setzt, was aber offenbar nur das Mittel aus den zwei Werthen log. 2. und log. $2+1$ ist). Keinesweges kann ich mich aber zur Ansicht des Herrn von Ettingshausen bekennen, der solche Kettenbrüche als divergirende betrachtet (vergl. dessen Vorles. über die höh. Mathem. Bd. 1. S. 72.).

Zu Kap. 5. *B.*

Da hier gezeigt wird, wie man die gröfste und kleinste Wurzel, wenn sie reell sind, oder die zwei gröfsten und kleinsten Wurzeln, wenn sie imaginär sind, direct finden kann, so erwächst hieraus zugleich eine wesentliche Verbesserung der Methoden, die Legendre zur Auflösung der Gleichungen gegeben hat, im Anfange zu seiner *Théorie des nombres,*

wenn überhaupt diese Methoden nach dem Erscheinen von Fourier's *Analyse des équations* noch einen Vorzug haben. Noch leichter können diese Wurzeln durch die Methode gefunden werden, die ich im Journale für die Mathem. Bd. 9. S. 305. ff. gegeben habe.

Die Anwendung der Kettenbrüche auf die Auflösung der Differenzialgleichungen, wiewohl sie manche Schriftsteller als besonders wichtig hervorheben, ist wissentlich in dieser Abhandlung übergangen worden. Sie beruht nemlich auf keinem besonderen Principe, sondern auf einer Substitutionsmethode, ähnlich der, die in §. 87. angewandt worden ist. Ist z. B. eine Differenzialgleichung zwischen den zwei veränderlichen Gröfsen x und y gegeben, die durch

$$F(x, y) = 0$$

ausgedrückt wird, so suche man einen Näherungswerth von y, er sei $= a$; man setze alsdann $y = a + \frac{1}{y^1}$, und substituire diesen Werth statt y in $F(x, y)$, so erhält man eine neue Gleichung $F(x, y_1) = 0$; hier kann man wieder einen Näherungswerth von y_1 finden, es sei dieser a_1; alsdann kann man wieder statt y^1 den Werth $a_1 + \frac{1}{y_2}$ substituiren, und fährt man so fort, so wird der Werth von y durch einen Kettenbruch $F(a+1:a_1+1:a_2 \text{ etc.})$ ausgedrückt. Wiewohl Lagrange diese Methode besonders empfiehlt, (*Mém. de l'ac. de Berlin* 1776.), so geht doch schon aus dem, was mehrmals über das Verhältnifs der verschiedenen Entwickelungen in unendlich fortlaufenden Ausdrücken erinnert worden ist, hervor, dafs im Allgemeinen solche Entwickelungen vor anderen keinen Vorzug haben können, da sie unter einander nur der Form, nicht aber dem Wesen nach verschieden sind, und so ist wohl auch die Methode, Differenzialgleichungen durch Hülfe der Kettenbrüche aufzulösen, der längst bekannten Methode, die dasselbe durch unendliche Reihen leistet, nicht vorzuziehen, da, besonders bei den Kettenbrüchen, die Bestimmung des vernachlässigten Restes so wichtig und in den meisten Fällen so schwierig ist. Dies hat auch schon Legendre bemerkt (*Exerc. du calc. intégr. T.* 2. *pag.* 223.).

Eine wichtige Bemerkung über Kettenbrüche von Jacobi, die aufserhalb des Planes dieser Abhandlung liegt, findet man im Journ. f. d. Math. Bd. 7. S. 41. ff., und eben daselbst S. 48. — 50. interessante Bemerkungen von Hill.

32.

Note sur la loi de la réfraction simple.

(Par Mr. *Pagani*, Prof. ord. à la faculté des sciences de l'Université de Liège.)

Un rayon lumineux part d'un point déterminé, et traverse plusieurs milieux diaphanes contigus, dont les surfaces de séparation sont données. Soit $L = 0$ l'équation, en termes finis, d'une quelconque de ces surfaces. Dénotons par s, s', les longueurs du rayon réfracté, interceptées par la surface L, et les deux surfaces qui la comprennent. Soient a, a', deux constantes, dont la première dépend de la nature du milieu qui contient la portion de rayon s, et la seconde dépend de la nature du milieu qui contient s'.

D'après le principe de la moindre action, on doit avoir

$$\delta . \Sigma (a s + a' s') = 0;$$

en observant que les variations des coordonnées doivent satisfaire aux équations $\delta L = 0$, $\delta L_1 = 0$, etc., dont le nombre est égal à celui des surfaces de séparation. En d'autres termes, il faudra combiner l'équation précédente avec celle-ci:

$$\delta . \Sigma \lambda \delta L = 0.$$

En développant ces deux équations, et en égalant séparément à zéro les coëfficiens des variations δx, δy, δz, on aura, relativément à la surface L, les équations

$$a \frac{ds}{dx} + a' \frac{ds'}{dx} + \lambda \frac{dL}{dx} = 0,$$
$$a \frac{ds}{dy} + a' \frac{ds'}{dy} + \lambda \frac{dL}{dy} = 0,$$
$$a \frac{ds}{dz} + a' \frac{ds'}{dz} + \lambda \frac{dL}{dz} = 0.$$

Cela posé; prenons pour axe des x la normale à la surface L, menée au point où elle est rencontrée par les droites s, s'. On sait par la théorie des surfaces courbes que l'on a, dans ce cas, $\frac{dL}{dy} = 0$, $\frac{dL}{dz} = 0$. Partant

$$a \frac{ds}{dy} + a' \frac{ds'}{dy} = 0, \quad a \frac{ds}{dz} + a' \frac{ds'}{dz} = 0.$$

D'un autre côté, en désignant par α, β, γ, α', β', γ', les cosinus des angles

que font les droites s, s', avec les axes des x, y, z; on doit avoir $\frac{ds}{dx}=\alpha$, $\frac{ds}{dy}=\beta$, etc., et

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, \quad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1;$$

et au moyen de ces valeurs on déduira succesivement des deux équations précédentes,

$$\alpha\beta=-\alpha'\beta', \quad \alpha\gamma=-\alpha'\gamma',$$
$$\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)=\alpha'^2(\beta'^2+\gamma'^2),$$
$$\alpha^2(1-\alpha^2)=\alpha'^2(1-\alpha'^2).$$

Mais $1-\alpha^2$ est le carré du sinus de l'angle que fait avec la normale à la surface L, le rayon imident s, et $1-\alpha'^2$, le carré du sinus de l'angle formé avec la même droite, par le rayon réfracté s'; d'où il suit que ces sinus sont dans un rapport constant. On voit donc, comment on peut déduire du principe de la moindre action une démonstration aussi générale que facile de la loi découverte par **Snellius et Descartes.**

33.

Solution générale d'un problème d'analyse combinatoire.

(Par Mr. *Ramus*, lecteur en math. de l'université de Copenhague.)

Dans le *Bulletin des sciences mathém. etc., févr.* 1829., Mr. Cournot a traité le problème suivant, dont celui de Mairan n'est que le cas le plus simple:

„Sur le nombre total des combinaisons qu'on peut faire avec un „nombre donné de pièces, déterminer séparément le nombre de celles „dont les exposans *), divisés par un certain module p, donnent pour reste „l'un des nombres 0, 1, 2, 3, ... $p-1$."

La solution de Mr. Cournot est fondée sur la nature des fonctions cherchées $y_x^{(0)}$, $y_x^{(1)}$, $y_x^{(2)}$, ... $y_x^{(p-1)}$ (x étant le nombre des pièces) de satisfaire à ces équations linéaires aux différences finies, l'accroissement de x étant 1,

$$\Delta^p y_x^{(0)} = y_x^{(0)} + 1,$$
$$\Delta^p y_x^{(r)} = y_x^{(r)},$$

r désignant l'un quelconque des nombres 1, 2, ... $p-1$. L'intégration complète en est facile, et les constantes arbitraires peuvent être déterminées pour chaque cas particulier. En posant successivement $p=2$, $=3$, $=4$, il trouve:

1) pour $p=2$, les formules bien connues:

$$y^{(0)} = 2^{x-1} - 1, \quad y^{(1)} = 2^{x-1};$$

2) pour $p=3$:

$$y^{(0)} = \tfrac{1}{3}2^x + \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{1}{3}\pi x - 1,$$
$$y^{(1)} = \tfrac{1}{3}2^x - \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{1}{3}\pi x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{1}{3}\pi x,$$
$$y^{(2)} = \tfrac{1}{3}2^x - \tfrac{1}{3}\cos\tfrac{1}{3}\pi x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{1}{3}\pi x;$$

3) pour $p=4$:

$$y^{(0)} = \tfrac{1}{4}2^x + \tfrac{1}{2}(\sqrt{2})^x\cos\tfrac{1}{4}\pi x - 1,$$
$$y^{(1)} = \tfrac{1}{4}2^x + \tfrac{1}{2}(\sqrt{2})^x\sin\tfrac{1}{4}\pi x,$$
$$y^{(2)} = \tfrac{1}{4}2^x - \tfrac{1}{2}(\sqrt{2})^x\cos\tfrac{1}{4}\pi x,$$
$$y^{(3)} = \tfrac{1}{4}2^x - \tfrac{1}{2}(\sqrt{2})^x\sin\tfrac{1}{4}\pi x.$$

*) Mr. *Cournot* appelle n l'exposant d'une combinaison n à n.

Enfin il ajoute: „il serait curieux de savoir si, en général, les termes „affectés de 2^x ont, dans toutes les fonctions y_x des coefficients égaux en„tr'eux et à $\frac{1}{p}$; et si lorsque le nombre p n'est pas premier, il y a tou„jours un certain nombre de termes qui disparaissent de la valeur de y_x."

Le but de cet article est d'offrir la solution générale du problème qu'on peut trouver sans difficulté en suivant une voie différente.

En effet la solution générale est contenue dans ces deux formules:

$$(A.)\quad y_x^{(0)} = \frac{2^x}{p} + \frac{2}{p}\,\Sigma\left(2\cos\frac{k\pi}{p}\right)^x \cos\frac{k\pi x}{p} - 1,$$

$$(B.)\quad y_x^{(r)} = \frac{2^x}{p} + \frac{2}{p}\,\Sigma\left(2\cos\frac{k\pi}{p}\right)^x \cos\frac{k\pi}{p}(x-2r);$$

la somme Σ étant prise inclusivement depuis $k=1$ jusqu'à $k=\frac{1}{2}p-1$, si p est un nombre pair, et jusqu'à $\frac{1}{2}(p-1)$ si p est impair.

Démonstration. Soit $f(y)$ la fonction génératrice de a_r en sorte que

$$1.\quad f(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_r y^r + \ldots.$$

Par la nature des racines $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^p$ de l'équation $m^p-1=0$ on a

$$2.\quad \alpha^{p-r}f(\alpha y)+\alpha^{2(p-r)}f(a^2y)\ldots+\alpha^{p(p-r)}f(\alpha^p y) = p(a_r y^r + a_{p+r}y^{p+r} + a_{2p+r}y^{2p+r} + \ldots).$$

Donc si l'on observe que $y_x^{(r)}$ n'est que la somme des coëfficients de y^r, y^{p+r}, y^{2p+r} etc. dans le développement de la fonction $(1+y)^x-1$, on trouve en faisant d'abord $f(y)=(1+y)^x-1$, puis $y=1$:

$$3.\quad y_x^{(r)} = \frac{1}{p}\left(\alpha^{p-r}(1+\alpha)^x + \alpha^{2(p-r)}(1+\alpha^2)^x + \ldots + \alpha^{p(p-r)}(1+\alpha^p)^x - \sum_{k=1}^{k=p}\alpha^{k(p-r)}\right).$$

En faisant $\alpha = \cos\frac{2\pi}{p} \pm \sqrt{(-1)}\sin\frac{2\pi}{p}$ on a

$$\alpha^{k(p-r)} = \cos\frac{2kr\pi}{p} \mp \sqrt{(-1)}\sin\frac{2kr\pi}{p},$$

$$(1+\alpha^k)^x = \left(2\cos\frac{k\pi}{p}\right)^x\left(\cos\frac{k\pi x}{p} \pm \sqrt{(-1)}\sin\frac{k\pi x}{p}\right),$$

$$\alpha^{k(p-r)}(1+\alpha^k)^x = \left(2\cos\frac{k\pi}{p}\right)^x\left(\cos\frac{k\pi}{p}(x-2r) \pm \sqrt{(-1)}\sin\frac{k\pi}{p}(x-2r)\right),$$

dont il faut prendre la double-somme depuis $k=1$ jusqu'à $k=\frac{1}{2}p-1$ ou $\frac{1}{2}(p-1)$ (selon que p est pair ou impair), ce qui fera nécessairement disparaître les imaginaires, puisque le résultat doit en être délivré. A cette somme si l'on ajoute le terme 2^x, donné par $k=0$, on a la valeur de la série

$$\alpha^{p-r}(1+\alpha)^x + \alpha^{2(p-r)}(1+\alpha^2)^x \ldots + \alpha^{p(p-r)}(1+\alpha^p)^x,$$

qu'il faut substituer dans l'équation (3.) pour avoir les deux équations (*A.*)

et (*B.*), dont la différence est due au terme $\sum_{k=1}^{k=p} \alpha^{k(p-r)}$, qui s'évanouit pour toutes les valeurs de r, excepté $r = 0$ qui le rend égal à p.

Le principe, dont on fait ici usage, est le même qui a été employé dans plusieurs autres circonstances, par exemple par Mr. Poisson dans sa belle théorie des séries périodiques (*Journal de l'école polyt.* 19me *cah. p.* 421.), par Mr. Abel dans son premier mémoire sur la résolubilité des équations algébriques (*tom.* 1er *p.* 72. *de ce journal*), par Mr. Jürgensen dans ses „remarques sur une certaine transformation des fonctions" (*tom.* 6me *p.* 197. *de ce journal*).

Copenhague 20. septembre 1833.

34.

Analytisch-geometrische Aphorismen.

(Fortsetzung von No. 15. im 3ten Hefte, No. 24. im 4ten Hefte X. Bandes, No. 3. im 1sten Hefte, No. 9. im 2ten Hefte und No. 19. im vorigen Hefte dieses Bandes.)

(Von dem Herrn Professor *Plücker* zu Berlin.)

VI.

Über die Steinersche Verallgemeinerung der Malfattischen Aufgabe.

1. Bevor ich zur Construction der genannten Aufgabe:

„Wenn irgend drei Kreise gegeben sind, drei neue solche Kreise zu beschreiben, von denen jeder die beiden übrigen und zwei der drei gegebenen berührt,"

übergehe, mufs ich den folgenden Satz vorausschicken.

Wenn irgend zwei gegebene Kreise von irgend einem dritten Kreise aufserhalb berührt werden, und man von irgend einem Puncte ihrer gemeinschaftlichen Chorde zwei Tangenten an dieselben zieht, so kann man einen neuen Kreis beschreiben, welcher den dritten Kreis in einem seiner beiden Durchschnittspuncte mit der gemeinschaftlichen Chorde und zu gleicher Zeit jene beiden Tangenten berührt.

Ich beabsichtige bei der Aufstellung dieses Satzes keinesweges Allgemeinheit, und in der Fig. 1. (Taf. V.) beziehe ich mich, mit blofser Rücksicht auf das Folgende, auch wiederum nur auf den besondern Fall, dafs die beiden gegebenen Kreise sich berühren, und zwar aufserhalb. Hiernach seien C und C' die beiden gegebenen, sich aufserhalb berührenden Kreise; γ sei irgend-ein dritter Kreis, der beide aufserhalb berührt. ON sei die gemeinschaftliche Chorde (innere gemeinschaftliche Tangente), PQ eine äufsere gemeinschaftliche Tangente der beiden gegebenen Kreise C und C'. Von irgend einem Puncte, O, auf der gemeinschaftlichen Chorde, ON, dieser Kreise, seien an dieselben die beiden Tangenten OP und OQ gelegt. Dies vorausgesetzt, beruht der Beweis des vorstehenden Satzes darauf, zu zeigen, dafs es einen solchen Kreis giebt, der den Kreis γ in

N' (einem der beiden Durchschnittspunkte dieses Kreises und der gemeinschaftlichen Chorde ON), und überdies OP und OQ berührt.

Alle beliebigen Kreise, welche zwei gegebene, C und C', aufserhalb berühren, werden von der gemeinschaftlichen Chorde dieser beiden gegebenen unter constanten Winkeln geschnitten, und zwar unter denselben Winkeln, als die äufsern gemeinschaftlichen Tangenten der beiden letztgenannten Kreise. Dies ergiebt sich sogleich, und ist implicite schon in der 195sten Nummer des ersten Bandes meiner „Entwickelungen" enthalten. Die Tangenten eines solchen Berührungs-Kreises γ, in dessen Durchschnittspuncten mit der gemeinschaftlichen innern Tangente der beiden gegebenen Kreise, sind also den äufsern gemeinschaftlichen Tangenten dieser Kreise parallel. So ist $Q'P'$, die Tangente in N', der gemeinschaftlichen Tangente QP parallel. Nun berührt aber ferner, nach einem Satze des IV. §. dieser Aphorismen, derjenige Kreis, welcher die beiden geraden Linien OP und OQ berührt, und durch N, den Durchschnittspunct der gemeinschaftlichen Chorde ON und der gemeinschaftlichen Tangente PQ, geht, zugleich auch diese Tangente in dem letztgenannten Puncte N. Es berührt also auch ein Kreis, welcher dieselben beiden geraden Linien OP und OQ berührt, und durch N', einen Punct von ON, geht, die gerade Linie $P'Q'$, die durch N' geht, und mit OP parallel ist, und folglich auch den Kreis γ in N'.

2. Wir wollen nun (Fig. 2.) von den beiden sich aufserhalb berührenden Kreisen a und c, als gegeben, ausgehen, und irgend einen dritten Kreis B beschreiben, der beide aufserhalb berührt. Dieser Kreis werde in B' von NB', der gemeinschaftlichen Chorde (Tangente) der Kreise a und c, geschnitten. Man beschreibe ferner einen beliebigen Kreis β, der den Kreis B in B' aufserhalb berührt. Alsdann schneiden sich, nach dem vorausgeschickten Satze, zwei gemeinschaftliche äufsere Tangenten der Kreis-Paare a und β, c und β, nemlich die beiden geraden Linien $C'N$ und $A'N$, in irgend einem Puncte N von NB', der gemeinschaftlichen Chorde von a und c. Wir können hiernach ferner einen Kreis b beschreiben, welcher die beiden Kreise a und c, bezüglich auf NC' und NA', berührt. Wir wollen endlich zwei neue Kreise, C und A, mit beliebigen Radien beschreiben, von welchen der erste die beiden Kreise b und a, und der zweite die Kreise b und c aufserhalb berührt. Nach dem an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Satze, können wir

hiernach endlich noch zwei solche Kreise beschreiben, von welchen der eine, γ, den Kreis C in C', einem Durchschnitte mit NC', und überdies die beiden geraden Linien NA' und NB', und von welchen der andere, α, den Kreis A in A', einem Durchschnittspuncte mit NA', und überdies die beiden geraden Linien NB' und NC' berührt.

Auf diese Weise sind wir zu einer Construction gekommen, die derjenigen des IV. Paragraphen (Fig. 6.) vollkommen analog ist. Es sind blofs die drei Kreise B, A und C an die Stelle der drei geraden Linien BC, AC AB getreten. In beiden Fällen schneiden sich drei innere gemeinschaftliche Tangenten der Kreise α, β und γ, wenn wir diese Kreise paarweise zusammenstellen, in einem und demselben Puncte, in N, und hieraus folgt in der letzten Construction, wie in der ersten, dafs die drei übrigen innern gemeinschaftlichen Tangenten derselben Kreise sich ebenfalls in einem und demselben Puncte, in M, schneiden. Es kommt also im vorliegenden Falle wiederum nur darauf an, die drei in M sich schneidenden geraden Linien zu kennen, um, wenn die drei Kreise A, B und C gegeben sind, zunächst die Kreise α, β, γ, und dann die verlangten Kreise a, b und c zu construiren.

3. Wenn die drei gegebenen Kreise A, B und C einander gleich sind, so wird man durch eine etwas ermüdende Eliminations-Rechnung — die der in einer Note dem IV. Paragraphen beigefügten ähnlich ist, und die ich hier nicht unternehme, weil ich glaube, dafs sie sich durch eine einfache allgemeine Betrachtung wird ersetzen lassen — finden, dafs für diesen Fall die drei in M sich schneidenden geraden Linien die gemeinschaftlichen Chorden je zweier der drei gegebenen Kreise sind.

Für den vorliegenden besondern Fall ergiebt sich hiernach folgende Construction:

I. Man beschreibe die drei gemeinschaftlichen Chorden der drei gegebenen gleichen Kreise A, B und C, die sich in irgend einem Puncte M alle drei schneiden.

II. Man beschreibe drei neue Kreise α, β, γ, von welchen jeder einen der drei gegebenen aufserhalb berührt, und aufserdem die beiden gemeinschaftlichen Chorden des letztgenannten, und jedes der beiden übrigen gegebenen.

III. Die drei gemeinschaftlichen Chorden der drei gegebenen Kreise sind alsdann innere gemeinschaftliche Tangenten der drei Kreise α, β und γ. Man ziehe hiernach die drei übrigen innern gemeinschaftlichen Tangenten

dieser Kreise. Es werden sich dieselben alsdann in einem und demselben Puncte, in N, schneiden.

IV. Jeder der gesuchten Kreise a, b und c berührt alsdann zwei der in N sich schneidenden geraden Linien, und ist daher leicht zu construiren.

Vereinfachungen der vorstehenden Construction bieten sich von selbst dar, wenn man berücksichtigt, dafs die in N sich schneidenden geraden Linien durch die Berührungspuncte A', B', und C' der drei Kreis-Paare A und α, B und β, C und γ gehen.

4. Nach der letzten Nummer des vorigen Paragraphen erhalten wir aus der vorstehenden Construction des speciellen Falles unserer Aufgabe die Construction der allgemeinen Aufgabe:

Wenn irgend drei beliebige Kreise gegeben sind, drei solche neue Kreise zu beschreiben, von welchen jeder die beiden übrigen und zwei der drei gegebenen berührt.

I. Man beschreibe aus den äufsern homologen Puncten je zweier der drei gegebenen Kreise A, B und C, als Mittelpuncten, drei neue Kreise, welche mit den bezüglichen gegebenen eine gemeinschaftliche Chorde haben; oder, mit andern Worten, man halbire die Winkel, welche die drei gegebenen Kreise paarweise mit einander bilden, durch drei neue Kreise. Diese drei neuen Kreise, die wir durch (AB), (AC) und (BC) unterscheiden wollen, schneiden sich bekanntlich in denselben beiden Puncten (Aphorism. §. II.). Diese Puncte seien P und M.

II. Man beschreibe einen neuen Kreis α, welcher die Kreise A, (AB) und (AC), einen Kreis β, welcher B, (AB) und (BC), und einen Kreis γ, welcher C, (AC) und (BC) so berührt, dafs die Berührung von α und β mit (AB), von α und γ mit (AC) und von β und γ mit (BC) eine ungleichartige ist.

III. Man beschreibe drei neue Kreise, welche alle drei durch einen der beiden Puncte P oder M, etwa durch den erstern derselben, gehen, und die respective die Kreise α und β, α und γ, β und γ ungleichartig berühren. Diese Kreise, welche wir durch $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\gamma)$ bezeichnen wollen, schneiden sich alsdann noch in einem und demselben zweiten Punct. Dieser Punct sei N.

IV. Von den verlangten drei Kreisen berührt alsdann der erste, a, die vier Kreise B, C $(\alpha\beta)$ und $(\alpha\gamma)$, der zweite, b, die Kreise A, C $(\alpha\beta)$ und $(\beta\gamma)$, und der dritte, c, die Kreise A, B $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\gamma)$.

Ich füge hier keine Figur hinzu, weil eine solche sich schon in dem ersten Bande dieses Journals verfindet, und man auch, in Ermange-

lung dieses Bandes, leicht an der Figur, welche zu der vorigen Nummer gehört, sich orientiren kann, indem man den Punct, den wir P genannt haben, sich hier unendlich weit entfernt denkt.

Im Jahre 1826 hat Herr Steiner die vorliegende Aufgabe, die man damals, nach den Schwierigkeiten, welche ausgezeichnete Geometer bei der Behandlung der blofsen Malfattischen Aufgabe gefunden hatten, für unüberwindlich zu betrachten geneigt sein mochte, und, jedoch ohne Spur irgend einer Rechtfertigung, eine Construction hinzugefügt, die im Wesentlichen mit der vorstehenden übereinstimmt *). Bald nachher wurde die Steinersche Construction auch in den zu Montpellier erscheinenden Annalen zur Rechtfertigung vorgelegt; aber soviel ich weifs, ist durchaus nichts weiter erfolgt, und die Richtigkeit jener Construction bis jetzt problematisch geblieben. Was bei der Aussage der eben genannten Construction befremden mufs, ist, dafs mit keiner Sylbe angedeutet ist, dafs die oben durch (AB), (AC), (BC), $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$ und $(\beta\gamma)$ bezeichneten Kreise alle sechs (und nicht blofs die drei ersten) durch einen und denselben Punct gehen; denn eben dadurch ist doch die Construction der allgemeinen Aufgabe mit der Construction der Malfattischen verknüpft.

5. Die Construction der Steinerschen Verallgemeinerung der Malfattischen Aufgabe, die wir in der vorigen Nummer aufgestellt haben, ist wahrscheinlich noch nicht die einfachste. Man kann vielleicht unmittelbar (Fig. 2.), wenn wir von den drei Kreisen A, B und C ausgehen, auf leichte Weise die drei in M sich schneidenden geraden Linien construiren.

6. Herr Steiner erweitert die Aufgabe, welche den Gegenstand dieses Paragraphen bildet, indem er dieselbe auf die Kugel-Oberfläche und auf beliebige Oberflächen zweiter Ordnung überträgt. Dies geschieht unmittelbar durch Hülfe eines Übertragungs-Principes, das ich schon früher zur Anwendung gebracht hatte, und das mit der Aufgabe selbst in keiner Beziehung steht. Interessant wäre folgende Aufgabe:

In die Winkelpuncte eines Polygons von n Seiten n Kreise so zu beschreiben, dafs jeder Kreis den vorhergehenden und den nachfolgenden berührt.

Und dann könnte man an die Stelle der n Seiten, von welchen das Polygon gebildet wird, n beliebige Kreise setzen.

Bonn, Ende October 1831.

---

*) S. dieses Journales I. Band S. 180.

35.

Beitrag zur Theorie der Facultäten.

(Von Herrn Dr. *A. Müller*, Universitäts-Bibliothecar in Heidelberg.)

Die Facultäten spielen in den späteren Theilen der Analysis eine bedeutende Rolle, und es sind unzweideutige Anzeigen vorhanden, dafs sie der Schlüssel zur Lösung vieler sehr schwieriger Aufgaben sein mögen. Noch sind sie aber nicht so durch und durch bearbeitet, wie ihre Anwendung es erfordert; ja man kann sagen, dafs die Untersuchung derselben in manchen höchst wichtigen Puncten kaum etwas über den Anfang hinaus ist. Aus diesem Grunde können Versuche der Erweiterung dieses Gegenstandes nicht unnütz, und Mittheilungen solcher Versuche nur wünschenswerth sein. Der Gegenstand ist zudem gar nicht leicht: deswegen müssen verschiedene Personen Hand an's Werk legen, und durch gegenseitige Unterstützung zu erringen suchen, was der Einzelne nicht erlangen kann. Diese Betrachtungen haben mich bestimmt, einige Sätze, auf die ich gekommen bin, der öffentlichen Mittheilung nicht unwerth zu halten.

§. 1.

Wenn die Facultät a^{nlr} in eine Reihe nach den Potenzen von a und r entwickelt wird, so ergiebt sich bekanntlich folgender Ausdruck:

$$a^{nlr} = a^n + \alpha(n,1).a^{n-1}.r^1 + \alpha(n,2).a^{n-2}.r^2 + \ldots.$$

Die Coefficienten der Glieder dieser Reihe, welche durch $\alpha(n,1)$, $\alpha(n,2)$, ... bezeichnet sind, können für positive und für negative ganze Werthe von n vollständig angegeben werden. Wenn h eine ganze Zahl bedeutet, so ist bekanntlich:

$$1. \quad \alpha(h,m) = (1,2,\ldots.,h-1)^{(m)}$$

und

$$2. \quad \alpha(-h,m) = [1,2,\ldots.,h]^{(m)},$$

wo $(1,2,\ldots.,h-1)^{(m)}$ die geordneten Verbindungen ohne Wiederholung und $[1,2,\ldots.,h]^{(m)}$ die geordneten Verbindungen mit Wiederholung zu m Elementen aus den in den Klammern befindlichen Gröfsen anzeigen.

Aufser diesen beiden Gesetzen kennt man für den Fall, wo in $\alpha(n,m)$ positive und negative Werthe von n nicht unterschieden werden, noch ein Bildungsgesetz. Dieses ist aber so verwickelt, dafs man sogar für

den Zweck der wirklichen Berechnung ein anderes wünschen mufs; als Grundlage oder Hülfsmittel zu anderweitigen Untersuchungen ist es völlig unbrauchbar. Man hat deshalb ein anderes allgemeines Bildungsgesetz dadurch zu bestimmen gesucht, dafs man die Werthe der Coefficienten $\alpha(n, 1)$, $\alpha(n, 2)$, ... nach den Potenzen von n ordnet, oder

3. $\alpha(n,m) = \beta(m,1).n^1 + \beta(m,2).n^2 + ... + \beta(m,2m).n^{2m}$,

wo n jede Zahl sein kann, annimmt, und die Bestimmung der Coefficienten $\beta(m,1)$, ... als Gegenstand der Aufgabe betrachtet. Dafs die höchste Potenz in der vorstehenden Reihe wirklich n^{2m} ist, darf hier als wahr angenommen werden. Mit der Aufsuchung des Bildungsgesetzes für die Coefficienten $\beta(m, 1)$, ... hat Schweins in seiner Analysis §. 90. bis §. 92. den Anfang gemacht, jedoch nur den ersten Coefficienten $\beta(m, 1)$ auf eine Weise, für die übrigen aber zwei allgemeine zurücklaufende Bildungsweisen angegeben. Aufser diesen fand er l. c. pag. 215. und 216. zwei besondere Bildungsgesetze für $\beta(2m+1, 2)$ und $\beta(2m+2, 2)$. Mehr ist, so viel ich weifs, in dieser Sache nicht gethan.

§. 2.

Die erwähnten Coefficienten $\beta(m, 1)$, ... spielen durchweg eine merkwürdige Rolle, und es ist von der höchsten Wichtigkeit, dafs wir zu einer vollständigen Kenntnifs ihrer Eigenthümlichkeiten gelangen. Hierzu giebt es mehrere Mittel, die ich der Reihe nach anführen und benutzen werde. Zunächst haben wir die Gesetze (2.) und (3.), und aus diesen lassen sich interessante Folgen ableiten.

Man setze in (3.) $n = -h$, wo h eine ganze Zahl ist, und verbinde sodann (2.) mit (3.), so folgt:

4. $\beta(m,1).h^1 - \beta(m,2).h^2 + ... - \beta(m,2m).h^{2m} = -[1,2,...., h]^{(m)}$.

Hieraus kann man sofort eine unabhängige Bildungsweise der Coefficienten $\beta(m, 1)$, ... herleiten. Nach §. 209. der Analysis von Schweins ist nemlich

$$[1, 2, ..., h]^{(m)} = \Sigma_s \, \int(m, s+1) \cdot \frac{h^{m+s+1|1}}{1^{m+s+1|1}}, \qquad s = 0, 1, ... m-1.$$

wo die Coefficienten $\int(m, 1)$, $\int(m, 2)$, ... nur m, und nicht h, enthalten, und nach folgendem zurücklaufenden Gesetze gebildet werden:

5. $\int(m, p) = -(m+p-1).\int(m-1, p) + (m+p-1).\int(m-1, p-1)$.

Führt man nun in der vorangehenden Gleichung

$$h^{m+s+1|1} = \Sigma_r (1, 2, 3, \ldots, m+s)^{(m+s-r)} . h^{r+1}$$
$$r = 0, 1, \ldots, m+s$$

ein, ordnet das Resultat nach den steigenden Potenzen von h, so sind die Coefficienten der Glieder dieser Reihe nach (4.) die gesuchten Gröfsen $\beta(m, 1)$, $\beta(m, 2)$, ... Durch Ausführung der angedeuteten Geschäfte gelangt man zu folgendem Bildungsgesetze:

$$6.\quad \beta(m, q+1) = (-)^{q+1} \left\{ \frac{1}{1^{m+1|1}} \cdot \int(m, 1) . (1, 2, \ldots, m)^{(m-q)} \right.$$
$$+ \frac{1}{1^{m+2|1}} \cdot \int(m, 2) . (1, 2, \ldots, m+1)^{(m-q+1)}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + \frac{1}{1^{2m|1}} \cdot \int(m, m) . (1, 2, \ldots, 2m-1)^{(2m-q-1)} \right\}.$$

Da nach dem Bildungsgesetz in (5.) die Gröfsen $\int(m, 1)$, ... gefunden werden können, so giebt die Gleichung (6.) die unabhängige Bildung der Gröfsen $\beta(m, 1)$, ... vollständig an. Die einzige, noch zu beseitigende, Schwierigkeit ist nur diese: aus der zurücklaufenden Bestimmung in (5.) eine unabhängige Bildung abzuleiten. Für diesen Zweck deducire ich aus (5.) folgendes Gesetz:

$$7.\quad \int(m, p) = \Sigma_s (-)^s (m+p-1)^{s+1|-1} . \int(m-s-1, p-1)$$
$$s = 0, 1, \ldots . m+p,$$

und hieraus geradezu:

$$8.\quad \int(m, 1) = (-)^{m-1} m^{m|-1}.$$

Zur Abkürzung werde

$$S_q = s_1 + s_2 + \ldots . + s_q$$

gesetzt, so hat man nach (7.) folgende Gleichungen:

$$\int(m, p) = \Sigma_{s_1} (-)^{s_1} (m+p-1)^{s_1+1|-1} . \int(m-s_1-1, p-1),$$
$$\int(m-s_1-1, p-1) = \Sigma_{s_2} (-)^{s_2} (m+p-3-S_1)^{s_2+1|-1} . \int(m-S_2-2, p-2),$$
$$\int(m-S_2-2, p-2) = \Sigma_{s_3} (-)^{s_3} (m+p-5-S_2)^{s_3+1|-1} . \int(m-S_3-3, p-3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\int(m-S_{p-2}-p+2, 2)$$
$$= \Sigma_{s_{p-1}} (-)^{s_{p-1}} (m-p+3-S_{p-2})^{s_{p-1}+1|-1} . \int(m-S_{p-1}-p+1, 1),$$

und nach (8.)

$$\int(m-S_{p-1}-p+1, 1) = (-)^{m-S_{p-1}-p} (m-p+1-S_{p-1})^{m-p+1-S_{p-1}|-1};$$

daher, wenn man diese Gleichungen mit einander verbindet:

9. $$\begin{aligned}\varphi(m,p) = (-)^{m-p}\Sigma_{s_1}(m+p-1)^{s_1+1l-1}x \\ x\,\Sigma_{s_2}(m+p-3-S_1)^{s_2+1l-1}x \\ x\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x\,\Sigma_{s_{p-1}}(m-p+3-S_{p-2})^{s_{p-1}+1l-1}x(m-p+1-S_{p-1})^{m-p+1-S_{p-1}l-1},\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}s_1 &= 0, 1, \ldots, m-p, \\ s_2 &= 0, 1, \ldots, m-p-S_1, \\ s_3 &= 0, 1, \ldots, m-p-S_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_{p-1} &= 0, 1, \ldots, m-p-S_{p-2}.\end{aligned}$$

Durch diese unabhängige Bildung (9.) wäre nun die vorgelegte Aufgabe vollständig gelöst. Zwar ist die für $\varphi(m,p)$ gefundene Vorschrift sehr weitläufig, und es wollte mir nicht gelingen, den verwickelten Calcul auf einen einfachen bestimmten Ausdruck zu reduciren. Vielleicht ist aber ein Anderer glücklicher. Auf jeden Fall verdient diese Entwickelung Aufmerksamkeit, indem sie auch zur Erweiterung der Summirung der Reihen einen guten Beitrag veranlassen kann.

§. 3.

Ich wende mich nun zu andern Hülfsmitteln, die bei der Bestimmung der Gröfsen $\beta(m,1)$, $\beta(m,2)$, ... in Anwendung kommen können. Als erstes, bis jetzt noch nicht benutztes Mittel bietet sich die von Schweins gefundene Gleichung:

10. $$\begin{aligned}(-)^m n^m = \alpha(n,m) &- \alpha(n,m-1).\alpha(-n,1) \\ &+ \alpha(n,m-2).\alpha(-n,2) \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(-)^m\ 1\,x\,\alpha(-n,m)\end{aligned}$$

dar. Zwar hat Schweins a. a. O. schon gezeigt, was man aus dieser Gleichung in den Fällen, wo $m=1$, $m=2$, $m=3$ und $m=4$ ist, für die Coefficienten $\beta(m,1)$, ... folgern kann; die allgemeine Entwickelung aber hat er nicht vorgenommen. Da nun diese mehrere interessante Folgen giebt, so will ich sie hier vornehmen.

Das allgemeine Glied zur Rechten in der Gleichung (10.) ist

$$(-)^p\,\alpha(n,m-p).\alpha(-n,p);$$

aber nach (3.)

$$\alpha(n,m-p) = \beta(m-p,1).n^1 + \beta(m-p,2).n^2 + \ldots + \beta(m-p,2m-2p).n^{2m-2p},$$
$$\alpha(-n,p) = -\beta(p,1).n^1 + \beta(p,2).n^2 - \ldots + \ldots + \beta(p,2p).n^{2p},$$

daher, wenn man zur Abkürzung

$$11.\quad B(m,p,q+2) = -\beta(m-p,q+1).\beta(p,1) + \beta(m-p,q).\beta(p,2) - \beta(m-p,q-1).\beta(p,3) + \ldots\ldots\ldots\ldots (-)^{q+1}\beta(m-p,1).\beta(p,q+1),$$

setzt:

$$(-)^p\alpha(n,m-p).\alpha(-n,p) = (-)^p\{B(m,p,2).n^2 + B(m,p,3).n^3 + \ldots\ldots + B(m,p,2m).n^{2m}\}.$$

Substituirt man nun diese Entwickelung in der Gleichung (10.), setzt ferner noch:

$$\alpha(n,m) = \beta(m,1).n^1+\beta(m,2).n^2+\ldots\ldots+\beta(m,2m).n^{2m},$$
$$\alpha(-n,m) = -\beta(m,1).n^1+\beta(m,2).n^2-\ldots.+\ldots.+\beta(m,2m).n^{2m},$$

und ordnet das Resultat nach den steigenden Potenzen von n, so wird der Coefficient von n^{q+1}

$$= (1+(-1)^{m+q+1}).\beta(m,q+1) - B(m,1,q+1) + B(m,2,q+1) - B(m,3,q+1) + \ldots\ldots\ldots (-)^{m-1}B(m,m-1,q+1).$$

Weil aber in der Gleichung (10.) zur Linken nur das einzige Glied $(-1)^m n^m$ vorkommt, so müssen zur Rechten die Coefficienten von n^1, n^2, ... n^{m-1}, n^{m+1}, ... verschwinden, der Coefficient von n^m aber $=(-1)^m$ sein. Man hat demnach folgende drei Gesetze:

$$12.\quad 2.\beta(m,m) = (-1)^m + \Sigma_s(-1)^s B(m,s+1,m),$$
$$13.\quad \{1+(-1)^{q+1}\}.\beta(m,m-q+1) = \Sigma_s(-)^s B(m,s+1,m-q+1),$$
$$14.\quad \{1+(-1)^{q+1}\}.\beta(m,m+q+1) = \Sigma_s(-)^s B(m,s+1,m+q+1),$$

wo

$$s = 0, 1, \ldots. m-2.$$

§. 4.

Diese drei Gleichungen enthalten im Allgemeinen zurücklaufende Bildungsweisen für die Gröfsen $\beta(m,2)$, $\beta(m,3)$, ...; die Gröfse $\beta(m,1)$ kann aber hiernach nicht gefunden werden. Setzt man nämlich in (13.) $q=m$, so folgt: $\{1+(-1)^{m+1}\}.\beta(m,1)=0.$

Weil nun der Ausdruck $(1+(-1)^{m+1})$ für ein gerades m verschwindet

und für ein ungerades $=2$ wird, so hat man die Folge:

15. $\beta(2m+1, 1) = 0.$

Dieser Satz ist schon bekannt. Der besondere Fall $\beta(1, 1)$ ist aber hierin nicht begriffen, sondern mufs aus (12.) abgeleitet werden. Man erhält

16. $\beta(1, 1) = -\frac{1}{2}.$

Die Gleichungen (13.) und (14.) scheinen vieles zu umfassen, ihr Gebrauch ist aber in der That sehr beschränkt, und man kann nur in den Fällen, wo q eine ungerade Zahl ist, Schlüsse daraus ziehen. Übrigens enthalten die drei Gleichungen (12.), (13.) und (14.) viele überflüssige Ausdrücke, deren Reduction aber nur dann angeht, wenn man die Fälle unterscheidet, in welchen m eine gerade Zahl bedeutet. Nemlich es ist ganz allgemein:

17. $(-1)^{m-s-2}.B(m, m-s-1, m-q+1) = (-1)^{q+1}.(-1)^{s}.B(m, s+1, m-q+1),$

also, wenn man $q=1$ setzt:

18. $(-1)^{m-s-2}.B(m, m-s-1, m) = (-1)^{s}.B(m, s+1, m),$

und, wenn man $2q+1$ statt q einführt:

19. $(-1)^{m-s-2}B(m, m-s-1, m-2q) = (-1)^{s}B(m, s+1, m-2q),$

und endlich, wenn man $-2q-1$ statt q einführt:

20. $(-1)^{m-s-2}.B(m, m-s-1, m+2q+2) = (-1)^{s}.B(m, s+1, m+2q+2).$

In der Gleichung (12.) setze man zuerst $2m+1$, und dann auch $2m+2$ statt m, und mache in beiden Fällen von der Gleichung (18.) Gebrauch, so erhält man:

21. $\beta(2m+1, 2m+1) = -\frac{1}{2} + \Sigma_s(-)^{s}B(2m+1, s+1, 2m+1),$

22. $\beta(2m+2, 2m+2) =$

$+\frac{1}{2} + \Sigma_s(-)^{s}B(2m+2, s+1, 2m+2) + (-1)^{m}.\frac{1}{2}(B(2m+2, m+1, 2m+2),$

wo $s = 0, 1, 2 \ldots, m-1.$

In (13.) setze man $2q+1$ statt q, führe alsdann zuerst $2m+1$, und dann $2m+2$ statt m ein, und mache in beiden Fällen von (19.) Gebrauch, so erhält man

$\beta(2m+1, 2m-2q+1) = \Sigma_s(-)^{s}B(2m+1, s+1, 2m-2q+1),$

$\beta(2m+2, 2m-2q+2) =$

$\Sigma_s(-)^{s}B(2m+2, s+1, 2m-2q+2) + (-1)^{m}.\frac{1}{2}.B(2m+2, m+1, 2m-2q+2),$

und hieraus, wenn man $q = m-p$ setzt:

23. $\beta(2m+1, 2p+1) = \Sigma_s(-)^{s}B(2m+1, s+1, 2p+1),$

24. $\beta(2m+2, 2p+2) =$

$\Sigma_s(-)^{s}B(2m+2, s+1, 2p+2) + (-1)^{m}.\frac{1}{2}.B(2m+2, m+1, 2p+2),$

wo

$$s = 0, 1, \ldots . m-1.$$

Auf gleiche Weise erhält man aus (14.) und (20.) zwei Gleichungen, welche übrigens schon in (23.) und (24.) enthalten sind, und aus diesen entspringen, wenn man $p = m + q$ einführt.

Für $p = 0$ erhält man z. B. aus (24.), wenn man zuerst $2m$ und dann $2m+1$ statt m setzt, und auf (15.) Rücksicht nimmt:

$$25.\quad \beta(4m+2, 2)$$
$$= \beta(4m, 1).\beta(2, 1) + \beta(4m-2, 1).\beta(4, 1) + \ldots . + \beta(2m+2, 1).\beta(2m, 1),$$

$$26.\quad \beta(4m+4, 2) = \beta(4m+2, 1).\beta(2, 1) + \beta(4, m, 1).\beta(4, 1) + \ldots .$$
$$\ldots . + \beta(2m+4, 1).\beta(2m, 1) + \tfrac{1}{2}.\beta(2m+2, 1).\beta(2m+2, 1);$$

für den besondern Fall $\beta(2, 2)$, der in (25.) nicht begriffen ist, erhält man aus (22.)

$$\beta(2, 2) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}.\beta(1, 1).\beta(1, 1),$$

oder

$$27.\quad \beta(2, 2) = \tfrac{3}{8}.$$

§. 5.

Ich komme zu einer andern Gleichung, welche für unsern Zweck mit grofsem Vortheil angewendet werden kann, bis jetzt aber in dieser Beziehung noch nicht berücksichtigt worden ist. Sie ist folgende:

$$28.\quad m.\alpha(n, m) = \frac{n^{m+1|-1}}{1^{m+1|1}} + \frac{(n-1)^{m|-1}}{1^{m|1}}.\alpha(n, 1)$$
$$+ \frac{(n-2)^{m-1|-1}}{1^{m-1|1}}.\alpha(n, 2)$$
$$+ \ldots . \ldots . \ldots .$$
$$+ \frac{(n-m+1)^{2|-1}}{1^{2|1}}.\alpha(n, m-1).$$

Um aus dieser Gleichung in Rücksicht der Gröfsen $\beta(m, 1), \ldots .$ Schlüsse ziehen zu können, mufs das allgemeine Glied zur Rechten, nemlich

$$\frac{(n-p-1)^{m-p|-1}}{1^{m-p|1}}.\alpha(n, p+1),$$

in eine Reihe nach den Potenzen von n entwickelt werden. Dies geschieht dadurch, dafs man

$$\alpha(n, p+1) = \beta(p+1, 1).n^1 + \beta(p+1, 2).n^2 + \ldots . + \beta(p+1, 2p+2).n^{2p+2},$$

und

$$(n-p-1)^{m-p|-1} = (-1)^{m-p}.\{(p+1, p+2, \ldots ., m)^{(m-p)}.n^0$$
$$-(p+1, p+2, \ldots ., m)^{(m-p-1)}.n^1$$
$$+ \ldots . \ldots . \ldots .$$
$$(-)^{m-p}(p+1, p+2, \ldots ., m)^{(0)}.n^{m-p}\},$$

einführt. Man erhält, wenn man zur Abkürzung

$$29.\quad D(p+1,m,h+1)=(p+1,p+2,\ldots,m)^{(m-p)}.\beta(p+1,h+1)$$
$$-(p+1,p+2,\ldots,m)^{(m-p-1)}.\beta(p+1,h)$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^h(p+1,p+2,\ldots,m)^{(m-p-h)}.\beta(p+1,1),$$

setzt:

$$\frac{(n-p-1)^{m-p|-1}}{1^{m-p|1}}.\alpha(n,p+1)=\frac{(-1)^{m-p}}{1^{m-p|1}}\{D(p+1,m,1).n^1$$
$$+D(p+1,m,2).n^2$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+D(p+1,m,m+p+2).n^{m+p+2}\}.$$

Hierin setze man $p=0,1,2,\ldots,m-2$, addire alle Reihen, und füge dazu noch

$$\frac{n^{m+1|-1}}{1^{m+1|1}}=\frac{(-1)^m}{1^{m+1|1}}.\{(1,2,\ldots,m)^{(m)}.n^1$$
$$-(1,2,\ldots,m)^{(m-1)}.n^2$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^m(1,2,\ldots,m)^{(0)}.n^{m+1}\},$$

und ordne das Ganze nach den steigenden Potenzen von n. Der Coefficient n^{q+1} ist alsdann

$$=\frac{(-1)^{m+q}}{1^{m+1|1}}.(1,2,\ldots,m)^{(m-q)}+\frac{1}{1^{2|1}}.D(m-1,m,q+1)$$
$$-\frac{1}{1^{3|1}}.D(m-2,m,q+1)$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^m\frac{1}{1^{m|1}}.D(1,m,q+1).$$

Die auf diese Weise entstandene Reihe ist aber nach (28.)

$$=m.\alpha(n,m),$$
$$=m.\{\beta(m,1).n^1+\beta(m,2).n^2+\ldots.+\beta(m,2m).n^{2m}\};$$

daher hat man den Satz:

$$30.\quad m.\beta(m,q+1)=\frac{(-1)^{m+q}}{1^{m+1|1}}.(1,2,\ldots.m)^{(m-q)}+\frac{1}{1^{2|1}}.D(m-1,m,q+1)$$
$$-\frac{1}{1^{3|1}}.D(m-2,m,q+1)$$
$$+\frac{1}{1^{4|1}}.D(m-3,m,q+1)$$
$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(-)^m\frac{1}{1^{m|1}}.D(1,m,q+1).$$

Dieses Gesetz ist eines der wichtigsten von denen, die bis jetzt für die Bildung der Gröfsen $\beta(m,1)$, $\beta(m,2)$, ... gefunden sind, und unterscheidet sich wesentlich von allen. Die Bildung von $\beta(m,q+1)$ ist hier zurückgeführt auf die Gröfsen

$$\begin{array}{l}\beta(1,1),\ \beta(1,2),\\ \beta(2,1),\ \beta(2,2),\ \beta(2,3),\ \beta(2,4),\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \beta(m-1,1),\ \beta(m-1,2),\ \ldots\ldots\ldots\ \beta(m-1,q+1).\end{array}$$

Die Art der Zurückführung ist zwar etwas zusammengesetzt; wir können aber ein anderes Bildungsgesetz daraus ableiten, dessen Charakter zwar ebenfalls zurücklaufend ist, welches jedoch unmittelbar zur unabhängigen Bildungsweise leitet.

§. 6.

Setzt man in (30.) die Werthe von $D(1,m,q+1)$, $D(2,m,q+1)$, ... aus (29.), so kann man das Resultat der Einführung in $(q+1)$ Abtheilungen gruppiren, und zwar so, dafs in der ersten Abtheilung nur die Coefficienten $\beta(1,1)$, $\beta(2,1)$, $\beta(3,1)$, ... in der zweiten die Coefficienten $\beta(1,2)$, $\beta(2,2)$, $\beta(3,2)$, ... u. s. w. vorkommen. Bezeichnet man die $(p+1)$te Abtheilung durch $(-1)^{q-p}.B_{p+1}^{(m,q)}$, so ist:

$$\begin{aligned}31.\quad B_{p+1}^{(m,q)} &= \frac{1}{1^{2|1}}.(m-1,m)^{(p+2-q)}.\beta(m-1,p+1)\\ &\quad-\frac{1}{1^{3|1}}.(m-2,m-1,m)^{(p+3-q)}.\beta(m-2,p+1)\\ &\quad+\frac{1}{1^{4|1}}.(m-3,m-2,m-1,m)^{(p+4-q)}.\beta(m-3,p+1)\\ &\quad-\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &\quad(-)^m\frac{1}{1^{m|1}}.(1,2,\ldots.m)^{(p+m-q)}.\beta(1,p+1).\end{aligned}$$

Durch diese Anordnung geht die Gleichung (30.) in folgende über:

$$m.\beta(m,q+1)$$
$$=\frac{(-1)^{m+q}}{1^{m+1|1}}.(1,2,\ldots.m)^{(m-q)}+(-)^q\{B_1^{(m,q)}-B_2^{(m,q)}+\ldots.-\ldots.(-)^qB_{q+1}^{(m,q)}\};$$

damit man ferner mit Leichtigkeit operiren könne, setze man zur Abkürzung:

$$32.\quad S_q^{(m)}=\frac{(-1)^{m+q}}{1^{m+1|1}}.(1,2,\ldots.m)^{(m-q)}+(-)^q\{B_1^{(m,q)}-B_2^{(m,q)}+\ldots.-\ldots.(-)^{q-1}B_q^{(m,q)}\},$$

so dafs man hat:

$$m.\beta(m,q+1)=S_q^{(m)}+B_{q+1}^{(m,q)}.$$

Weil nun nach (31.)

$$B_{q+1}^{(m,\,q)} = \frac{1}{1^{2|1}} . m^{1|-1} . (m-1) . \beta(m-1, q+1)$$
$$- \frac{1}{1^{3|1}} . m^{2|-1} . (m-2) . \beta(m-2, q+1)$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$(-)^m \frac{1}{1^{m|1}} . m^{m-1|-1} . 1 \times \beta(1, q+1)$$

ist, so hat man, wenn man sich noch folgender Abkürzungen

$$33. \quad A_{q+1}^{(m-s)} = (m-s) . \beta(m-s, q+1),$$
$$a_{s+1} = \frac{1}{1^{s+2|1}}$$

bedient, folgende Gleichung:

$$34. \quad A_{q+1}^{(m)} = S_q^{(m)} + m^{1|-1} . a_1 . A_{q+1}^{(m-1)}$$
$$- m^{2|-1} . a_2 . A_{q+1}^{(m-2)}$$
$$+ m^{3|-1} . a_3 . A_{q+1}^{(m-3)}$$
$$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$(-)^m m^{m-1|-1} . a_{m-1} . A_{q+1}^{(1)} .$$

Dies ist die einfachste, und für den Fortgang in der Untersuchung bequemste Form, in welcher die Gleichung (30.) dargestellt werden kann.

Hiernach ist:

$$A_{q+1}^{(m-1)} = S_q^{(m-1)} + (m-1)^{1|-1} . a_1 . A_{q+1}^{(m-2)}$$
$$- (m-1)^{2|-1} . a_2 . A_{q+1}^{(m-3)}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$(-)^{m-1} (m-1)^{m-2|-1} . a_{m-2} . A_{q+1}^{(1)};$$

führt man nun dies in (34.) ein, so erhält man:

$$A_{q+1}^{(m)} = S_q^{(m)} - m^{1|-1} . S_q^{(m-1)} . (-a_1)$$
$$+ m^{2|-1} . (-a_2 + a_1 . a_1) . A_{q+1}^{(m-2)}$$
$$- m^{3|-1} . (-a_3 + a_1 . a_2) . A_{q+1}^{(m-3)}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$(-)^{m-1} m^{m-1|-1} . (-a_{m-1} + a_1 . a_{m-2}) . A_{q+1}^{(1)} .$$

Hierdurch ist das Geschäft eingeleitet; man bildet nach (34.) den Werth von $A_{q+1}^{(m-2)}$, und führt diesen hier ein; nach (34.) wird $A_{q+1}^{(m-3)}$ gebildet, und in der neuen Gleichung substituirt, u. s. w. Fährt man mit dieser

Substitution fort, bis die Gröfsen $A_{q+1}^{(1)}$, $A_{q+1}^{(2)}$, ... aus der resultirenden Gleichung entfernt sind, so erhält man zuletzt folgende Gleichung:

$$(z)\quad \begin{aligned} A_{q+1}^{(m)} &= m^{0|-1}.S_q^{(m)} \\ &\quad - m^{1|-1}.S_q^{(m-1)}.(-C_1^{(1)}) \\ &\quad + m^{2|-1}.S_q^{(m-2)}.(-C_1^{(2)}+C_2^{(2)}) \\ &\quad - m^{3|-1}.S_q^{(m-3)}.(-C_1^{(3)}+C_2^{(3)}-C_3^{(3)}) \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\quad (-)^{m-1}m^{m-1|1}.S_q^{(1)}.(-C_1^{(m-1)}+C_2^{(m-1)}-C_3^{(m-1)}+\ldots.-\ldots.(-)^{m-1}C_{m-1}^{(m-1)}), \end{aligned}$$

wo

35. $C_g^{(f)}$ = der Summe aller möglichen Verbindungen aus den Elementen a_1, a_2, a_3, ... ist, so dafs in jeder Verbindung nur g Elemente vorkommen, und die Summe der Stellenzahlen dieser g Elemente $=f$ ist.

Die gefundene Gleichung (z) kann viel einfacher ausgedrückt werden. Denn setzt man:

$$\begin{aligned} E^n = \left(\frac{e^x-1}{x}\right)^n &= (1+a_1x^1+a_2x^2+\ldots.)^n \\ &= E^n\mathfrak{k}_1.x^0+E^n\mathfrak{k}_2.x^1+E^n\mathfrak{k}_3.x^2+\ldots., \end{aligned}$$

wo die Gröfsen a_1, a_2, ... die in (33.) angegebene Bedeutung haben, und e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist, so ist

$$E^{-1}\mathfrak{k}(p+2) = -C_1^{(p+1)}+C_2^{(p+1)}-C_3^{(p+1)}+\ldots.-\ldots.(-)^{p+1}C_{p+1}^{(p+1)}.$$

Macht man daher in der Gleichung (z) hiervon Gebrauch, so erhält man für die Bildung von $A_{q+1}^{(m)} = m.\beta(m,q+1)$ folgendes Gesetz:

$$36.\quad \begin{aligned} m.\beta(m,q+1) &= m^{0|-1}.S_q^{(m)}.E^{-1}\mathfrak{k}1 \\ &\quad - m^{1|-1}.S_q^{(m-1)}.E^{-1}\mathfrak{k}2 \\ &\quad + m^{2|-1}.S_q^{(m-2)}.E^{-1}\mathfrak{k}3 \\ &\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\quad (-)^{m-1}m^{m-1|-1}.S_q^{(1)}.E^{-1}\mathfrak{k}m. \end{aligned}$$

Dieses Bildungsgesetz unterscheidet sich von (30.) ganz wesentlich, und scheint für die Deduction der unabhängigen Bildungsweise am passendsten zu sein. Indefs fehlen noch mehrere Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen, welche hier vorkommen, und ehe diese ausgemittelt sind, wird auch in Rücksicht der Gröfsen $\beta(m,1)$, ... nicht viel geleistet werden können.

Führt man in (36.) die Werthe von $S_q^{(m)}$, $S_q^{(m-1)}$, ... aus (32.) ein, so geht die Gleichung (36.) in folgende über:

37. $$m.\beta(m,q+1) = (-1)^{m-q}\,1^{m|1}.\Sigma_s \frac{(1,2,\ldots,m-s)^{(m-s-q)}}{1^{m-s|1}} \times \frac{E^{-1}\mathfrak{k}(s+1)}{1^{m-s+1|1}}$$
$$+(-)^q\Sigma_s(-)^s m^{s|-1}E^{-1}\mathfrak{k}(s+1).\left\{B_1^{(m-s,q)} - B_2^{(m-s,q)} + \ldots - \ldots (-)^{q-1}B_q^{(m-s,q)}\right\},$$

wo

$$s = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Der erste Theil zur Rechten in dieser Gleichung, eine Reihe, mufs summirt werden können; in dem besondern Falle, wo $q=0$ ist, geht dies an; setzt man nemlich $q=0$, so hat man:

$$m.\beta(m,1) = (-1)^m.1^{m|1}.\Sigma_{s=0,1,\ldots m-1} \frac{1}{1^{m-s+1|1}}.E^{-1}\mathfrak{k}(s+1)$$

Nach dem bekannten Polynomialgesetz ist aber

$$\Sigma_{s=0,1,\ldots m-1} \frac{1}{1^{m-s+1|1}}.E^{-1}\mathfrak{k}(s-1) = -E^{-1}\mathfrak{k}(m+1);$$

daher hat man:

38. $$\beta(m,1) = (-1)^{m-1}\,1^{m-1|1}.E^{-1}\mathfrak{k}(m+1).$$

Für $q=2$, u. s. w. ist eine solche Reduction zur Zeit noch nicht bekannt, und noch viel weniger die Summirung der verwickelten Formeln, auf welche man beim Fortgange kommt.

36.

Recherches sur la sommation d'un certain nombre de fonctions transcendantes, dont les dérivées sont déterminées par des équations algébriques du troisième dégré.

(Par Mr. *Minding*, docteur ès sciences à Berlin.)

Soit y une racine donnée de l'équation

$$1. \quad y^3 + p_2 y^2 + p_1 y + p_0 = 0,$$

dont les coëfficiens p_2, p_1, p_0 réprésentent des polynomes entiers en x, à coëfficiens constans. On voit qu'en vertu de cette équation toute fonction rationnelle en x et y peut être réduite à la forme:

$$\varphi(x, y) = \frac{\alpha + \beta y + \gamma y^2}{A + By + Cy^2},$$

les lettres α, β, γ, A, B, C désignant des polynomes entiers en x.

Or il est facile de trouver un troisième polynome $A' + B'y + C'y^2$, tel que le produit $(A + By + Cy^2)(A' + B'y + C'y^2) = N$, divisé par la formule $y^3 + p_2 y^2 + p_1 y + p_0$ donne un reste indépendant de y.

En effet, en supposant $N = ky^4 + hy^3 + gy^2 + fy + e$, on trouvera par la division

$$N = (ky + h - p_2 k)(y^3 + p_2 y^2 + p_1 y + p_0) + (g - kp_1 - p_2(h - p_2 k))y^2 + (f - kp_0 - p_1(h - p_2 k))y + e - p_0(h - p_2 k).$$

Mettant dans cette formule les valeurs

$k = CC'$, $h = BC' + CB'$, $g = BB' + AC' + A'C$, $f = AB' + BA'$, $e = AA'$,

égalant ensuite à zéro les coëfficiens de y et de y^2 dans l'expression du reste, on obtient pour déterminer A', B', C', les équations:

$$BB' + AC' + A'C - (p_1 - p_2 p_2)CC' - p_2(BC' + CB') = 0.$$

$$AB' + BA' - (p_0 - p_1 p_2)CC' - p_1(BC' + CB') = 0.$$

Par ce moyen, en considérant y comme racine de l'équation (1.), le dénominateur de la fraction $\varphi(x, y)$ sera réduit à un polynome entier en x, sans y. L'équation (1.) servira encore à chasser du numérateur la troisième et la quatrième puissance de y, de sorte qu'on ait: $\varphi(x, y) =$

$\frac{A+By+Cy^2}{N}$, A, B, C, N, étant des polynomes entiers en x, dégagés de tout facteur commun.

Cela posé décomposons en fractions simples la fonction $\frac{1}{N}$, et considérons un seulement des termes de cette décomposition, savoir $\frac{1}{(c-x)^n}$, en omettant le facteur indépendant de x. La fonction $\varphi(x,y)$ aura un terme correspondant $\frac{A+By+Cy^2}{(c-x)^n}$, et l'intégrale $\int\varphi(x,y)\,\partial x$ sera par conséquent composée d'une certaine somme d'intégrales $\int\frac{A+By+Cy^2}{(c-x)^n}\partial x$, multipliées par des facteurs invariables. Mais au lieu de cette dernière intégrale nous allons considérer l'integrale $\int\frac{A+By+Cy^2}{c-x}\partial x$, dont l'autre dérive en différentiant par rapport à c.

Joignons à l'équation (1.) la suivante

$$2.\quad q_2y^2+q_1y+q_0=0,$$

dans laquelle q_2, q_1, q_0 sont des polynomes entiers en x, avec des coëfficiens indéterminés et variables. Pour éliminer y entre les équations (1.) et (2.), on divisera la première par la seconde. On trouve le quotient: $\frac{q_2y+p_2q_2-q_1}{q_2q_2}$ et le reste: $\frac{(p_1q_2^2-q_0q_2+q_1^2-p_2q_1q_2)y+p_0q_2^2+q_0q_1-p_2q_0q_2}{q_2q_2}$.

En égalant à zéro le reste de la division, on trouvera une expression rationnelle de y, savoir

$$y=\frac{P}{Q},\quad P=q_0q_1+p_0q_2q_2-p_2q_0q_2,\quad Q=q_0q_2-q_1q_1-p_1q_2q_2+p_2q_1q_2.$$

En vertu de cette valeur de y, on aura, quel que soit x,

$$P^3+p_2P^2Q+p_1PQ+p_0Q^3=\{q_2P+(p_2q_2-q_1)Q\}fx,$$
$$q_2P^2+q_1PQ+q_0Q^2=q_2q_2fx.$$

L'équation $fx=0$ donne évidemment le résultat de l'élimination de y entre les équations (1.) et (2.). Nous désignerons par $x_1, x_2 \ldots x_\mu$ ses racines, considérées comme fonctions des coëfficiens variables des polynomes q_2, q_1, q_0, et nous marquerons par y_1, y_2, $\ldots$ y_μ les valeurs de y correspondantes respectivement aux racines x_1, x_2, $\ldots$ x_μ. Ces valeurs peuvent être exprimées rationnellement en fonctions de x et des coëfficiens indéterminés des polynomes q_2, q_1, q_0, et l'équation $fx=0$ fournit encore le moyen pour remplacer la différentielle ∂x par une expression composée en x et les coëfficiens indiqués, avec leurs variations. On parviendra ainsi à une expression rationnelle de la formule proposée $\frac{A+By+Cy^2}{c-x}\partial x$.

Mais puisque cette différentielle contient encore une partie rationnelle en x, il paraît avantageux, pour la simplicité du calcul, de l'en dégager. Pour cet effet mettons dans le système des équations (1.) et (2.) $z - \frac{1}{3}p_2$ au lieu de y; ces équations changeront comme il suit:

$$z^3 + (p_1 - \tfrac{1}{3}p_2p_2)z + p_0 - \tfrac{1}{3}p_1p_2 + \tfrac{2}{27}p_2p_2 = 0,$$
$$q_2z^2 + (q_1 - \tfrac{2}{3}p_2q_2)z + q_0 - \tfrac{1}{3}p_2q_1 + \tfrac{1}{9}p_2q_2q_2 = 0.$$

Mettant la même valeur de y dans la différentielle proposée, et en ôtant la partie rationnelle en x, cette différentielles dieviendra $\frac{Az+Bz^2}{c-x}\partial x$. Pour abréger les formules, nous considérérons d'abord z comme racine de l'équation $z^3 + p_1z + p_0 = 0$, et nous écrirons de même, au lieu de l'équation (2.), $q_2z^2 + q_1z + q_0 = 0$. Le coëfficient p_2 sera restitué à la fin du calcul, en changeant p_1 en $p_1 - \frac{1}{3}p_2p_2$, q_1 en $q_1 - \frac{2}{3}p_2q_2$, et ainsi de suite.

Cette simplification admise, les équations

$$z^3 + p_1z + p_0 = 0,\ q_2z^2 + q_1z + q_1 = 0$$

donneront

$$z = \frac{P}{Q},\ P = q_0q_1 + p_0q_2q_2,\ Q = q_0q_2 - q_1q_1 - p_1q_2q_2,$$
$$P^3 + p_1PQ^2 + p_0Q^3 = Rfx,\ q_2P^2 + q_1PQ + q_0Q^2 = q_2{}^2fx;$$
$$R = q_2P - q_1Q = q_1{}^3 + p_0q_2{}^3 + p_1q_1q_2{}^2.$$

L'équation $fx = 0$ donnera par la différentiation, en rapportant la lettre ∂ à la variation de x, et la lettre δ à celle des autres quantités variables contenues dans cette équation:

$$f'x.\partial x + \delta fx = 0.$$

Sans développer la différentielle δfx, il est clair, qu'en vertu de la composition de fx elle pourra être mise sous la forme:

$$\delta fx = k_0\delta q_0 + k_1\delta q_1 + k_2\delta q_2,$$

k_0, k_1, k_2 étant des fonctions rationnelles et entières de p_0, p_1, q_0, q_1, q_2. Pour trouver des expressions moins compliquées de k_0, k_1, k_2, partons de l'équation

$$q_2P^2 + q_1PQ + q_0Q^2 = q_2{}^2fx.$$

Remarquons d'abord, que, puisque cette équation est identique, il s'ensuit que la somme $q_1P + q_0Q$ doit être divisible par q_2, la fonction Q ne l'étant pas. Désignons par $-w$ la valeur de $\frac{q_1P+q_0Q}{q_2}$, on trouvera:

$$w = -q_0{}^2 - p_0q_1q_2 + p_1q_0q_2,$$

et on aura

$$P^2 - wQ = q_2fx.$$

Cela posé différentions l'équation

$$q_2 f x = P^2 - w Q,$$

en considérant x comme racine de l'équation $fx=0$; nous obtiendrons:

$$q_2 f' x\, \partial x + 2P\delta P - w\delta Q - Q\delta w = 0,$$

ou bien:

$$q_2 f' x\, \partial x + 2P\delta(q_0 q_1 + p_0 q_2 q_2) - w\delta(q_0 q_2 - q_1 q_1 - p_1 q_2 q_2) - Q\delta(-q_0^2 - p_0 q_1 q_2 + p_1 q_0 q_2) = 0.$$

En développant cette équation on trouve:

3. $$q_2 f' x \partial x + (2q_1 P - w q_2 + 2q_0 Q - p_1 q_2 Q)\delta q_0 + (2Pq_0 + 2wq_1 + p_0 q_2 Q)\delta q_1 + (4 p_0 q_2 P + 2w p_1 q_2 - w q_0 + p_0 q_1 Q - p_1 q_0 Q)\delta q_2 = 0.$$

Remarquons qu'on a

$$q_1 P + q_0 Q = -q_2 w,\quad q_0 P + q_1 w = (p_0 q_0 q_2 - p_0 q_1 q_1 + p_1 q_0 q_1) q_2,$$
$$p_0 q_1 Q - p_1 q_0 Q - q_0 w = (p_0 q_1 - p_1 q_0) Q - q_0 w.$$

Multipliant cette formule par q_2, et substituant au lieu de $(p_0 q_1 - p_1 q_0) q_2$ sa valeur: $-w - q_0^2$, on aura:

$$\{(p_0 q_1 - p_1 q_0) Q - q_0 w\} q_2 = -wQ - q_0^2 Q - q_0 q_2 w.$$

Mais puisque $P^2 - wQ = q_2 fx = 0$, on peut substituer P^2 au lieu de wQ, et on aura:

$$-P^2 - q_0^2 Q - q_0 q_2 w = \{(p_0 q_1 - p_1 q_0) Q - q_0 w\} q_2.$$

Substituant les valeurs de P, Q, w, on trouve:

$$(p_0 q_1 - p_1 q_0) Q - q_0 w = (-p_0 q_0 q_1 - p_0 p_0 q_2 q_2) q_2 = -p_0 q_2 P.$$

En divisant l'équation (3.) par q_2, on obtient:

$$f' x\, \partial x - (3w + p_1 Q)\delta q_0 + (2 p_0 q_0 q_2 - 2 p_0 q_1 q_1 + 2 p_1 q_0 q_1 + p_0 Q)\delta q_1 + (3 p_0 P + 2 p_1 w)\delta q_2 = 0.$$

En introduisant de nouveau les quantités P, Q, on trouve:

$$2 p_0 q_0 q_2 - 2 p_0 q_1 q_1 + 2 p_1 q_0 q_1 + p_0 Q = 3 p_0 Q + 2 p_1 P;$$

d'où il s'ensuit:

$$f' x\, \partial x = (3w + p_1 Q)\delta q_0 - (3 p_0 Q + 2 p_1 P)\delta q_1 - (3 p_0 P + 2 p_1 w)\delta q_2.$$

Cette formule donne:

$$k_0 = -3w - p_1 Q;\quad k_1 = 3 p_0 Q + 2 p_1 P;\quad k_2 = 3 p_0 P + 2 p_1 w.$$

On voit aisément, que les produits $\frac{wP}{Q}$, $\frac{wP^2}{Q^2}$, $\frac{wP^3}{Q^3}$ ont des valeurs entières, pourvu que la quantité x soit envisagée comme racine de l'équation $fx=0$. En effet, on a dans ce cas $w = \frac{P^2}{Q}$, et l'équation

$$P^3 + p_1 P Q^2 + p_0 Q^3 = 0,$$

donne

$$\frac{wP}{Q} = \frac{P^2}{Q^2} = -(p_1 P + p_0 Q).$$

De là on tire

$$\frac{wP^2}{Q^2} = -(p_1 w + p_0 P); \quad \frac{wP^3}{Q^3} = -p_0 w + p_1(p_1 P + p_0 Q).$$

D'après ces remarques, on déduira aisément les relations suivantes:

$$k_1 = k_0 \frac{P}{Q}; \quad k_2 = k_1 \frac{P}{Q_1} = k_0 \frac{P^2}{Q^2}.$$

Multiplions maintenant l'équation:

$$-\partial x = \frac{k_0 \delta q_0 + k_1 \delta q_1 + k_2 \delta q_2}{f' x}$$

à gauche par $\frac{Az}{c-x}$, et à droite par la valeur rationnelle de cette quantité: $\frac{AP}{c-x.Q}$, A étant un polynome entier en x. En substituant les valeurs des produits de k_0, k_1, k_2 multipliés par $\frac{P}{Q}$, on trouve:

$$4. \quad -\frac{Az\partial x}{c-x} = \frac{A[(3p_0 Q + 2p_1 P)\delta q_0 + (3p_0 P + 2p_1 w)\delta q_1 + (3p_0 w - 2p_1(p_1 P + p_0 Q))\delta q_2]}{c-x.f' x}.$$

Multipliant cette équation encore une fois par $z = \frac{P}{Q}$, et remplaçant A par un autre polynome entier B, on aura:

$$5. \quad -\frac{Bz^2 \partial x}{c-x} =$$

$$\frac{B[(3p_0 P + 2p_1 w)\delta q_0 + (3p_0 w - 2p_1(p_1 P + p_0 Q))\delta q_1 - (3p_0(p_1 P + p_0 Q) + 2p_1(p_1 w + p_0 P))\delta q_2]}{c-x.f' x},$$

Ecrivons pour abréger

$$-\frac{Az\partial x}{c-x} = \frac{A\theta x}{c-x.f' x} \text{ au lieu de l'équation (4.),}$$

et

$$-\frac{Bz^2 \partial x}{c-x} = \frac{B\lambda x}{c-x.f' x} \text{ au lieu de (5.).}$$

Chacune de ces deux équations a lieu pour une quelconque des racines de l'équation $fx = 0$. En ajoutant toutes ces équations, et posant

$$\frac{A_1 z_1 + B_1 z_1^2}{c-x_1} \partial x_1 + \frac{A_2 z_2 + B_2 z_2^2}{c-x_2} \partial x_2 + \ldots + \frac{A_\mu z_\mu + B_\mu z_\mu^2}{c-x_\mu} \partial x_\mu = S,$$

on trouve

$$6. \quad -S = \frac{A_1 \theta x_1}{c-x_1.f' x_1} + \frac{A_2 \theta x_2}{c-x_2.f' x_2} + \ldots + \frac{A_\mu \theta x_\mu}{c-x_\mu.f' x_\mu} + \frac{B_1 \lambda x_1}{c-x_1.f' x_1} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{B_\mu \lambda x_\mu}{c-x_\mu.f' x_\mu}.$$

Dans cette formule je désigne p. e. par A_1 la valeur de A, l'orsqu'on y substitue x_1 au lieu de x; je désignerai par A_c la valeur de A, lorsqu'on y met c à la place de x. On voit, que l'expression (6.) de S peut être sommée. En effet les numérateurs $A_1 \theta x_1$, $B_1 \lambda x_1$ etc. sont des fonctions

entières des racines x_1, x_2, x_3 .... respectivement; on aura donc, d'après les règles connues,

$$-S = \frac{A_c \theta c}{fc} + \frac{B_c \lambda c}{fc} - \psi c,$$

en comprenant sous le signe ψc la totalité des puissances positives ou zéro qui peuvent se rencontrer dans la formule $\frac{A_c \theta c}{fc} + \frac{B_c \lambda c}{fc}$, et qu'il faut en retrancher.

Multipliant par $R = q_2 P - q_1 Q$ la fonction θc, on trouvera:

7. $R\theta c = (3p_0 Q + 2p_1 P) R\delta q_0 + (3p_0 P + 2p_1 w) R\delta q_1 + (3p_0 w - 2p_1(p_0 Q + p_1 P)) R\delta q_2$,

en mettant partout c à la place de x dans les polynomes p_0, p_1, q_0, q_1, q_2 et les quantités qui en dépendent.

Si après avoir dévéloppé la valeur de $Q\delta P - P\delta Q$ on la multiplie par $3p_0 Q + 2p_1 P$, on trouve:

8. $(3p_0 Q + 2p_1 P)(Q\delta P - P\delta Q) =$

$(3p_0 Q + 2p_1 P)(-R\delta q_0 + (q_0 Q + 2q_1 P)\delta q_1 + (2p_0 q_2 Q - q_0 P + 2p_1 q_2 P)\delta q_2)$.

Prenons la somme des équations (7.) et (8.); il est clair que les termes multipliées en δq_0 se détruisent mutuellement et nous aurons:

$$R\theta c + (3p_0 P + 2p_1 Q)(Q\delta P - P\delta Q) = \alpha \delta q_1 + \beta \delta q_2;$$

en supposant

$$\alpha = (3p_0 P + 2p_1 w)(q_2 P - q_1 Q) + (3p_0 Q + 2p_1 P)(q_0 Q + 2q_1 P),$$
$$\beta = (3p_0 w - 2p_0 p_1 Q - 2p_1^2 P)(q_2 P - q_1 Q)$$
$$+ (2p_0 q_2 Q - q_0 P + 2p_1 q_2 P)(3p_0 Q + 2p_1 P).$$

On peut mettre la valeur de α sous la forme:

$$\alpha = 3p_0(q_2 P^2 + q_1 PQ + q_0 Q^2) + 2p_1(q_2 wP - q_1 wQ + q_0 PQ + 2q_1 P^2).$$

Or on avait

$$q_2 P^2 + q_1 PQ + q_0 Q^2 = q_2^2 fc; \quad q_2 w + q_1 P + q_0 Q = 0; \quad P^2 - wQ = q_2 fc.$$

De là on tire

$$q_2 wP - q_1 wQ + q_0 PQ + 2q_1 P^2 = q_1 P^2 - q_1 wQ = q_1 q_2 fc,$$

ce qui donne

$$\alpha = (3p_0 q_2 + 2p_1 q_1) q_2 fc.$$

Appliquons au coëfficient β de semblables reductions. On a

$$\beta = 3p_0(q_2 Pw - q_1 wQ + 2p_0 q_2 Q^2 - q_0 PQ + 2p_1 q_2 PQ)$$
$$+ 2p_1((p_0 Q + p_1 P)(q_1 Q - q_2 P) + 2p_0 q_2 PQ - q_0 P^2 + 2p_1 q_2 P^2).$$

Or on trouve, à l'aide des équations $P^3 + p_1 PQ^2 + p_0 Q^3 = (q_2 P - q_1 Q) fc$; $q_2 w = -q_0 Q - q_1 P$; $-wQ = q_2 fc - P^2$, les égalités suivantes:

$$q_2 Pw - q_1 wQ - q_0 PQ = -2q_0 PQ - 2q_1 P^2 + q_1 q_2 fc,$$

$$2q_2(p_0Q^2+p_1PQ)=2q_2\frac{(q_2P-q_1Q)(fc-P^3)}{Q}=\frac{2(q_2q_2fc-q_2P^2)P}{Q}-2q_1q_2fc,$$

ou bien

$$2q_2(p_0Q^2+p_1PQ)=2(q_1P^2+q_0PQ)-2q_1q_2fc.$$

On tire de là

$$q_2Pw-q_1wQ-q_0PQ+2p_0q_2Q^2+2p_1q_2PQ=-q_1q_2fc.$$

La seconde partie de la valeur de β, multipliée en $2p_1$, se réduit à $-2p_1q_1q_1fc$. Pour démontrer cette proposition, mettons d'abord la partie en question sous la forme:

$$(p_0Q+p_1P)(q_1Q+q_2P)-q_0P^2(=\beta').$$

Mettant $\frac{q_2^2fc-q_0Q}{P}$ au lieu de q_1P+q_2P, et réduisant au même dénominateur, on trouvera $\beta'=\frac{(p_0Q+p_1P)(q_2q_2fc-q_0Q^2)-q_0P^3}{P}$, d'où il s'ensuit:

$$P\beta'=(p_0Q+p_1P)q_2q_2fc-(q_2P-q_1Q)q_0fc=$$
$$[(q_0q_1+p_0q_2q_2)Q+(p_1q_2q_2-q_0q_2)P]fc,$$

ou bien, puisque $q_0q_1+p_0q_2q_2=P$,

$$\beta'=(Q+p_1q_2q_2-q_0q_2)fc=-q_1q_1fc;\ \text{c. q. f. d.}$$

Donc on a

$$\beta=-(3p_0q_2+2p_1q_1)q_1fc.$$

Réunissant les résultats obtenus, nous avons:

$$R\theta c+(3p_0Q+2p_1P)(Q\delta P-P\delta Q)=(3p_0q_2+2p_1q_1).fc.(q_2\delta q_1-q_1\delta q_2).$$

Divisons cette égalité par $Rfc=P^3+p_1PQ^2+p_0Q^3$, nous aurons

$$8.\quad\frac{\theta c}{fc}+\frac{(3p_0Q+2p_1P)(Q\delta P-P\delta Q)}{P^3+p_1PQ^2+p_0Q^3}=\frac{(3p_0q_2+2p_1q_1)(q_2\delta q_1-q_1\delta q_2)}{q_1^3+p_0q_2^3+p_1q_1q_2^2}.$$

Si l'on pose $\frac{P}{Q}=Z$, $\frac{q_1}{q_2}=v$, on obtient:

$$9.\quad\frac{\theta c}{fc}+\frac{(3p_0+2p_1Z)\delta Z}{Z^3+p_1Z+p_0}=\frac{(3p_0+2p_1v)\delta v}{v^3+p_3v+p_0}.$$

Après avoir dévéloppé la fonction $\frac{\theta c}{fc}$, il reste encore à traiter semblablement l'autre partie $\frac{\lambda c}{fc}$. En multipliant par R la valeur de λc, on trouve:

$$R\lambda c=(3p_0P+2p_1w)R\delta q_0+(3p_0w-2p_0p_1Q-2p_1^2P)R\delta q_1$$
$$-(3p_0(p_0Q+p_1P)+2q_1(p_0P+p_1w))R\delta q_2.$$

Ajoutons à cette équation la suivante:

$$(3p_0Q+2p_1P)\frac{P}{Q}(Q\delta P-P\delta Q)=$$

$$(3p_0Q+2p_1P)\frac{P}{Q}[-R\delta q_0+(q_0Q+2q_1P)\delta q_1+(2p_0q_2Q-q_0P+2p_1q_2P)\delta q_2];$$

nous obtiendrons, en réfléchissant qu'on a $w - \frac{P^2}{Q} = -\frac{q_2 fc}{Q}$,

11. $$R\lambda c + (3p_0 Q + 2p_1 P)\frac{P}{Q}(Q\delta P - P\delta Q) = -\frac{2p_1 q_2 Rfc}{Q}\delta q_0 + \gamma\delta q_1 + \varepsilon\delta q_2.$$

On a, en vertu des équations

$$\frac{wP}{Q} = \frac{P^3}{Q^2} - \frac{q_2 Pfc}{Q^2}, \quad \frac{P^3}{Q^2} + p_1 P + p_0 Q = \frac{(q_2 P - q_1 Q)fc}{Q^2},$$

$$\frac{wP}{Q} = -p_1 P - p_0 Q - \frac{q_1 fc}{Q}.$$

Cette équation donne:

$$(3p_0 P + 2p_1 w)\frac{P}{Q} = 3p_0 w - 2p_1(p_0 Q + p_1 P) - \frac{2p_1 q_1 fc}{Q} + \frac{3p_0 q_2 fc}{Q}.$$

Donc on pourra mettre le multiplicateur γ de δq_1 sous la forme:

$$\gamma = [(3p_0 P + 2p_1 w)R + (3p_0 Q + 2p_1 P)(q_0 Q + 2q_1 P)]\frac{P}{Q} + \frac{2p_1 q_1 Rfc}{Q} - \frac{3p_0 q_2 Rfc}{Q}.$$

En comparant avec cette formule la valeur primitive de α, on verra que la valeur de γ devient:

$$\gamma = \frac{\alpha P}{Q} + \frac{2p_1 q_1 Rfc}{Q} - \frac{3p_0 q_2 Rfc}{Q},$$

et puisque

$$\alpha = (3p_0 q_2 + 2p_1 q_1)q_2 fc, \quad R = q_2 P - q_1 Q,$$

$$\gamma = \frac{(3p_0 q_2 + 2p_1 q_1)Pq_2 + 2p_1 q_1(q_2 P - q_1 Q) - 3p_0 q_2(q_2 P - q_1 Q)}{Q} fc$$

$$= \left(3p_0 q_1 q_2 - 2p_1 q_1 q_1 + \frac{4p_1 q_1 q_2 P}{Q}\right) fc.$$

On a

$$(3p_0 w - 2p_0 p_1 Q - 2p_1^2 P)\frac{P}{Q} =$$

$$-3p_0(p_0 Q + p_1 P) - 2p_1(p_0 P + p_1 w) - \frac{3p_0 q_1 fc}{Q} - \frac{2p_1^2 q_2 fc}{Q}.$$

Par cette raison le facteur de δq_2 devient

$$\varepsilon = [(3p_0 w - 2p_0 p_1 Q - 2p_1^2 P)R$$

$$+ (3p_0 Q + 2p_1 P)(2p_0 p_2 Q - q_0 P + 2p_1 p_2 P)]\frac{P}{Q} + \frac{(3p_0 q_1 + 2p_1^2 q_2)Rfc}{Q}.$$

Substituant dans cette égalité β au lieu de sa valeur, on trouve:

$$\varepsilon = \frac{\beta P}{Q} + \frac{(3p_0 q_1 + 2p_1^2 q_2)Rfc}{Q}.$$

Or la valeur finale de β était: $\beta = -(3p_0 q_2 + 2p_1 q_1)q_1 fc$; donc on obtient, en effaçant les termes qui se détruisent mutuellement,

$$\varepsilon = \frac{2p_1(p_1 q_2 q_2 - q_1 q_1)P}{Q} fc - (3p_0 q_1 + 2p_1^2 q_2)q_1 fc.$$

En vertu des valeurs obtenues de γ et de ε, l'équation (10.) devient:

$$R\lambda c+(3p_0Q+2p_1P)\frac{P}{Q}(Q\delta P-P\delta Q)=-\frac{2p_1q_2Rfc}{Q}\delta q_0$$
$$+\left(3p_0q_1q_2-2p_1q_1q_1+\frac{4p_1q_1q_2P}{Q}\right)fc\,\delta q_1$$
$$+\left\{\frac{2p_1(p_1q_2^2-q_1^2)P}{Q}-(3p_0q_1+2p_1^2q_2)q_1\right\}fc\,\delta q_2.$$

Rassemblant en groupes les termes multipliés par $3p_0$ et par $2p_1$, on obtient:

11. $$R\gamma c+(3p_0Q+2p_1P)\frac{P}{Q}(Q\delta P-P\delta Q)=3p_0q_1fc\,(q_2\delta q_1-q_1\delta q_2)-\frac{2p_1L}{Q}fc\,;$$

en désignant par L la fonction:

$$q_2R\delta q_0+(q_1^2Q-2q_1q_2P)\delta q_1+(q_1^2P-p_1q_2^2P+p_1p_1q_2Q)\delta q_2=L.$$

On a

$$R=q_1^3+p_1q_1q_2^2+p_0q_2^3;$$
$$q_2^2Q-2q_1q_2P=-q_1(q_0q_1q_2+q_1^3+2p_0q_2^3+p_1q_1q_2^2).$$
$$q_1^2P-p_1q_2^2P+p_1q_1q_2Q=q_0q_1^3+p_0q_1^2q_2^2-p_1q_1^3q_2-p_0p_1q_2^4-p_1^2q_1q_2^3.$$

Cela posé divisons l'équation (11.) par $Rfc=P^3+p_1PQ^2+p_0Q^3$, et mettons pour abréger z à la place de $\frac{P}{Q}$; nous aurons

12. $$\frac{\lambda c}{fc}+\frac{(3p_0+2p_1Z)Z\delta Z}{Z^3+p_1Z+p_0}=\frac{3p_0q_1(q_2\delta q_1-q_1\delta q_2)}{q_1^3+p_1q_1q_2^2+p_0q_2^3}-\frac{2p_1L}{QR}.$$

Introduisons encore les quantités $v=\frac{q_1}{q_2}$, $u=\frac{q_0}{q_2}$; et divisons par q_2^5 les valeurs de L et de QR; nous trouverons:

$$q_2^5L=(v^3+p_1v+p_0)\frac{\delta q_0}{q_2}-(uv+v^3+2p_0+p_1v)v\frac{\delta q_1}{q_1}+$$
$$(uv^3+p_0v^2-p_1v^3-p_0p_1-p_1^2v)\frac{\delta q_2}{q_2},$$
$$q_2^5QR=(u-v^2-p_1)(v^3+p_1v+p_0).$$

Les valeurs de u et de v donnent immédiatement

$$\frac{\delta q_0}{q_2}=\delta u+u\frac{\delta q_2}{q_2},\quad \frac{\delta q_1}{q_2}=\delta v+v\frac{\delta q_2}{q_2}.$$

Substituant ces valeurs de $\frac{\delta q_0}{q_2}$ et $\frac{\delta q_1}{q_2}$ dans l'expression trouvée de L, on aura, en réduisant,

$$q_2^5L=(v^3+p_1v+p_0)\delta u-(v^3+p_1v+2p_0+uv)v\delta v$$
$$+(v^3+p_1v+p_0)(u-v^2-p_1)\frac{\delta q_2}{q_2}.$$

Ces réductions achevées on obtient:

$$\frac{\lambda c}{fc}+\frac{(3p_0+2p_1Z)Z\delta Z}{Z^3+p_1Z+p_0}=\frac{3p_0v\delta v}{v^3+p_1v+p_0}-\frac{2p_1\delta u}{u-v^2-p_1}$$
$$+\frac{2p_1(v^3+p_1v+2p_0+uv)v\delta v}{(v^3+p_1v+p_0)(u-v^2-p_1)}-\frac{2p_1\delta q_2}{q_2},$$

ou bien

13. $$\frac{\lambda c}{fc}+\frac{(3p_0+2p_1Z)Z\delta Z}{Z^3+p_1Z+p_0}=\frac{(3p_0+2p_1v)v\delta v}{v^3+p_1v+p_0}-\frac{2p_1(\delta u-2v\delta v)}{u-v^2-p_1}-\frac{2p_1\delta q_2}{q_2}.$$

En mettant les valeurs de $\frac{\theta c}{fc}$ et $\frac{\lambda c}{fc}$, tirées des équations (9.) et (13.), dans l'expression de S, savoir:

$$S=-\frac{A_c\theta c}{fc}-\frac{B_c\lambda c}{fc}+\psi c,$$

on obtiendra le résultat suivant:

14. $$S=\frac{(3p_0+2p_1Z)(A_c+B_cZ)\delta Z}{Z^3+p_1Z+p_0}-\frac{(3p_0+2p_0v)(A_c+B_cv)\delta v}{v^3+p_1v+p_0}$$
$$+\frac{2p_1B_c(\delta u-2v\delta v)}{u-v^2-p_1}+\frac{2p_1B_c\delta q_2}{q_2}+\psi c.$$

Je ne m'arrêterai pas à dévélopper l'intégrale de cette différentielle, qu'on pourra trouver par les règles connues au moyen de la résolution d'une équation cubique, qui avait été supposée dès le commencement, en se rappelant, que les quantités p_0, p_1, A_c, B_c sont invariables. Quant à la partie ψc, on la trouvera en dévéloppant d'après les puissances descendantes de c la partie restante de l'expression de S et prenant pour ψc la somme des puissances positives ou zéro de ce dévéloppement, avec un signe opposé. Et l'on doit conclure, que chaque terme de ce dévéloppement pourra s'intégrer s'éparément, puisque la fonction totale est intégrable indépendamment de toute valeur particulière de la constante c.

La sommation achevée se rapporte aux intégrales de la forme $\int\frac{Az+Bz^2}{c-x}\partial x$. Mais si l'intégrale proposée était $\int\frac{Az+Bz^2}{\varphi x}\partial x$, la quantité c n'est donnée que par la résolution de l'équation $\varphi x=0$. Supposons $\varphi x=(c_1-x)(c_2-x)(c_3-x)\ldots$ Si toutes les racines c_1, c_2, c_3 .... sont inégales, on a:

15. $$\frac{1}{\varphi' c_1.c_1-x}+\frac{1}{\varphi' c_2.c_2-x}+\frac{1}{\varphi' c_3.c_3-x}\ldots=-\frac{1}{\varphi x}.$$

Désignons pour abrégér, par $\frac{\chi c}{\psi c}$ la valeur de S, donnée par l'équation (14.), χ et ψ étant deux fonctions rationnelles et entières par rapport à c, et faisons

$$\Sigma = \frac{A_1 z_1 + B_1 z_1^2}{-\varphi x_1}\partial x_1 + \frac{A_2 z_2 + B_2 z_2^2}{-\varphi x_2}\partial x_2 + \ldots . \frac{A_\mu z_\mu + B_\mu z_\mu^2}{-\varphi x_\mu}\partial x_\mu .$$

Mettant en lieu de $\frac{1}{\varphi x}$ sa valeur tirée de l'équation (15.), on trouvera;

$$\Sigma = \frac{\chi c_1}{\varphi' c_1 . \psi c_1} + \frac{\chi c_2}{\varphi' c_2 . \psi c_2} + \frac{\chi c_3}{\varphi' c_3 . \psi c_3} + \ldots .$$

La partie à droite étant rationnelle et symmétrique par rapport aux racines $c_1, c_2 \ldots .$ de l'équation $\varphi x = 0$, il sera possible d'en chasser ces racines au moyen des coëfficiens de cette équation. Mais il paraît difficile, de démêler la forme précise et générale du résultat, à cause de la grande complication du calcul. Des recherches ultérieures réussiront peut-être à lever cette difficulté.

Berlin, Juillet 1833.

Errata.

Cah. 10. p. 195. lis. $y^3 + p = 0$ au lieu de $y^3 + p = 1$.

- — p. 292. dans les formules placées en ligne 7. et 8. $u + p v^2$ au lieu de $u + p v^2$.

37.

Sur la forme et le mouvement d'une bulle qui se meut à travers un liquide.

(Par M. *Pagani*, prof. ord. à la faculté des sciences de l'Université de Liège.)

Le problème qui fait l'objet de cet article a été traité par Maupertuis dans l'hypothèse d'une bulle sphérique. Mais l'expérience démontre que la forme d'une bulle fluide, qui mont à travers un liquide, diffère sensiblement de la sphérique, et l'on peut facilement se convaincre que la surface réelle est aplatie dans le sens de la verticale. Il s'agit donc de trouver les équations propres à exprimer plus fidèlement les circonstances de ce phénomène dynamique.

Au bout d'un temps quelconque t, supposons que la courbe DED' (Tab. V. Fig. 3.), représente le méridien de la bulle fluide qui monte au travers d'un liquide dont la température et la densité sont partout les mêmes, et donc le niveau supérieur est AB. En prenant la densité du liquide pour unité, dénotons, pour abréger, par

π le rapport de la circonférence au diamètre,

g le coëfficient de la gravité,

ϱ la densité de la bulle,

$z = CL$, la distance entre l'horizontale CE, menée au point E ou la tangente est verticale, et le niveau AB,

$b = CD$, $b' = CD'$, $x = CP$, $y = PM$, $y' = PM'$,

$s = DM$, et $v = -\frac{dz}{dt}$.

Nous admettons 1° que la pression normale sur un point quelconque de la surface engendrée par la révolution de la courbe DME, est égale à celle qui a lieu au point E; 2° que la force accélératrice qui sollicite un filet quelconque MM' est la même que celle qui sollicite le filet DD'.

Cela posé, il est aisé de voir que la pression normale au point M est proportionnelle à

$$z - y + \frac{3v^2 dx^2}{5g ds^2};$$

les premiers termes de cette expression provenant de la pression hydrostatique du liquide circonvoissin, et le dernier, de la résistance du milieu,

supposée proportionnelle au carré de la vitesse perpendiculaire à la surface choquée. Au point D l'expression précédente se change en

$$z - b + \frac{3v^2}{5g},$$

et au point E l'on a simplement z. Il faut donc, d'après l'hypothèse admise, que l'on ait

$$(1.) \quad b = \tfrac{3}{5}\frac{v^2}{g},$$

et

$$(2.) \quad y = b\frac{dx^2}{ds^2}.$$

L'équation (2.) nous fait voir que la courbe DME est une demi-cycloïde dont le cercle générateur a pour diamètre b. La valeur de cette quantité dépend à chaque instant de la vitesse avec laquelle la bulle traverse le liquide; la formule (1.) le fera connaître après que l'on aura calculé la quantité v.

La force motrice qui anime le cylindre creux produit par la révolution de l'élément $(y+y')\,dx$, est proportionnelle à

$$g[y' - \varrho(y+y')];$$

la masse de ce corps étant proportionnelle à $\varrho(y+y')$, on aura la force accélératrice qui sollicite le filet MM', en divisant la première de ces quantités par la seconde, savoir

$$g\left(\frac{y'}{\varrho(y+y')} - 1\right).$$

D'un autre côté, la force accélératrice du filet DD', est évidemment

$$g\left(\frac{b'}{\varrho(b+b')} - 1\right).$$

En égalant ces deux forces, (2me hypothèse), on a, pour déterminer la courbe $D'M'E$, l'équation

$$(3.) \quad y' = \frac{b'}{b}y.$$

On aura, en outre, pour définir le mouvement vertical de la bulle,

$$(4.) \quad \frac{dv}{dt} = g\left(\frac{b'}{\varrho(b+b')} - 1\right).$$

Il nous reste à trouver la valeur de b'. Pour cela, il suffit d'observer que la masse de la bulle est une constante connue. En la désignant par $\frac{4}{3}\pi\triangle a^3$, il est aisé de voir que l'on aura

$$\frac{2}{3}\frac{\triangle}{\varrho}a^3 = \int_0^c (y+y')x\,dx,$$

en observant que $c = CE = \frac{b\pi}{2}$.

Substituons sous le signe $\int$ la valeur de y' donnée par la formule (3.), et intégrons. L'ordonnée y étant celle d'une cycloïde définie par l'équation (2.), on aura d'abord

$$\int_0^c y\,x\,\partial x = (\tfrac{3}{32}\pi^2 - \tfrac{1}{6})\,b^3;$$

partant

$$\frac{\triangle}{\varrho}\,a^3 = \tfrac{9}{64}\pi^2 - \tfrac{1}{4})(b+b')\,b^2.$$

De cette dernière équation on déduit sans peine,

$$(5.)\quad b' = \frac{\triangle}{\varrho}\,\frac{a^3}{(\frac{9}{64}\pi^2 - \frac{1}{4})\,b^2} - b,$$

et

$$\frac{b'}{b+b'} = 1 - \frac{\varrho}{\triangle}\,(\tfrac{9}{64}\pi^2 - \tfrac{1}{4})\,\frac{b^3}{a^3}.$$

Au moyen de cette valeur l'équation (4.) devient

$$(6.)\quad \frac{dv}{dt} = g\left(\frac{1}{\varrho} - 1\right) - \frac{\alpha v^6}{\triangle a^3 g^2},$$

où l'on a fait pour plus de simplicité

$$(7.)\quad \alpha = (\tfrac{3}{5})^3(\tfrac{9}{64}\pi^2 - \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{4} \text{ à peu près.}$$

Si la bulle conservait une forme sphérique; ce qui est l'hypothèse de Maupertuis; on aurait, au lieu de l'équation (6.), celle-ci

$$(8.)\quad \frac{dv}{dt} = g\left(\frac{1}{\varrho} - 1\right) - \frac{v^2}{\triangle^{\frac{1}{3}}\varrho^{\frac{2}{3}}a}.$$

En comparant les équations (6.) et (8.), on voit que la résistance qu'éprouve une bulle fluide dont la densité est invariable, croit comme la sixième puissance de la vitesse dans la première hypothèse, tandis que cette résistance est, dans l'hypothèse de Maupertuis, en raison du carré de la vitesse.

Si la bulle est formée par un fluide élastique, on aura, d'après la loi de Mariotte,

$$\varrho = \triangle\,\frac{z}{h},$$

en dénotant par h une longueur donnée; et en substituant cette valeur dans les équations (6.) et (8.), il viendra

$$(9.)\quad \frac{dv}{dt} = g\left(\frac{1}{\triangle}\,\frac{h}{z} - 1\right) - \frac{\alpha}{\triangle}\,\frac{v^6}{a^3 g^2},$$

et

$$(10.)\quad \frac{dv}{dt} = g\left(\frac{1}{\triangle}\,\frac{h}{z} - 1\right) - \frac{9}{40.\triangle}\,\frac{h^{\frac{2}{3}}v^2}{az^{\frac{2}{3}}}.$$

Il ne parait pas que l'on puisse intégrer rigoureusement l'équation (9.), mais on pourra, dans une première approximation, substituer pour

v, sa valeur déduite de l'équation (10.), que l'on peut facilement ramener aux quadratures en opérant de la manière suivante.

Multiplions tous les termes de l'équation (10.) par $\mu z dz$, μ étant un facteur indéterminé, et en observant que l'on a $dz = -v\,dt$, nous trouverons

$$-\mu z v\,dv = g\left(\frac{h}{\triangle} - z\right)\mu\,dz - \frac{9}{4\,5}\,\frac{h^{\frac{2}{3}}\mu v^2}{\triangle a}\,z^{\frac{1}{3}}\,dz.$$

Mais on a identiquement

$$2\,\mu z v\,dv = d(\mu z v^2) - v^2\,d(\mu z);$$

ce qui permet de séparer l'équation précédente dans les deux équations suivantes:

$$\frac{9}{2\,5}\,\frac{h^{\frac{1}{3}}}{\triangle a}\,\mu z^{\frac{1}{3}}\,dz + d(\mu z) = 0,$$

$$d(\mu z v^2) = 2g\left(z - \frac{h}{\triangle}\right)\mu\,dz.$$

En développant la première on obtient successivement

$$\left(\frac{9}{2\,5}\,\frac{h^{\frac{2}{3}}}{\triangle a}\,z^{\frac{1}{3}} + 1\right)\mu\,dz + z\,d\mu = 0,$$

$$\frac{d\mu}{\mu} + \frac{dz}{z} + \frac{9}{2\,5}\,\frac{h^{\frac{2}{3}}}{\triangle a}\,z^{-\frac{2}{3}}\,dz = 0,$$

$$\log.(\mu z) = -\frac{2\,7}{2\,5}\,\frac{h^{\frac{2}{3}}}{\triangle a}\,z^{\frac{1}{3}};$$

d'où

$$\mu = \frac{e^{-kz^{\frac{1}{3}}}}{z},$$

e étant la base des logarithmes népériens, et

$$k = \frac{2\,7}{2\,5}\,\frac{h^{\frac{2}{3}}}{\triangle a}.$$

En mettant la valeur de μ dans la seconde équation, et en intégrant, on aura

$$\mu z v^2 = \text{Const.} + 2g\int\left(1 - \frac{h}{\triangle z}\right)e^{-kz^{\frac{1}{3}}}\,dz.$$

On déterminera la constante arbitraire en supposant que l'on a $v = 0$ lorsque $z = h$. D'après cela on trouve enfin

$$v^2 = 2g\,e^{kz^{\frac{1}{3}}}\int_h^z\left(1 - \frac{h}{\triangle z}\right)e^{-kz^{\frac{1}{3}}}\,dz.$$

38.

Déplacement virtuel d'un système de points unis invariablement entre eux.

(Par M. *Pagani*, Prof. ord. à l'Université de Liège.)

Euler et Lagrange se sont occupés successivement du problème où il s'agit de déterminer les variations des coordonnées d'un corps solide, correspondantes à un déplacement arbitraire et infiniment petit du système. Il m'a paru que ces deux grands géomètres n'ont pas donné la solution la plus simple de cet intéressant problème; et je pense que celle que j'ai trouvée il y a environ huit ans pourrait fixer un moment l'attention des lecteurs de ce journal.

Rapportons tous les points du corps solide à deux systèmes d'axes rectangulaires, le premier fixe dans l'espace, et le second fixe dans le corps. Soient x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque, relatives au premier système; ξ, η, ζ, celles du même point, relatives au second système. Soient en outre, x', y', z', les coordonnées du point où se coupent les axes des ξ, η, ζ.

On sait, par la théorie de la transformation des coordonnées, que ces quantités sont liées entre elles par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} x &= x' + a\xi + b\eta + c\zeta, \\ y &= y' + a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z &= z' + a''\xi + b''\eta + c''\zeta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, \\ ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ ac + a'c' + a''c'' &= 0, \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0. \end{aligned}$$

Cela posé, il est manifeste qu'un déplacement quelconque infiniment petit du corps solide fera varier toutes les quantités qui entrent dans ces équations, à l'exception des coordonnées ξ, η, ζ. On aura donc, en différentiant les équations précédentes,

$$\begin{aligned}
\delta x &= \delta x' + \xi\delta a + \eta\delta b + \zeta\delta c,\\
\delta y &= \delta y' + \xi\delta a' + \eta\delta b' + \zeta\delta c',\\
\delta z &= \delta z' + \xi\delta a'' + \eta\delta b'' + \zeta\delta c'';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\delta a + a'\delta a' + a''\delta a'' &= 0,\\
b\delta b + b'\delta b' + b''\delta b'' &= 0,\\
c\delta c + c'\delta c' + c''\delta c'' &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a\delta b + b\delta a + a'\delta b' + b'\delta a' + a''\delta b'' + b''\delta a'' &= 0,\\
a\delta c + c\delta a + a'\delta c' + c'\delta a' + a''\delta c'' + c''\delta a'' &= 0,\\
b\delta c + c\delta b + b'\delta c' + c'\delta b' + b''\delta c'' + c''\delta b'' &= 0.
\end{aligned}$$

Or, la position des axes des ξ, η, ζ, étant tout à fait arbitraire, on peut supposer qu'avant le déplacement virtuel du corps, ces axes coïncidaient avec ceux des x, y, z. Il faudra donc faire, dans les six dernières équations,

$$\begin{aligned}
a &= 1, \quad b = 0, \quad c = 0,\\
a' &= 0, \quad b' = 1, \quad c' = 0,\\
a'' &= 0, \quad b'' = 0, \quad c'' = 1;
\end{aligned}$$

ce qui les réduit à celles-ci:

$$\begin{aligned}
\delta a &= 0, \qquad \delta b' = 0, \qquad \delta c'' = 0;\\
\delta b + \delta a' &= 0, \quad \delta c + \delta a'' = 0, \quad \delta c' + \delta b'' = 0.
\end{aligned}$$

Posons pour plus de symmétrie

$$\begin{aligned}
\delta b &= -\delta a' = \delta\dot{z},\\
\delta a'' &= -\delta c = \delta\dot{y},\\
\delta c' &= -\delta b'' = \delta\dot{x};
\end{aligned}$$

les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, ainsi que $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$, $\delta\dot{z}$, resteront indéterminées; et l'on aura, pour exprimer les variations des coordonnées d'un point quelconque du corps solide, les formules

$$(a) \quad \begin{cases} \delta x = \delta x' + y\delta\dot{z} - z\delta\dot{y},\\ \delta y = \delta y' + z\delta\dot{x} - x\delta\dot{z},\\ \delta z = \delta z' + x\delta\dot{y} - y\delta\dot{x}, \end{cases}$$

qui sont les mêmes que celles qu'Euler fit connaître le premier.

L'inspection seule de ces formules démontre que le point, qui est à l'origine des coordonnées, se déplace de la quantité

$$\delta s = \sqrt{(\delta x'^2 + \delta y'^2 + \delta z'^2)};$$

et que la droite s', qui indique la direction de cette *translation*, fait avec

les axes des x, y, z, les angles dont les cosinus sont respectivement

$$(a') \quad \frac{\delta x'}{\delta s'}, \quad \frac{\delta y'}{\delta s'}, \quad \frac{\delta z'}{\delta s'}.$$

Il est visible, en outre, que tous les points du corps solide dont les coordonnées satisfont aux équations

$$y\,\delta\dot{z} - z\,\delta\dot{y} = 0,$$
$$z\,\delta\dot{x} - x\,\delta\dot{z} = 0,$$
$$x\,\delta\dot{y} - y\,\delta\dot{x} = 0,$$

ne peuvent avoir qu'une translation égale et parallèle à $\delta s'$.

Mais ces équations appartiennent à une droite $\dot{s}$, passant par l'origine des coordonnées et faisant avec les axes des angles dont les cosinus ont pour valeur

$$(\dot{a}) \quad \frac{\delta\dot{x}}{d\dot{s}}, \quad \frac{\delta\dot{y}}{\delta\dot{s}}, \quad \frac{\delta\dot{}}{\delta\dot{s}},$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$\delta\dot{s} = \sqrt{(\delta\dot{x}^2 + \delta\dot{y}^2 + \delta\dot{z}^2)}.$$

On conclut de là qu'*un déplacement quelconque infiniment petit, d'un système de points liées invariablement entre eux, equivaut toujours à une translation commune à tous les points, et à une rotation autour d'un axe passant par l'origine des coordonnées.*

Nous avons vu plus haut que la translation du système est égale à $\delta s'$. Il sera facile de déterminer aussi l'angle infiniment petit qui mesure la quantité de la rotation, en observant que le point situé sur l'axe des x, à la distance 1 de l'origine, donne, d'après les formules (a),

$$\delta' x = \delta x', \quad \delta y = \delta y' - \delta\dot{z}, \quad \delta z = \delta z' + \delta\dot{y};$$

d'où l'on déduit que le déplacement de ce point, en vertu de la rotation, est $\sqrt{(\delta\dot{y}^2 + \delta\dot{z}^2)}$. D'un autre côté, la distance de ce point à l'axe de rotation $\dot{s}$, étant $\frac{\sqrt{(\delta\dot{y}^2+\delta\dot{z}^2)}}{\delta\dot{s}}$; il est évident que la quantité $\delta\dot{s}$ (que l'on obtient en divisant l'arc infiniment petit, décrit par un point déterminé, par la distance de ce point à l'axe de rotation) mesure la rotation virtuelle d'un corps solide.

En supposant $\delta\dot{y} = 0$, $\delta\dot{z} = 0$, l'axe de rotation $\dot{s}$ coïncide avec celui des x, et l'on a $\delta\dot{s} = \delta\dot{x}$. Par conséquent la variation arbitraire $\delta\dot{x}$ exprime une rotation infiniment petite autour de l'axe des x. Il est

clair aussi que les variations $\delta\dot{y}$, $\delta\dot{z}$ expriment des rotations virtuelles autour des axes des y, et des z.

Donc, *le déplacement virtuel d'un corps solide est le résultat des trois translations*, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, *respectivement parallèles aux axes des* x, y, z, *lesquelles se composent en une translation* $\delta s'$, *dans le sens de la droite* s', *et des trois rotations*, $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$, $\delta\dot{z}$, *autour des mêmes axes, lesquelles se composent en une rotation* $\delta\dot{s}$, *autour de la droite* $\dot{s}$.

Ayant construit les droites s', $\dot{s}$, au moyen des cosinus donnés (a') et $(\dot{a})$; la translation $\delta s'$ doit être dirigée vers l'extrémité de s'. Quant à la rotation, on s'assure facilement, au moyen des formules (a), qu'en supposant l'origine au centre de la terre, et l'extrémité de la droite $\dot{s}$ dirigée vers le pôle boréal, elle aura lieu dans le sens du mouvement du sphéroïde terrestre, c'est-à-dire d'occident en orient. De cette manière on détermine complètement la quantité et la direction d'une rotation aussi bien que la quantité et la direction d'une translation. Il suffit d'imaginer l'origine des coordonnées transportée au centre de la terre; de diriger l'axe de rotation vers le pôle boréal et de considérer la rotation comme positive ou négative, suivant qu'elle a lieu d'occident en orient ou en sens contraire.

L'origine des coordonnées étant tout à fait arbitraire, on conçoit que le déplacement virtuel d'un corps solide peut résulter d'une translation commune à tous les points du système, et d'une rotation autour d'un axe fixe passant par un point quelconque. Les formules (a) donnent les variations des coordonnées sous la forme la plus simple; et dans ce cas l'axe de rotation passe par l'origine. Mais il n'est pas difficile d'exprimer les mêmes variations de manière que la rotation virtuelle se fasse autour d'un axe passant par un point différent de l'origine des coordonnées.

En effet, soient α, β, γ les coordonnées d'un point déterminé du système. En y transportant l'origine des coordonnées, soient ξ, η, ζ les nouvelles coordonnées d'un point quelconque, respectivement parallèles aux coordonnées primitives x, y, z. Les formules (a) donnent d'abord

$$(b)\quad \begin{cases} \delta\alpha = \delta x' + \beta\delta\dot{z} - \gamma\delta\dot{y}, \\ \delta\beta = \delta y' + \gamma\delta\dot{x} - \alpha\delta\dot{z}, \\ \delta\gamma = \delta z' + \alpha\delta\dot{y} - \beta\delta\dot{x}; \end{cases}$$

ce qui fait connaître le déplacement virtuel du point (α, β, γ). En substituant ensuite dans les mêmes formules, $\alpha+\xi$, $\beta+\eta$, $\gamma+\zeta$, au lieu de x, y, z; on aura

$$\delta x = \delta\alpha + \eta\delta\dot{z} - \zeta\delta\dot{y},$$
$$\delta y = \delta\beta + \zeta\delta\dot{x} - \xi\delta\dot{z},$$
$$\delta z = \delta\gamma + \xi\delta\dot{y} - \eta\delta\dot{x}.$$

En examinant les dernières formules on voit que le mouvement virtuel du corps solide se compose d'une translation commune

$$\delta\sigma = \sqrt{(\delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2)},$$

égale au déplacement total du point (α, β, γ), et d'une rotation $\delta\dot{s}$ autour d'un axe parallèle à la droite $\dot{s}$, et passant par le point (α, β, γ).

Ici se présente naturellement la question de savoir s'il existe un ou plusieurs points par rapport auxquels l'axe de rotation coïncide avec la droite qui indique la direction du mouvement de translation. Il faut pour cela que l'on puisse déterminer les coordonnées α, β, γ, de manière à satisfaire aux trois équations

$$\frac{\delta\alpha}{\delta\sigma} = \pm\frac{\delta\dot{x}}{\delta\dot{s}}, \quad \frac{\delta\beta}{\delta\sigma} = \pm\frac{\delta\dot{y}}{\delta\dot{s}}, \quad \frac{\delta\gamma}{\delta\sigma} = \pm\frac{\delta\dot{z}}{\delta\dot{s}},$$

ou bien à deux quelconques des équations suivantes qui s'en déduisent,

$$\frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{\delta\dot{x}}{\delta\dot{y}}, \quad \frac{\delta\alpha}{\delta\gamma} = \frac{\delta\dot{x}}{\delta\dot{z}}, \quad \frac{\delta\beta}{\delta\gamma} = \frac{\delta\dot{y}}{\delta\dot{z}}.$$

En égard aux formules (b), on aura au lieu des dernières équations, celles-ci:

$$(\delta x' + \beta\delta\dot{z} - \gamma\delta\dot{y})\delta\dot{y} = (\delta y' + \gamma\delta\dot{x} - \alpha\delta\dot{z})\delta\dot{x},$$
$$(\delta x' + \beta\delta\dot{z} - \gamma\delta\dot{y})\delta\dot{z} = (\delta z' + \alpha\delta\dot{y} - \beta\delta\dot{x})\delta\dot{x},$$
$$(\delta y' + \gamma\delta\dot{x} - \alpha\delta\dot{z})\delta\dot{z} = (\delta z' + \alpha\delta\dot{y} - \beta\delta\dot{x})\delta\dot{y}.$$

Les valeurs des coordonnées α, β, γ, qui satisfont à chacune de ces équations, appartiennent à un plan; mais à cause que les trois équations n'en font que deux distinctes, il est clair que les trois plans doivent passer par la même droite laquelle sera par conséquent le lieu de l'axe de rotation cherché. En éliminant β entre la première et la troisième équation, et α entre la première et la seconde, on aura les équations des projections de l'axe sur les plans des x, z, et des y, z. Ces équations sont

$$\alpha = \gamma\frac{\delta\dot{x}}{\delta\dot{z}} + \frac{\delta y'(\delta\dot{x}^2+\delta\dot{z}^2) - \delta\dot{y}(\delta x'\,\delta\dot{x}+\delta z'\,\delta\dot{z})}{\delta\dot{z}(\delta\dot{x}^2+\delta\dot{y}^2+\delta\dot{z}^2)},$$

$$\beta = \gamma\frac{\delta\dot{y}}{\delta\dot{z}} - \frac{\delta x'(\delta\dot{y}^2+\delta\dot{z}^2) - \delta\dot{x}(\delta y'\,\delta\dot{y}+\delta z'\,\delta\dot{z})}{\delta\dot{z}^2(\delta\dot{x}^2+\delta\dot{y}^2+\delta\dot{z}^2)}.$$

Ainsi, *connaissant les variations arbitraires* $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$, $\delta\dot{z}$, *qui servent à définir le mouvement virtuel d'un corps solide, on pourra toujours déterminer, au moyen des dernières équations, la position d'une droite fixe de sorte que le corps solide, en tournant infiniment peu autour de cette droite à la manière d'une vis dans son écrou, parviendra à sa nouvelle position.*

D'après tout ce qui précède, rien ne serait plus facile que de trouver le *pas* de cette vis fictive, et le sens suivant lequel doit tourner son hélice.

Nous finirons en faisant remarquer que les formules (b) donnent, lorsqu'on y suppose $\delta\alpha = 0$, $\delta\beta = 0$, $\delta\gamma = 0$, cette équation de condition

$$\delta x'\,\delta\dot{x} + \delta y'\,\delta\dot{y} + \delta z'\,\delta\dot{z} = 0$$

nécessaire pour que le déplacement virtuel d'un corps solide puisse se réduire à une seule rotation. En admettant que cette équation soit satisfaite, les formules (b) s'accordent avec les précédentes pour donner

$$\alpha = \gamma\frac{\delta\dot{x}}{\delta\dot{z}} + \frac{\delta y'}{\delta\dot{z}},$$

$$\beta = \gamma\frac{\delta\dot{y}}{\delta\dot{z}} - \frac{\delta x'}{\delta\dot{z}}.$$

39.

Die loxodromische Linie und ihr merkwürdiger Zusammenhang mit der sphärischen Kettenlinie.

(Von Herrn Prof. Dr. *C. Gudermann* in Münster.)

1.

Die sphärische Kettenlinie wurde in meiner jüngst erschienenen Schrift: „Grundrifs der analytischen Sphärik," welche im Nachfolgenden einfach durch: „A. Sphär." citirt werden wird, deswegen als ein Beispiel gebraucht, weil sie so einfache Eigenschaften besitzt, und sowohl die Rectification als auch die Quadratur in geschlossenen Ausdrücken zuläfst. Später fand sich, dafs diese Curve mit der sogenannten loxodromischen Linie, d. h. mit der logarithmischen Spirale auf der Oberfläche der Kugel, auf eine bemerkenswerthe Weise zusammenhängt, wovon jetzt gehandelt werden wird. Es sei (Taf. V. Fig. 4.) der Punct Q das sphärische Centrum (der Pol) des als Abscissenlinie dienenden Hauptkreises $VPWUR$, worauf V der Anfangspunct sein mag; die Curve AMv sei die sphärische Kettenlinie, A sei ihr Scheitel und QAV also der durch ihn gehende Meridian; der Parameter sei $VA = a$. Ist dann QMP ein durch einen anderen Punct M der Kettenlinie gehender Meridian, so sind $VP = x$ die Abscisse und $PM = z$ die zugehörige senkrechte Applicate des Punctes M, und die Gleichung der Kettenlinie ist dann:

$$\operatorname{tang} z = \operatorname{tang} a \,.\, \mathfrak{Cos}(x \cot a).$$

Setzt man zur Vereinfachung (wie in A. Sphär. §. 44.) $\operatorname{tang} a = \alpha$, also $\cos a = \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$ und $\sin a = \frac{\alpha}{\sqrt{(1+\alpha^2)}}$, so ist die Gleichung:

$$\operatorname{tang} z = a \,.\, \mathfrak{Cos}\frac{x}{a}.$$

Zum besseren Verständnisse des Nachfolgenden erwähnen wir hier einer Eigenschaft der Kettenlinie, deren Beweis sich in A. Sphär. §. 45. findet. Legt man nemlich durch den Punct M derselben die Berührungslinie SM, und wird von P darauf ein Loth PS gefällt, so ist dieses Loth, wie bei der ebenen Kettenlinie, immer von gleicher Länge, nemlich dem Parameter VA gleich; ferner ist das Stück MS der Tangente immer dem

zugehörigen Bogen MA der Kettenlinie gleich. Man kann sich also die Tangente SM als vom Bogen AM abgewickelt vorstellen, wobei also anfänglich P auf V und S auf A befindlich gedacht werden mufs.

2.

Wenn man nun vom Pole Q aus einen Meridian QR so zieht, dafs er auf dem Meridiane des Punctes M (auf QP) senkrecht steht, und also PR ein Quadrant ist, so wird die Tangente SM von QR in einem Puncte N geschnitten, dessen Abscisse $VR = x' = x + 90°$ ist, und dessen senkrechte Applicate $RN = u$ gesucht werden soll. Ist VW ein Quadrant, so kann auch W zum Anfangspuncte genommen werden, und die Abscisse $WR = t$ ist dann von der Art, dafs $x' = x + 90° = 90° + t$ und also $t = x$ ist. Die Gleichung der Tangente SMN ist (A. Sphär. §. 24.):

$$\operatorname{tang} z' = \operatorname{tang} z . \cos(x - x') - \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{\sin(x - x')}{\cos z^2},$$

und weil in Bezug auf den Punct N die Applicate $z' = u$ und $x' = 90° + t = 90° + x$ ist, so hat man $\cos(x - x') = 0$ und $\sin(x - x') = -1$; also ist

$$\operatorname{tang} u = \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{1}{\cos z^2}.$$

Weil weiter $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos z . \sqrt{(\sin z^2 - \sin a^2)}}{\sin a}$ ist (A. Sphär. §. 45.), so hat man

$\operatorname{tang} u = \frac{\sqrt{(\sin z^2 - \sin a^2)}}{\sin a . \cos z}$, oder einfacher $\cos u = \frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} z}$. Weil aber der Gleichung der Kettenlinie gemäfs $\operatorname{tang} z = \operatorname{tang} a . \operatorname{Cos} \frac{x}{a}$ ist, und auch $x = t$, so hat man die einfache Gleichung:

$$\cos u . \operatorname{Cos} \frac{t}{a} = 1.$$

Auf diesen Zusammenhang zwischen den beiden Arcus u und $\frac{t}{a}$ passen aber die in meiner Theorie der Potenzial- oder cyklisch-hyperbolischen Functionen (im VIten Bande, 2ten Hefte S. 165 dieses Journals) aufgestellten Fundamentalformeln, welchen gemäfs ist:

$$u = l \frac{t}{a}, \text{ oder umgekehrt } t = a . \mathfrak{L} u.$$

3.

Die so eben erhaltenen Gleichungen gehören einer zweiten Curve an, welche der Ort des Punctes N ist, und welche durch den neuen Anfangspunct W geht; denn der Punct N hängt vermöge des an Q rechtwinkligen Dreiecks MQN mit dem Puncte M, der sich in der Kettenlinie

bewegt, zusammen, und ändert gleichzeitig mit ihm seine Lage. Zu Anfange, als sich noch S in A befand, lag P auf V, und N (also auch R) lag auf W. Dasselbe zeigt die Gleichung $u = l\frac{t}{\alpha}$; denn ihr gemäfs ist für $t = 0$ auch $u = 0$. Aber aus dieser Gleichung lassen sich alle übrigen Eigenschaften der neuen Curve herleiten, und wir werden bald sehen, dafs sie die in der Nautik sogenannte loxodromische Linie ist. Die Gleichung $u = l\frac{t}{\alpha}$ setzt uns zunächst in den Stand, zu jeder Abscisse $WR = t$ die zugehörige senkrechte Applicate $RN = u$ auf eine einfache Weise, mittelst der von dem Verfasser berechneten Tabellen der Längezahlen, welche der Theorie der Potenzial-Functionen beigefügt sind, zu finden. Setzt man $-t$ für t, so geht u über in $-u$, und es gehören also zu gleich grofsen und entgegengesetzten Abscissen auch gleich grofse und entgegengesetzte Applicaten; wenn t wächst, nimmt auch u immer zu; aber das Wachsen von u ist ein immer mehr und mehr verzögertes: immer ist u kleiner als ein Quadrant; denn nur wenn t unendlich grofs ist, und der Punct R also unzählige Umläufe auf der Abscissenlinie $WRVW$ zurückgelegt hat, hat u die Gröfse eines Quadranten des Meridianes. Daher legt sich denn die loxodromische Linie, eben so wie die sphärische Kettenlinie selbst, in zahllosen Gewinden, welche dem Pole Q immer näher kommen, um die Kugel; nur findet dabei der Unterschied Statt, dafs sich die Kettenlinie ganz auf der einen Halbkugel befindet, während die loxodromische Linie beide Halbkugeln gleichmäfsig umschlingt, und den Aequator in W schneidet, wobei sie gerade von der einen Halbkugel zu der andern übergeht. Die sich zunächst auf einander folgenden Gewinde kommen sich ferner immer näher, je weiter sie von dem Aequator $WRVW$ entfernt, oder seinen beiden Polen näher sind; diese Pole selbst aber erreichen sie nicht, sie sind gleichsam die Asymptoten der loxodromischen Linie. Wenn der Parameter $\alpha = 90^0$, also $\alpha = \frac{1}{0}$ ist, so verwandelt sich diese loxodromische Linie in den Aequator selbst.

4.

Legt man durch den Punct N der loxodromischen Linie eine Tangente NU an die Curve, und wird der Winkel RNU mit λ bezeichnet, so ist (nach A. Sphär. §. 24.) $\text{tang}\lambda = \frac{\partial t}{\partial u}.\cos u$. Differenziirt man aber die

Gleichung $t = \alpha . \mathfrak{L} u$, so ist $\partial t = \frac{\alpha . \partial u}{\cos u}$ und also $\operatorname{tang} \lambda = \alpha = \operatorname{tang} a$, woraus folgt:

$$\lambda = a;$$

d. h. die loxodromische Linie schneidet alle von Q aus gezogenen Meridiane unter einem constanten Winkel λ, und hierin besteht die längst bekannte Fundamental-Eigenschaft dieser Curve. Dafs sie aber vermöge des um Q drehbaren rechten Winkels MQN mit der sphärischen Kettenlinie zusammenhängt, und dafs jener constante Winkel λ gerade den Parameter a zum Maafse hat, scheint nicht bekannt gewesen zu sein.

Wenn man umgekehrt die Gleichung $\frac{\partial u}{\cos u} = \frac{\partial t}{\operatorname{tang} \lambda}$ integrirt, so erhält man $\mathfrak{L} u = \frac{t}{\alpha} + C$, worin C eine Constante bedeutet, und also umgekehrt:

$$u = l\left(\frac{t}{\alpha} + C\right).$$

Ist nun $a = 90^0$, also $\alpha = \frac{1}{0}$; so hat man $u = C$; d. h. die loxodromische Linie ist in diesem Fall überhaupt ein Parallelkreis, welcher den Punct Q zu seinem Pole hat.

Die Subtangente UR findet sich nach der Formel $\operatorname{tang} UR = \operatorname{tang} \lambda . \sin u$, und es ist also:

$$\operatorname{tang} UR = \alpha . \sin u = \alpha . \mathfrak{Tang} \frac{t}{\alpha},$$

wenn die Constante $C = 0$ gesetzt wird.

5.

Überaus einfach ist die Rectification der loxodromischen Linie. Wird nemlich der Bogen $WN = s$ gesetzt, so ist (nach A. Sphär. §. 24.) $\partial u = \partial s . \cos \lambda$, und hieraus folgt auf der Stelle

$$s \cos a = u \text{ oder } s = \frac{u}{\cos a}.$$

Werden also die Bogen u und s zu geraden Linien ausgestreckt, und wird ein rechtwinkliges ebenes Dreieck construirt, dessen eine Kathete die gerade Linie $= u$ ist, und mit der Hypothenuse den Winkel $\lambda = a$ einschliefst, so hat die Hypothenuse die gesuchte Länge $= s$.

Daher ist die Länge der ganzen loxodromischen Linie vom Pole Q bis zu seinem Gegenpole $= \frac{\pi}{\cos a}$, wenn der Radius der Kugel als Einheit dient, und unter π die Ludolphische Zahl verstanden wird.

Wenn man die Fläche WNR mit f bezeichnet, so ist $\partial f = \sin u \,.\, \partial t$ (A. Sphär. §. 38.), und es ist also im vorliegenden Falle $f = a \,.\, f \operatorname{tang} u \,.\, \partial u$, oder auch $f = a \log \frac{1}{\cos u}$. Will man f durch t ausdrücken, so ist $f = a \log \operatorname{Cos} \frac{t}{a}$. In diesen Formeln, welche noch mit dem Quadrate des Kugelradius zu multipliciren sind, sind die geforderten Logarithmen natürliche. Auch mufs man nicht unbeachtet lassen, dafs, wenn $t > 2\pi$ angenommen wird, die durch die aufgestellten Formeln bestimmten Flächengröfsen zum Theil übereinander liegen.

6.

Die (in A. Sphär. §. 34. aufgestellten) allgemeinen Formeln geben zur Bestimmung des Krümmungs-Halbmessers für den Punct N, der mit ϱ bezeichnet sein mag, den einfachen Ausdruck:

$$\operatorname{tang} \varrho = \frac{1}{\sin \lambda \,.\, \operatorname{tang} u}.$$

Wenn man nun aber auf der Tangente UN die Normale Nr errichtet, und auf diese das Loth Rr fällt, so ist $\operatorname{tang} Nr = \operatorname{tang} u \,.\, \sin \lambda$, und also $\operatorname{tang} \varrho = \cot Nr$, oder auch:

$$\varrho = 90^0 - Nr.$$

Man findet aber leicht, dafs der Punct M selbst der Mittelpunct des Krümmungskreises ist, und dafs also $Mr = 90^0$ oder auch

$$\varrho = MN$$

ist.

Daher ist denn endlich die Kettenlinie MMv die Evolute der loxodromischen Linie WNw, und es ist also der Zusammenhang zwischen den beiden Curven auf zwei verschiedene Weisen ausgedrückt worden.

Zu demselben Resultate führt die Anwendung der in der A. Sphär. aufgestellten allgemeinen, auf die Ermittelung der Evoluten gerichteten Formeln.

40.

Beweis des Lehrsatzes des Herrn Steiner (im 2ten Bande S. 192. No. 34. dieses Journals.)

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

---

1. „Es liegen in dem Umfange eines Kegelschnittes, dessen halber Parameter p, Excentricität e ist, die Mittelpuncte einer beliebigen Anzahl Kugeln g, g', g'' etc., die alle eine aus dem Brennpuncte des Kegelschnittes mit dem Halbmesser ϱ beschriebene Kugel G berühren; ob, und wenn es möglich ist, dafs eine andere Kugel G' alle jene Kugeln berührt: die Coordinaten des Mittelpunctes dieser Kugel zu finden."

Zieht man von dem Brennpuncte des Kegelschnittes eine Grade r, die mit der Absidenlinie den Winkel φ bildet, bis zum Umfange des Kegelschnittes, so ist

$$r = \frac{p}{1+e\cos\varphi},$$

Der Halbmesser der Kugel, deren Mittelpunct der Durchschnittspunct jener Graden mit dem Kegelschnitte ist, und die die Kugel G berührt, ist also:

$$\frac{p}{1+\cos\varphi} - \varrho,$$

und die Coordinaten des Mittelpuncts, auf die Absidenlinie bezogen:

$$\frac{p\cos\varphi}{1+e\cos\varphi};\quad \frac{p\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}.$$

Es sein die Halbmesser der Kugel G', R um die Coordinaten des Mittelpuncts

$$a;\quad b;\quad c:$$

so hat man, wenn diese beiden letztern Kugeln sich berühren, die Gleichung:

$$\left\{a - \frac{p\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}\right\}^2 + \left\{b - \frac{p\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}\right\}^2 + c^2 = \left\{R - \varrho + \frac{p}{1+e\cos\varphi}\right\}^2,$$

oder

$$(a+(ae-p)\cos\varphi)^2 + (b+be\cos\varphi - p\sin\varphi)^2 + c^2(1+e\cos\varphi)^2 = [R-\varrho+p+(R-\varrho)e\cos\varphi]^2,$$

oder endlich:

$$\begin{aligned} 0 = {} & a^2+b^2+c^2-2p(R-\varrho)-(R-\varrho)^2 \\ & +2[(a^2+b^2+c^2)e-ap-(R-\varrho+p)(R-\varrho)e]\cos\varphi \\ & -2bp\sin\varphi-2bep\sin\varphi\cos\varphi \\ & +[(a^2+b^2+c^2)e-2ap+(R-\varrho)^2e]e\cos\varphi^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichung mufs nun, wenn die Kugel G' alle jene Kugeln g, g' etc. berühren soll, für jeden Werth von φ gelten. Es müssen also das von φ unabhängige Glied und die Coefficienten von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\varphi$, und $\cos\varphi^2$, jedes für sich, verschwinden. Die zwei Coefficienten geben sogleich blos eine einzige Gleichung

$$b = 0;$$

das von φ unabhängige Glied giebt

$$a^2 + b^2 + c^2 = (R-\varrho)^2 + 2p(R-\varrho);$$

und der Coefficient von $\cos\varphi$, nach Substitution dieses Werthes:

$$R-\varrho = \frac{a}{e},$$

wodurch zugleich der Coefficient von $\cos\varphi^2$ verschwindet. Es ist also möglich, dafs die Kugel G' alle jene Kugeln g, g', g'' etc. berührt; und der Mittelpunct derselben liegt, da $b = 0$ ist, in einer auf der Ebene des Kegelschnitts senkrechten Ebene, in der zugleich die Absidenlinie des Kegelschnitts liegt.

Substituirt man den Werth von $R-\varrho$ in das von φ unabhängige Glied, so erhält man die Gleichung der Curve, in der die Mittelpuncte aller G' liegen,

$$(1-e^2)a^2 - z\frac{p}{e}a + c^2 = 0,$$

welches die Gleichung eines zweiten Kegelschnitts ist, dessen Scheitel im Brennpuncte des ersten liegt, und deren Absidenlinien zusammen fallen. Denn es seien, die halben Parameter und die Excentricität dieses Kegelschnittes p', e': so ist die Gleichung, auf die Absidenlinie und den Scheitel bezogen:

$$(1-e'e')x'x' + 2p'x' + y'y' = 0.$$

Es ist also

$$e' = \frac{1}{e};\quad p' = \frac{p}{e};\quad \frac{p'}{1+e'} = \frac{p}{1+e}.$$

Beide stehen also in reciproker Verbindung, da eben so

$$e = \frac{1}{e};\quad p = \frac{p'}{e'} \text{ ist.}$$

Die Kugel in der Reihe g, g', g'' etc., die der Kugel G vom Halbmesser ϱ entspricht, ist die, deren Mittelpunct in der Absidenlinie liegt, dessen Halbmesser $= \frac{p}{1+e} - \varrho = \varrho'$. Es findet also eben so in Beziehung auf die Halbmesser dieser beiden Kugeln Reciprocität Statt, da

$$\varrho + \varrho' = \frac{p}{1+e} = \frac{p'}{1+e'}.$$

2. Legt man die Kugeln g, g', g'' etc. so, dafs jede die vorhergehende berührt, bis zur $n+1$ten, die mit der ersten zusammenfällt, nachdem der Umkreis u mal durchlaufen ist: so hat man (siehe 6. Band p. 89. d. Journ.):

$$\cos\left(\frac{2u\pi}{n}\right) = \frac{2eeqq - 2qq + 4pq - pp}{pp}.$$

Legt man eben so eine Reihe in dem zweiten Kegelschnitte, wo n' und u' dieselbe Bedeutung haben, so ist eben so:

$$\cos\left(\frac{2u'\pi}{n'}\right) = \frac{2e'e'q'q' - 2q'q' + 4p'q' - p'p'}{p'p'} = -\cos\left(\frac{2u\pi}{n}\right).$$

Es ist also

$$\frac{2u\pi}{n} = (2m+1)\pi \pm \frac{2u'\pi}{n'},$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet. Da die eine der Zahlen $\frac{u}{n}$ zunimmt, wenn die andere abnimmt, und umgekehrt, so gilt das untere Zeichen; folglich ist:

$$\frac{u}{n} + \frac{u'}{n'} = m + \tfrac{1}{2}.$$

Um die Zahl m zu bestimmen, sei $e = 1$, $q = q' = \frac{p}{4}$, folglich (p. 90. a. a. O.):

$$\cos\left(\frac{2u\pi}{n}\right) = 0; \quad \text{also } \frac{2u}{n} = \tfrac{1}{2}; \text{ oder } \tfrac{3}{2}; \text{ oder } \tfrac{5}{2} \text{ etc.}$$

$\frac{n}{u}$ ist in diesem Fall aber gröfser als 2, wie leicht zu zeigen ist, also kann nur $\frac{u}{n} = \frac{u'}{n'} = \frac{1}{4}$ Statt finden, und also endlich:

$$\frac{u}{n} + \frac{u'}{n'} = \tfrac{1}{2}.$$

Demnach sind auch beide Reihen zu gleicher Zeit commensurabel.

Im März 1832.

41.

Beitrag zur Theorie der krummen Linien dritter Ordnung.

(Von Herrn *Th. Clausen* zu München.)

---

1. Die zweite Classe in der von Euler (Einl. in die Analysis d. Unendlichen 2. Band 9. Cap. §. 225.) gegebenen Eintheilung der krummen Linien dritter Ordnung enthält den Fall, wenn die drei einfachen Factoren des höchsten Gliedes in der allgemeinen Gleichung der Curve reel und ungleich sind. Für diesen Fall läfst sich also die Gleichung folgendermafsen darstellen:

$$k=0=(\alpha x+\beta y)(\alpha' x+\beta' y)(\alpha'' x+\beta'' y)+axx+2bxy+cyy+dx+ey+f.$$

Es seien die Gleichungen für die drei Asymptoten $\alpha x+\beta x+\gamma$, $\alpha' x+\beta' y+\gamma'$, $\alpha'' x+\beta'' y+\gamma''$: so ist für einen unendlich entfernten Punct auf dem zur ersten Asymptote gehörigen Schenkel, $\alpha x+\beta y=-\gamma$, und für die andern Factoren $x=br$, $y=-ar$, wo $r=\infty$ ist. Diese Werthe in die Gleichung substituirt, geben

$$0=-\gamma(\alpha'\beta-\beta'\alpha)(\alpha''\beta-\beta''\alpha)+a\beta\beta-2b\alpha\beta+c\alpha\alpha,$$

folglich wird:

$$g=\frac{a\beta\beta-2b\beta\alpha+c\alpha\alpha}{(\alpha'\beta-\beta'\alpha)(\alpha''\beta-\beta''\alpha)};$$

und eben so:

$$g'=\frac{a\beta'\beta'-2b\beta'\alpha'+c\alpha'\alpha'}{(\alpha''\beta'-\beta''\alpha')(\alpha\beta'-\beta\alpha')};$$

$$g''=\frac{a\beta''\beta''-2b\beta''\alpha''+c\alpha''\alpha''}{(\alpha\beta''-\beta\alpha'')(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')}.$$

Da angenommenermafsen keine zwei der drei Gröfsen $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\alpha'}$, $\frac{\beta''}{\alpha''}$ sich gleich sind, so sind diese Werthe alle endlich. Multiplicirt man die drei Asymptoten-Gleichungen, die ich der Kürze halber mit $L=0$, $L'=0$, $L''=0$ bezeichne, so erhält man:

$$L.L'.L''=(\alpha x+\beta y)(\alpha' x+\beta' y)(\alpha'' x+\beta'' y)+axx+2bxy+cyy+d'x+e'y+f'.$$

Die Gleichung für die Curve läfst sich also auch so darstellen:

$$K=0=L.L'.L''+(d-d')x+(e-e')g+f-f'.$$

Es sind hier erstlich zwei Fälle möglich: wenn $d-d'=0$ und $e-e'=0$; und wenn diese beiden Gleichungen nicht Statt finden.

Im ersten Falle kann $f-f'$ nicht $=0$ sein, da sonst die Gleichung blos ein System dreier Graden enthielte. Es sei also $f-f'=a'$, dann ist

$$K = 0 = L.L'.L'' + a.$$

Der Werth von L ist für jeden beliebigen Punct der Ebene dem von diesem Puncte auf die Asymptote in eine Constante multiplicirten Lothe gleich. Für alle Puncte auf dem Umfange der Curve ist daher, da in allen diesen Puncten $K=0$:

Das Product der von einem Puncte der Curve auf die drei Asymptoten gefällten Senkrechten einer constanten Gröfse gleich.

Die Curve schneidet keine der Asymptoten. Denn da in dem Durchschnittspuncte $K=0$ und $L=0$ wäre, so hätte man $0=a'=$ einer Constante, die nicht $=0$ werden kann.

Für einen unendlich entfernten Punct auf dem ersten Zweige der Hyperbel ist, wenn man die Entfernung vom Anfangspuncte der Coordinaten t setzt, $L'=mt\cos\mu''$, $L''=nt\cos\mu''$ sehr nahe, wo μ' und μ'' die Winkel, die die Asymptoten mit der ersten bilden, bedeuten; man hat also:

$$L = -\frac{a'}{mn\cos\mu'\cos\mu''tt},$$

welches mit der fünften Art von **Euler** §. 227. übereinstimmt.

Im zweiten Falle sei

$$(d-d')x+(e-e')y+f-f'=L'''.$$

Es ist also:

$$K = LL'L''+L''' = 0.$$

Die Grade L''' kann mit keiner der drei Asymptoten zusammenfallen, da sonst die Gleichung das System einer Graden und einer Gleichung vom zweiten Grade enthielte.

Die Grade L''' schneidet im Allgemeinen die drei Asymptoten, und es erhellet sogleich, dafs in den Durchschnittspuncten auch $K=0$, oder dafs

die Curve die drei Asymptoten auf den Graden L''' schneidet,

welchen Satz **Poncelet** im 2ten Hefte dieses Bandes angeführt hat.

Das Product der von einem Puncte der Curve auf die drei Asymptoten gefüllten Senkrechten durch die auf die

durch die Durchschnittspuncte der Asymptoten mit der Curve gelegte Grade dividirt, ist einer constanten Gröfse gleich.

Ist die Grade L''' keiner der Asymptoten parallel: dann sind die drei Zweige von der Form $L = A\frac{L''}{LL'}$, welches mit der Eulerschen dritten Art übereintrifft. Ist L''' mit einer der Asymptoten L parallel $= \varepsilon L + \varkappa$, so wird die Asymptote L nicht von L''' und also auch nicht von der Curve geschnitten. Der erste Zweig ist in unendlicher Entfernung $L = \frac{A}{LL'}$; die beiden andern sind $L' = \frac{A}{L''}$, welches mit der vierten Eulerschen Art übereinkommt.

Man kann also die drei Eulerschen Arten der Curven der dritten Ordnung mit drei divergirenden Asymptoten auch so ordnen:

die dritte Art schneidet alle ihre drei Asymptoten,
die vierte Art schneidet zwei ihrer Asymptoten,
die fünfte Art schneidet keine ihrer Asymptoten.

2. Es seien zwei der Asymptoten parallel: dann ist die Gleichung von der Form:

$$K = 0 = (\alpha x + \beta y)^2(\alpha' x + \beta' y) + (\alpha x + \beta y)(\alpha x + by) + cx + dy + e,$$

und die Gleichung für die drei Asymptoten $\alpha x + \beta y + g$; $\alpha x + by + g_1$; $(\alpha' x + \beta' y + \gamma')$ auf den ersten beiden Zweigen ist in unendlicher Entfernung $\alpha x + \beta y = -g$ oder $-g_1$; $x = \beta r$, $y = -\alpha r$, $r = \infty$, also:

$$0 = \gamma^2(\alpha'\beta - \beta'\alpha) - \gamma(\alpha b - b\alpha) + c\beta - d\alpha,$$

woraus die beiden Werthe g und γ_1 folgen. Es ist daher

$$\gamma + \gamma_1 = \frac{a\beta - b\alpha}{\alpha'\beta - \beta'\alpha}; \quad \gamma\gamma_1 = \frac{c\beta - d\alpha}{\alpha'\beta - \beta'\alpha};$$

demnach, wenn man die Gleichungen dieser beiden Asymptoten $L = 0$, $L + \varkappa = 0$ setzt,

$$L(L + \varkappa) = (\alpha x + \beta y)^2 + \frac{a\beta - b\alpha}{\alpha'\beta - \beta'\alpha}(\alpha x + \beta y) + \frac{c\beta - d\alpha}{\alpha'\beta - \beta'\alpha}.$$

Für die dritte Asymptote ist $\alpha' x + \beta' y = -g$, $x = \beta' r$; $y = -\alpha' r$; $r = \infty$; also

$$0 = -g'(\alpha\beta' - \beta\alpha') + a\beta' - b\alpha'; \quad g' = \frac{a\beta' - b\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}.$$

Es sei die Gleichung für die dritte Asymptote $L' = 0$: dann ist

$$L(L + \varkappa)L' = (\alpha x + \beta y)^2(\alpha' x + \beta' y) + (\alpha x + \beta y)(\alpha x + by)$$
$$- \frac{(a\beta' - b\alpha')(a\beta - b\alpha)}{(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2}(\alpha x + \beta y) + \frac{c\beta - d\alpha}{\alpha'\beta - \beta'\alpha}(\alpha' x + \beta' y) + G,$$

und wenn man $\frac{(a\beta - b\alpha')(a\beta - b\alpha)}{(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2} + \frac{d\alpha' - c\beta'}{\beta\alpha' - \alpha\beta'} = F$ setzt:

$$K = 0 = L.(L+\varkappa)L' + F.L + e - Fg - G.$$

Ist F nicht $= 0$, so hat man

$$K = 0 = L(L+\varkappa)L' + F.(L+\varkappa'),$$

wo $\varkappa'$ nicht $= 0$ oder $= \varkappa$ sein kann; in diesem Falle durchschneidet die Curve die dritte Asymptote zugleich mit der Graden $0 = L+\varkappa'$ und

das Product der von einem Puncte der Curve auf die drei Asymptoten gefällten Senkrechten, durch die auf die Grade, welche mit den beiden Asymptoten parallel durch den Durchschnittspunct der Curve und dritten Asymptote gezogen wird, gefällte Senkrechte dividirt, ist constant.

Ist $F = 0$, so hat man

$$K = 0 = L(L+\varkappa)L' + H.$$

In diesem Falle werden keine der Asymptoten von der Curve geschnitten, und derselbe Satz, der für die Eulersche fünfte Art gilt, ist hier auch gültig; dafs nemlich

die Perpendikel auf die drei Asymptoten ein constantes Product geben.

Diese letztere Art ist mit der eilften Eulerschen, wie die kurz vorhergehende mit der zehnten, identisch.

Errata

pour le No. 7. de la *Note* de Mr. Liouville *sur la détermination des intégrales de valeur algébrique*, insérée dans le Tome X. de ce journal, 4ème cahier.

Au lieu de ces mots qui commencent le No. 7.: A la seule inspection de l'égalité, *il faut lire:* En excluant le cas particulier où le degré du polynome T est un multiple exact de μ, tel que $\sigma\mu$, et à la seule inspection de l'égalité.

Quelques lignes plus loin, dans ce même No. 7., après les mots: les deux termes de ces séries doivent être les mêmes de part et d'autre, *ajouter ce qui suit*: Ce raisonnement et la conclusion qu'on en tire pourraient se trouver en défaut, si le degré de T était un nombre de la forme $\sigma\mu$, et si en même temps celui de θ avait σ pour valeur; par où l'on comprend que le degré du polynome θ ne peut être que l'un des deux nombres $n-1$ ou σ dont il suffit évidemment d'essayer le plus considérable, et dont le second ne peut être adopté qu'autant qu'il est entier. La marche du calcul étant la même, quelque soit le degré de θ, nous le supposerons partout égal à $n-1$ dans ce No. et dans le No. 8.

Druckfehler
in der Abhandlung des Herrn Dr. Stern: „Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung."

Im zehnten Bande.

Seite 2 Z. 10 v. u. statt 11 lies 1.1
— 4 — 2 v. u. st. a^m l. a_m
— 7 — 7 v. o. st. a_m, a_1 l. a_m, a
— 9 — 3 v. u. st. oder da l. oder, da
— 10 — 7 v. o. st. $-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{3}\right)^{m+2}$ l. $-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+2}$
— — Anmerk. l. überall $2r$ st. 27
— 11 Z. 9 v. o. st. (I.) l. (§. 3.)
— 12 — 1 v. o. st. a_1, $a_m =$ l. a, a_{m-1}
— — — 27 v. o. st. a, a_{1-m} l. a, a_{m-1}
— 13 — 23 v. o. st. a_i, a_m l. a_l, a_m
— 14 — 3 v. o. st. b_{m+n} l. b_{m+1}
— — — 12 v. o. st. a_{m+1} l. a_{m-1}
— — — — - - st. b_{m+1} l. b_{m-1}
— 15 — 6 v. u. st. a, a_{m+1} l. a, a_{m+n}
— 16 — 1 v. o. st. b_{i+1} l. b_{l+1}
— — — 19 v. o. st. ...287 l. ...2587
— — — 20 v. o. st. 9 l. q
— — — 23 v. o. st. $\geq$ l. $>$
— 18 — 10 v. o. st. also $F(a, a_{m-1})$, so l. also $F(a, a_{m-1})$ gröfser als $\frac{m}{n}$, so
— 19 — 10 v. o. st. $> F(a, a_m)$ l. $< F(a, a_m)$
— — — 10 v. o. st. a, a_m l. $F(a, a_m)$
— — — 30 v. o. st. $b . \frac{b_1}{a_1}$ l. $\frac{b_1}{a_1}$
— 20 — 3 v. u. st. gerade oder ungerade l. ungerade oder gerade
— 156 — 15 v. o. st. b_{m+1} l. $b_m + 1$
— 159 — 4 v. o. st. Z_3 l. Z_s
— 160 — 6 v. o. st. a_{m+1}, a_{4m-1} l. a_{2m+1}, a_{4m-1}
— 161 — 8 v. o. st. $a_{rm+1} . a_{(r+2)m-1}$ l. $a_{rm+1}, a_{(r+2)m-1}$
— — — 11 v. o. st. a, a_{m-1} l. a_1, a_{m-1}
— — — 12 v. o. st. a_{rm-1} l. a_{rm+1}
— — — 14 v. o. st. (7) l. (8)
— — — 23 v. o. st. C l. B
— — — 27 v. o. st. $a_{m-2}, a,$ l. a_{m-2}, a_1
— — — 29 v. o. st. $+ b_1 . a_{m+2}, a_1$ l. $- b_1 . a_{m-2}, a_1$
— 164 — 16 v. o. st. $\frac{b_1}{a_2}$ l. $\frac{b_1}{a_1}$
— 242 — 12 v. o. st. $F(a_1, a_m)$ l. $F(a, a_m)$
— 243 — 12 v. o. müssen die Worte: welcher Bruch .... ist, gestrichen werden.
— — — 13 v. o. st. $(1+x)^{-1}$ l. $(1+x)^{-n}$
— 244 — 7 v. o. st. $-m+3n+(m+2n)$ l. $-(m+3n)+(m+2n)$
— — — 19 v. o. st. $_{1-\infty}^{r}$ l. $_{1-\infty}^{m}$
— — — — - - st. $n-m$ l. $r-m$
— — — 20 v. o. st. $_{1-\infty}^{n}$ l. $_{1-\infty}^{m}$

S. 245 Z. 5 v. u. st. $F(a_1+x:a_2\ldots.)$ l. $F(a_2+x:a_3\ldots.)$

— 247 — 14 v. u. st. $\frac{Q}{Q_1\,a_m+q}$ l. $\frac{Q}{Q_1\,a_m+q_1}$

— 249 — 4 v. u. st. $\frac{N_{m-1}}{N_m}$ l. $\frac{N_{m-1}}{a_m}$

— 260 — 1 v. o. st. Arbeit l. Entwickelung

— 262 — 11 v. o. st. $c+2m.c+2m-1$ l. $c+2m.c+2m+1$

— — — 6 v. u. st. $\frac{1}{5}\tang^3.t$ l. $\frac{1}{5}\tang^4.t$

— 263 — 14 v. o. st. (a, b, c, x) l. $\varphi(a, b, c, x)$

— — — 21 v. o. st. $\varphi(a+1, b-1; c, x)=0$ l. $=1$

— 265 — 2 v. o. st. $\frac{2.2}{1.5}$ l. $\frac{1.2}{1.3}$

— 366 — 9 v. o. st. $\frac{b_m}{b_m}$ l. $\frac{b_m}{a_m}$

Im elften Bande.

— 154 — 6 v. u. st. die Wurzeln l. zwei Wurzeln

— 278 — 9 v. o. st. $+1:2$ l. $+1:z$

— 280 — 22 v. o. st. $\chi(x_{n+r})$ l. $\chi(x_{n+1})$

— — — 25 v. o. st. ∂x^r_{n+r} l. ∂x^r_{n+1}

— — — 27 v. o. st. $\frac{\partial^{r+1}\chi(x_{n+1})}{\partial x^{r+2}_{n+1}}$ l. $\frac{\partial^{r+2}\chi(x_{n+1})}{\partial x^{r+2}_{n+1}}$

— 286 — 4 v. o. st. $\frac{zp^1-q^0}{zp^1-q^0}$ l. $\frac{zp^1+p^0}{zq^1+q^0}$

— 295 letzte Zeile l. Bd. 9. S. 305.

— 298 Z. 6 v. o. st. so findet man aus (C) l. .... aus (C_1)

— 302 — 12 v. u. st. $\alpha^n_r.\alpha^n_2$ l. $\alpha^n_r.\alpha^n_s$

— — — 11 v. u. st. $\alpha_r+\alpha_3$ l. $\alpha_r+\alpha_s$

— 305 — 1 u. Z. 2 v. u. und S. 170 Z. 1 v. o. st. $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_r)$ l. $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_s)$

— 317 — 3 u. 4 v. o. sind die Puncte am Ende der Zeilen zu streichen.

— 322 — 7 v. o. st. $b_1(a, a_m-a_1, a_{m-1})b^2.a, a_{m-1}$ l. $b(a, a_m-a_1, a_{m-1})-b^2.a, a_{m-1}$

— 323 — 13 v. u. st. x^2-y l. $x^2-\gamma$

— 328 — 6 v. u. ist das etc. zu streichen.

— 331 — 4 v. o. st. die gröfste Zahl l. die gröfste ganze Zahl

— 345 — 3 v. o. st. $\frac{2n(n-1)(n-2)x^3}{2.b}$ l. $\frac{2n(n-1)(n-2)x^3}{2.6}$

— 348 — 8 v. u. st. $+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}$ etc. l. $-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}$ etc.

Zwei §.§. sind aus Versehen beide mit 116 bezeichnet.

S. 199 sind die Worte: oder $I_1^2>A-4$ bis mithin zu streichen, statt dessen lese man: nun ist $I+I^1=a_n D$; wäre daher $D=2a$ oder $=2a-1$, so müfste in jedem Falle jede der Gröfsen I und I_1 gröfser als $a-2$ sein, da keine derselben gröfser als a sein kann: ist aber $D<2a-1$, und setzt man $A=a^2+m$, $D=2a-(r+1)$, so ist

$$I_1^2=a^2+m-4a+2r+2,$$

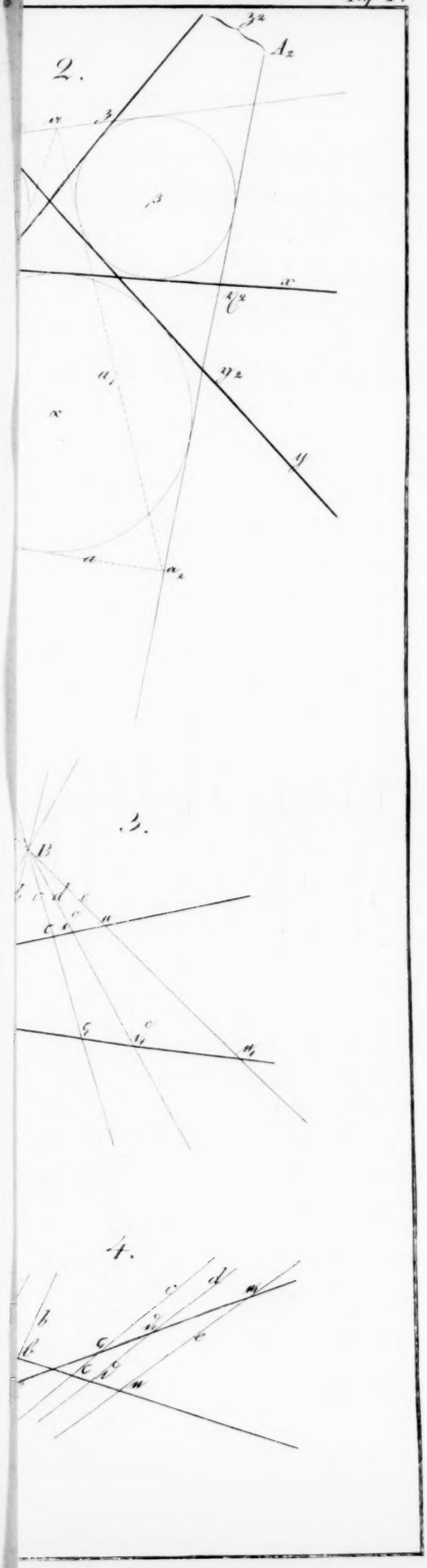
aber

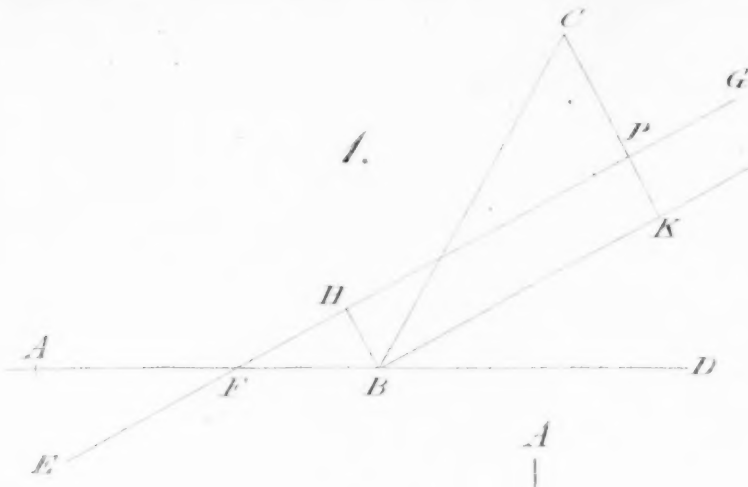
$$(a-2)^2=a^2-4a+4,$$

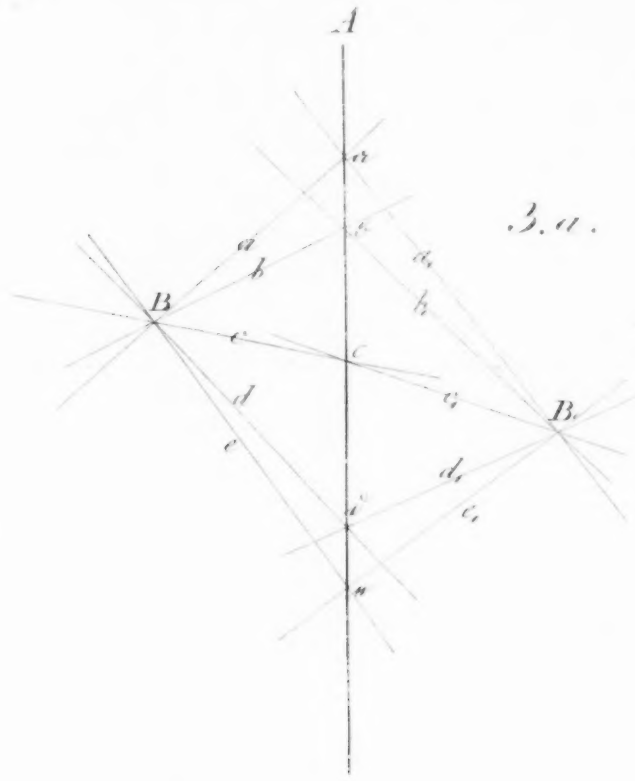
mithin in jedem Falle

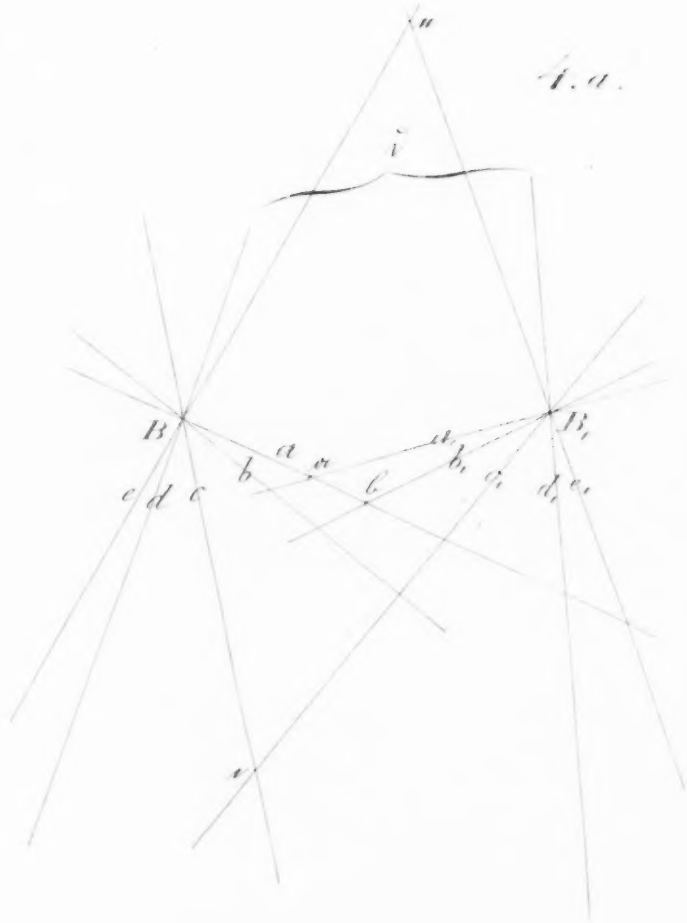
$$I_1>a-2.$$

Taf I.

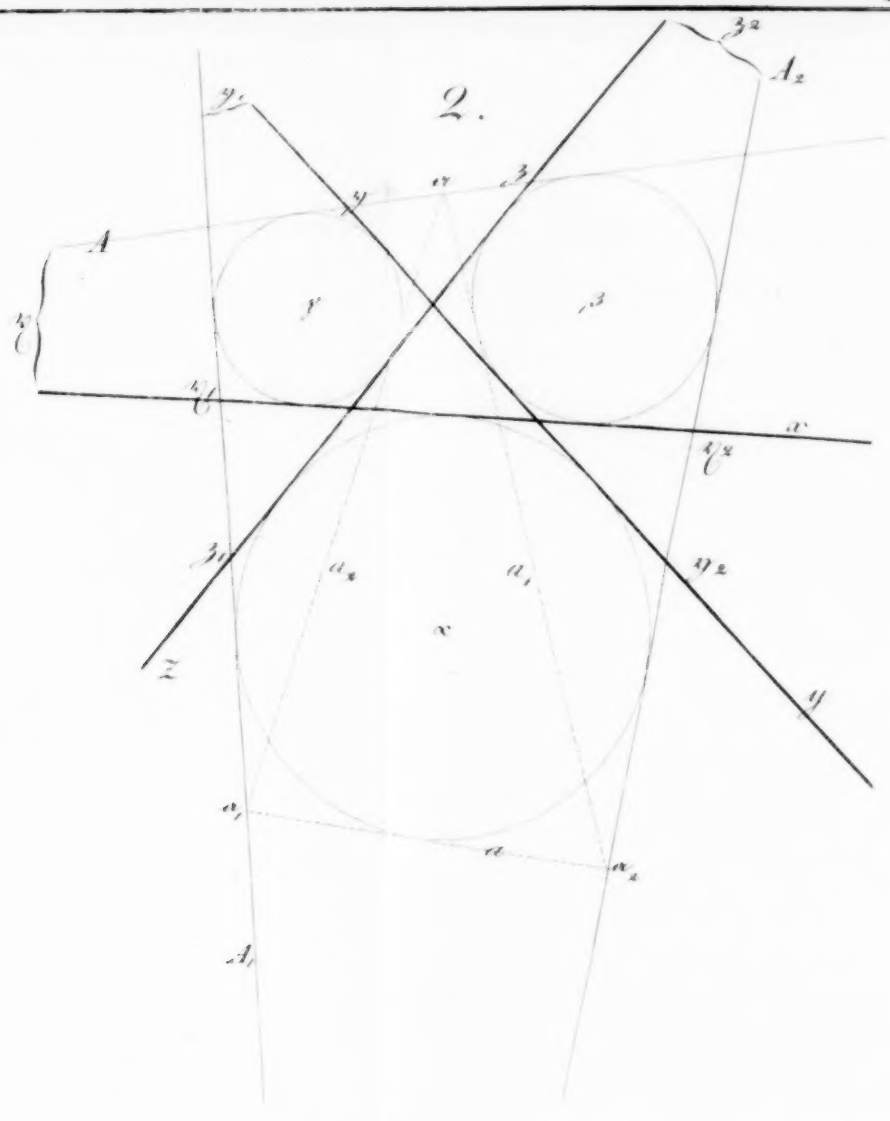



1.
C
G
P
K
H
A
F
B
D
E

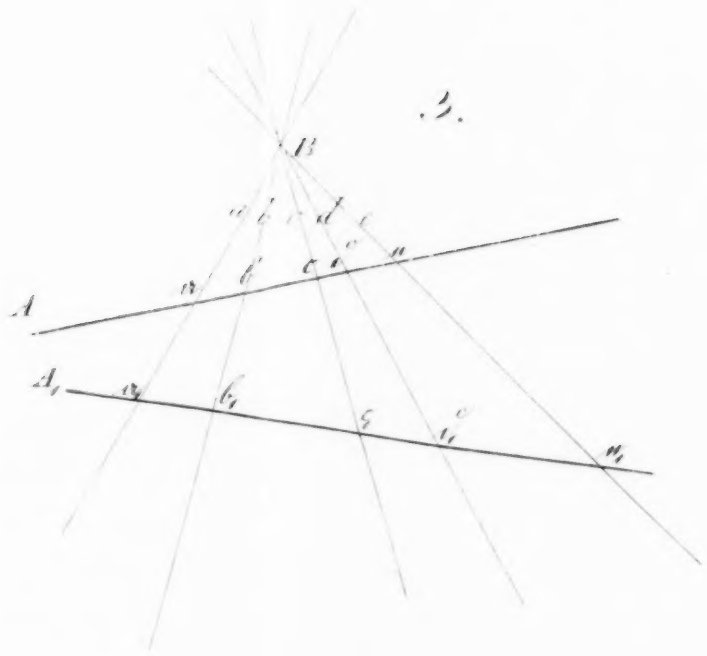

3. a.
A
B
B₁


4. a.
B
B₁

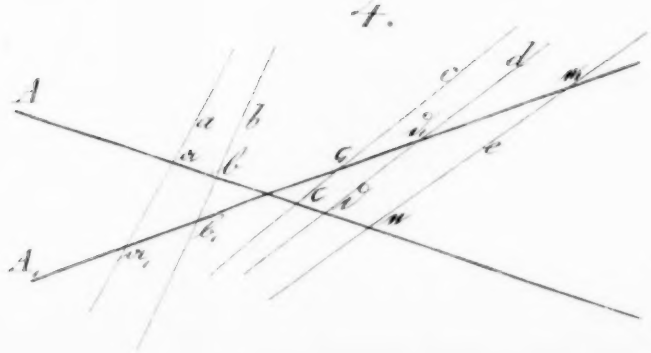
2.



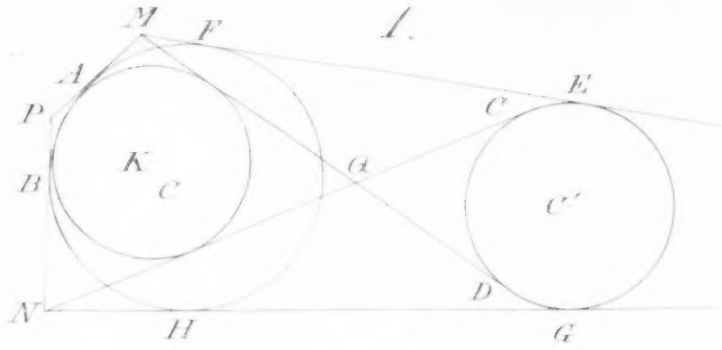
3.



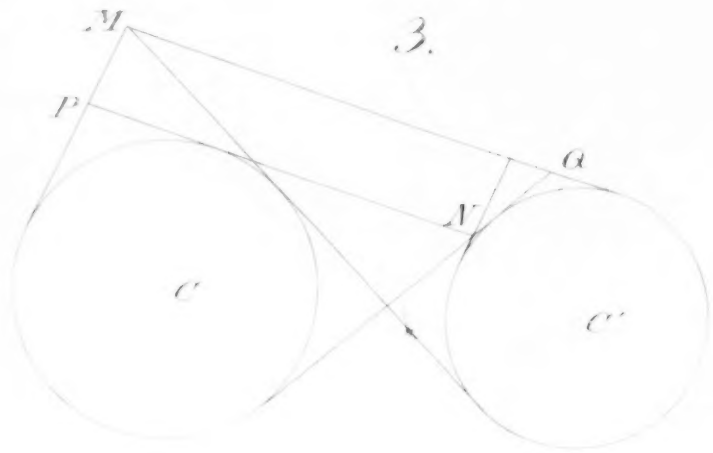
4.



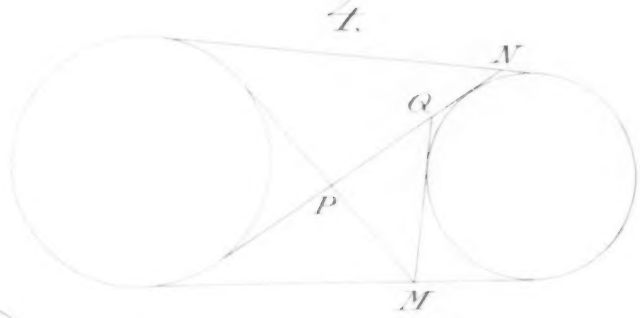
1.



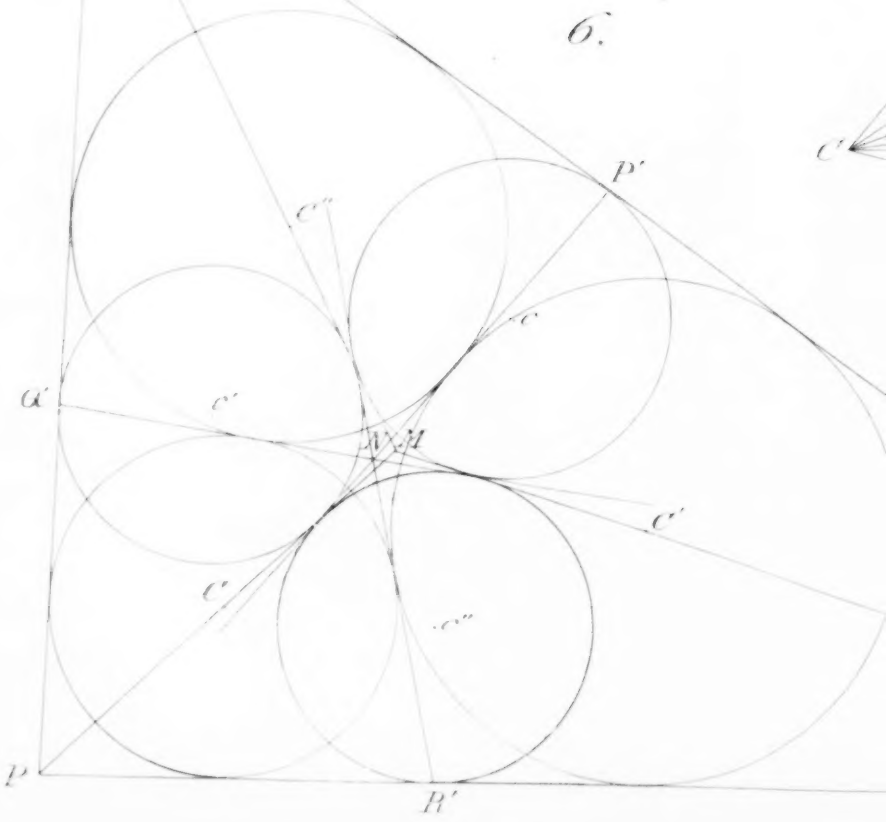
3.



4.

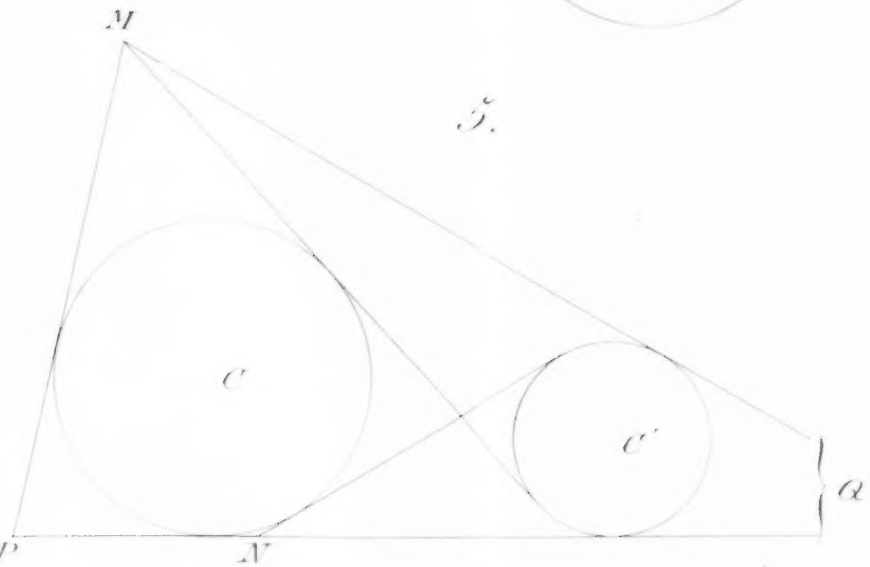


6.

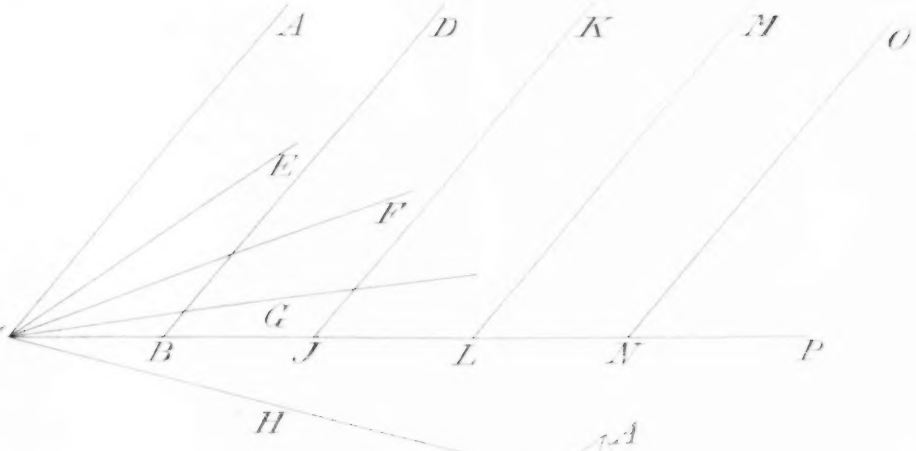


2.

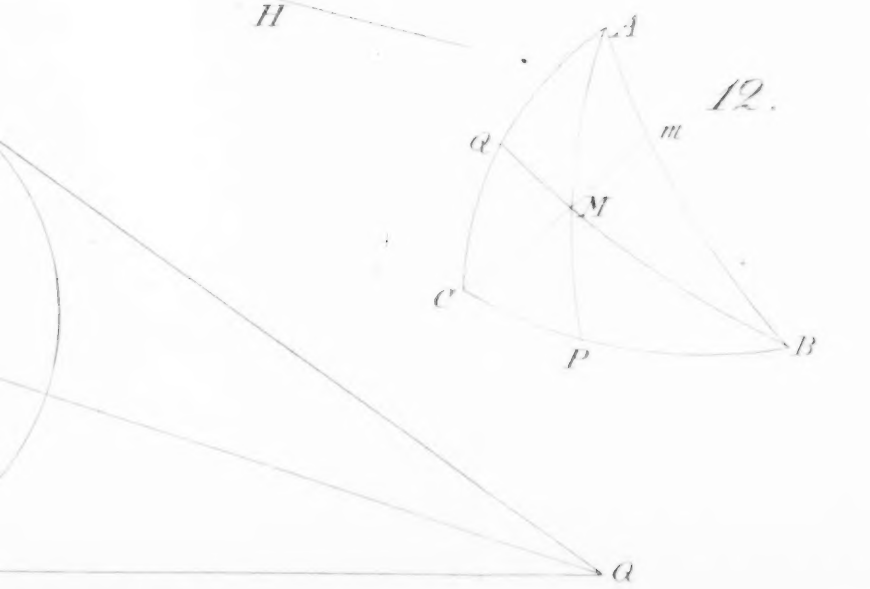
3.



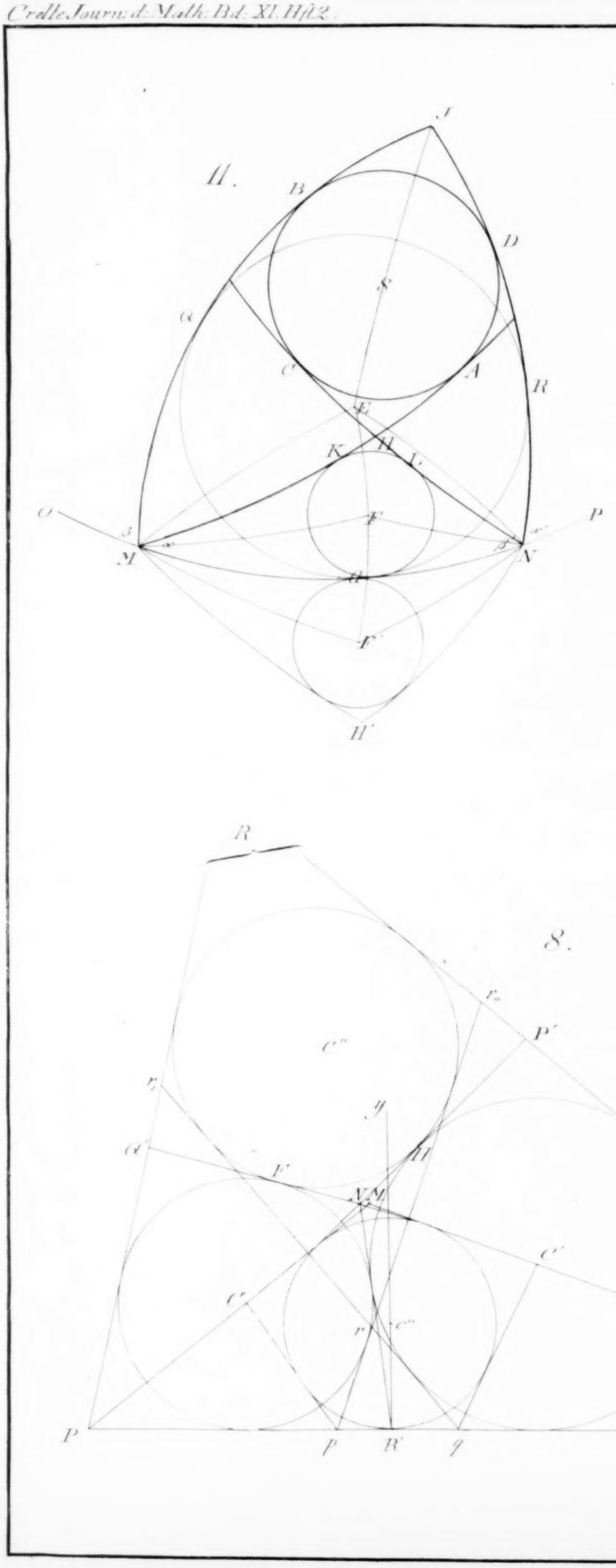
13.



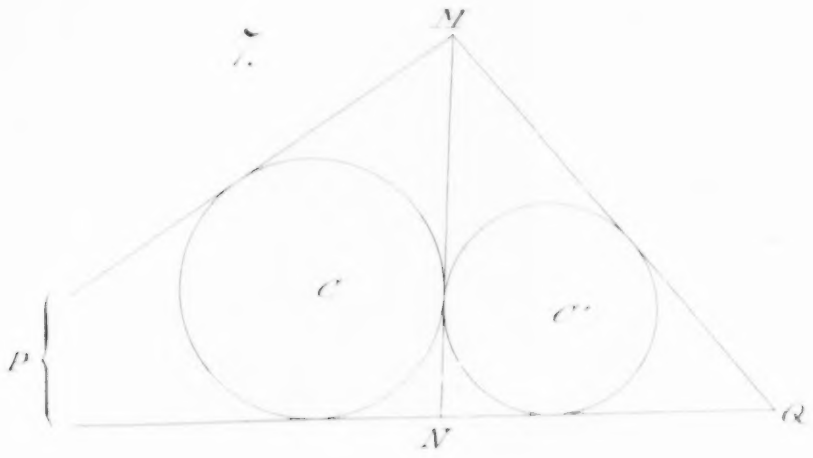
12.



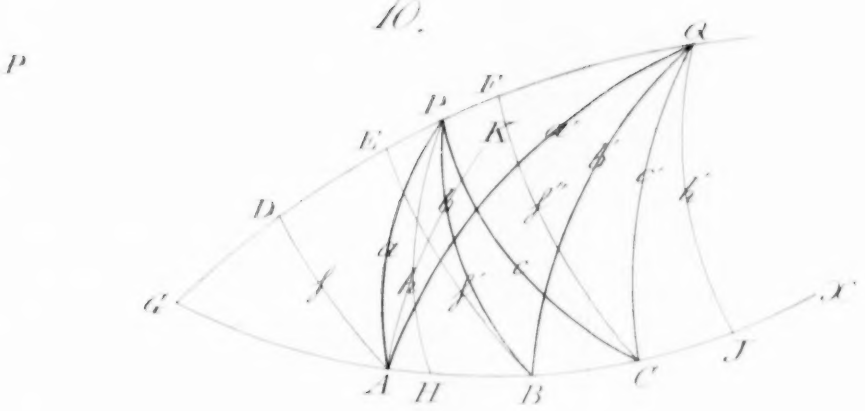
H.


11.
J
B
D
S
G
C
A
R
E
K
H
L
O
P
M
N
F
F'
H'
8.
R
C''
P'
y
G'
H
F
N M
C'
C
P
p
R'
q

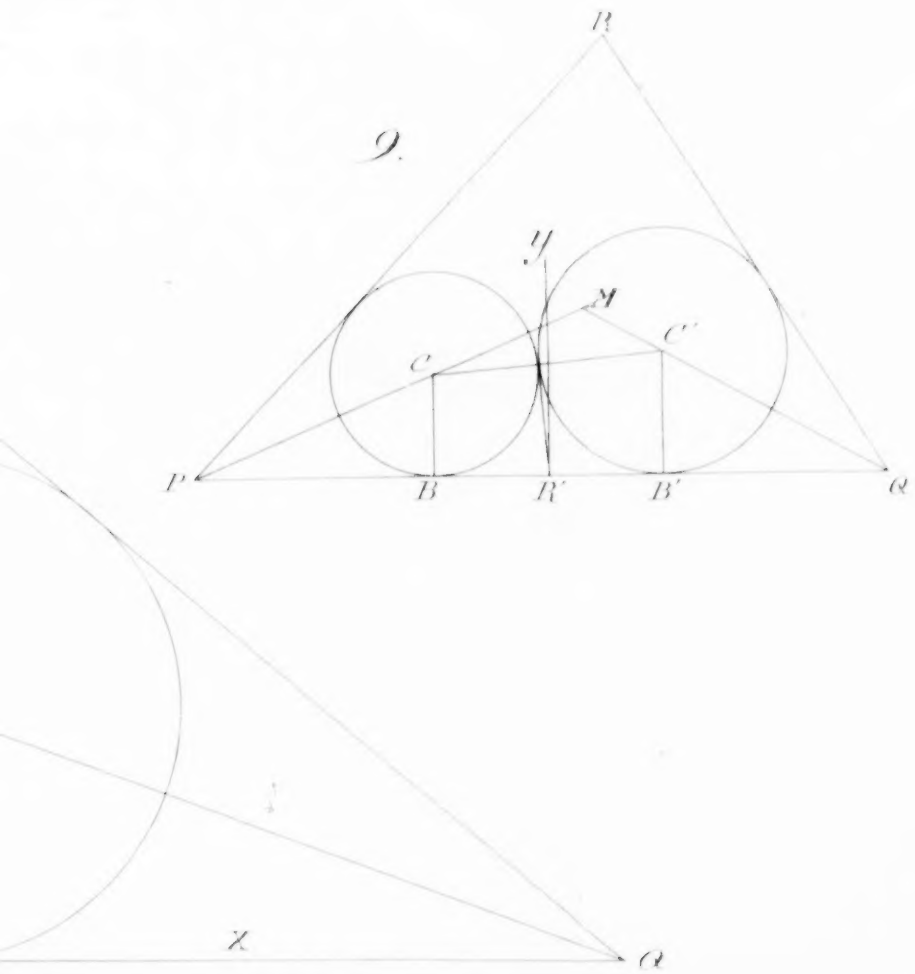
8.

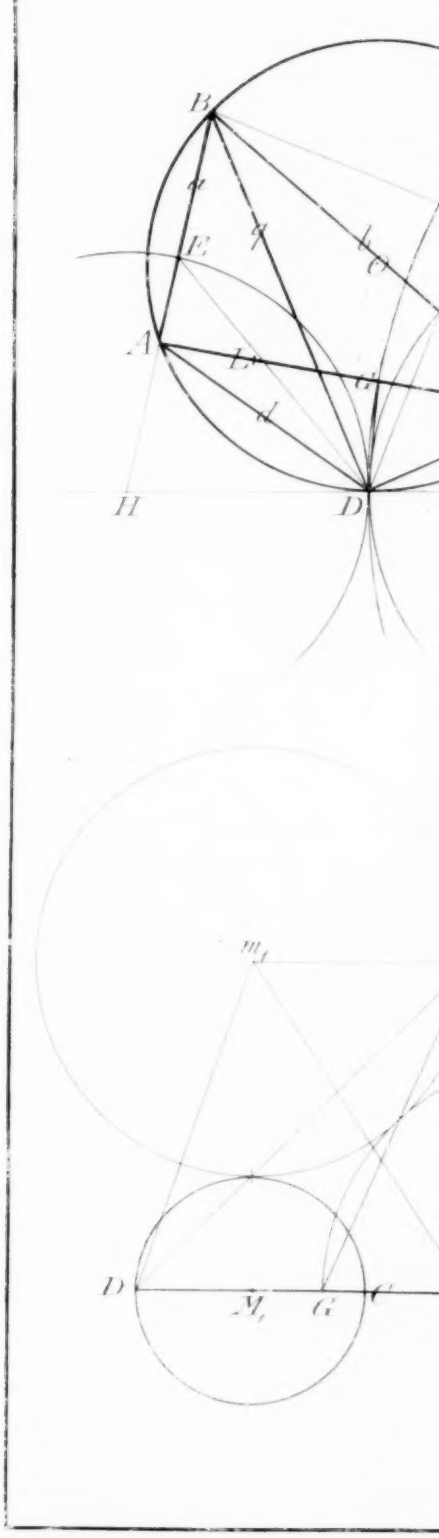


10.

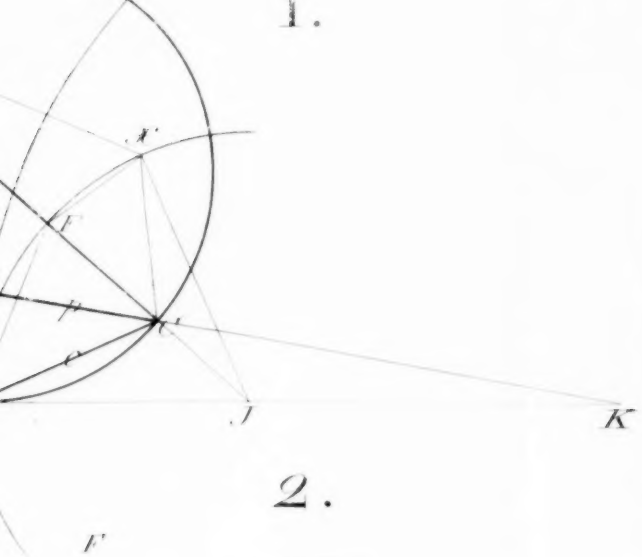


9.

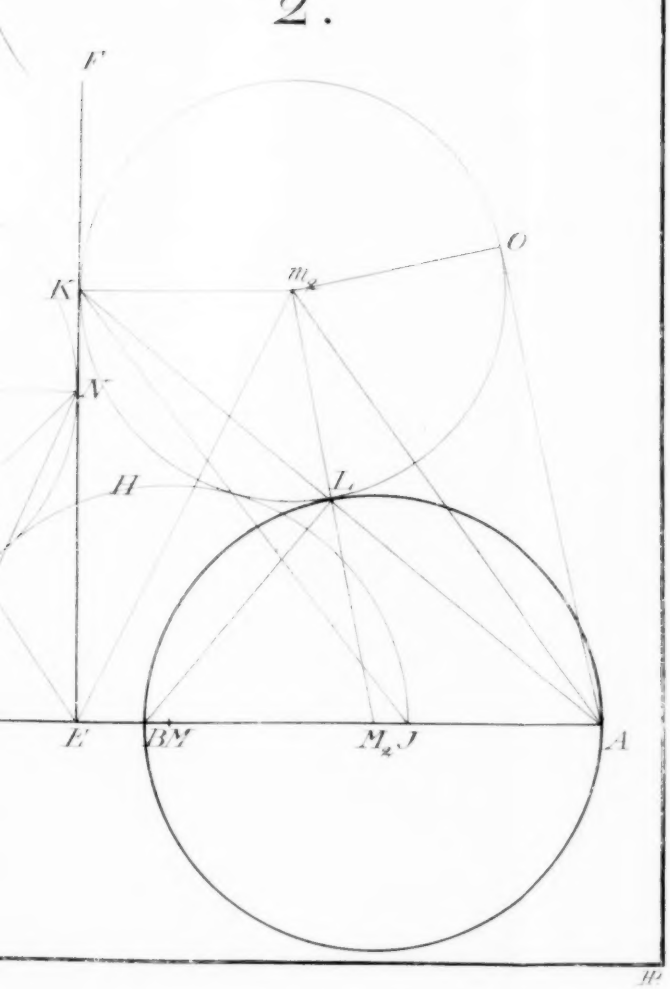


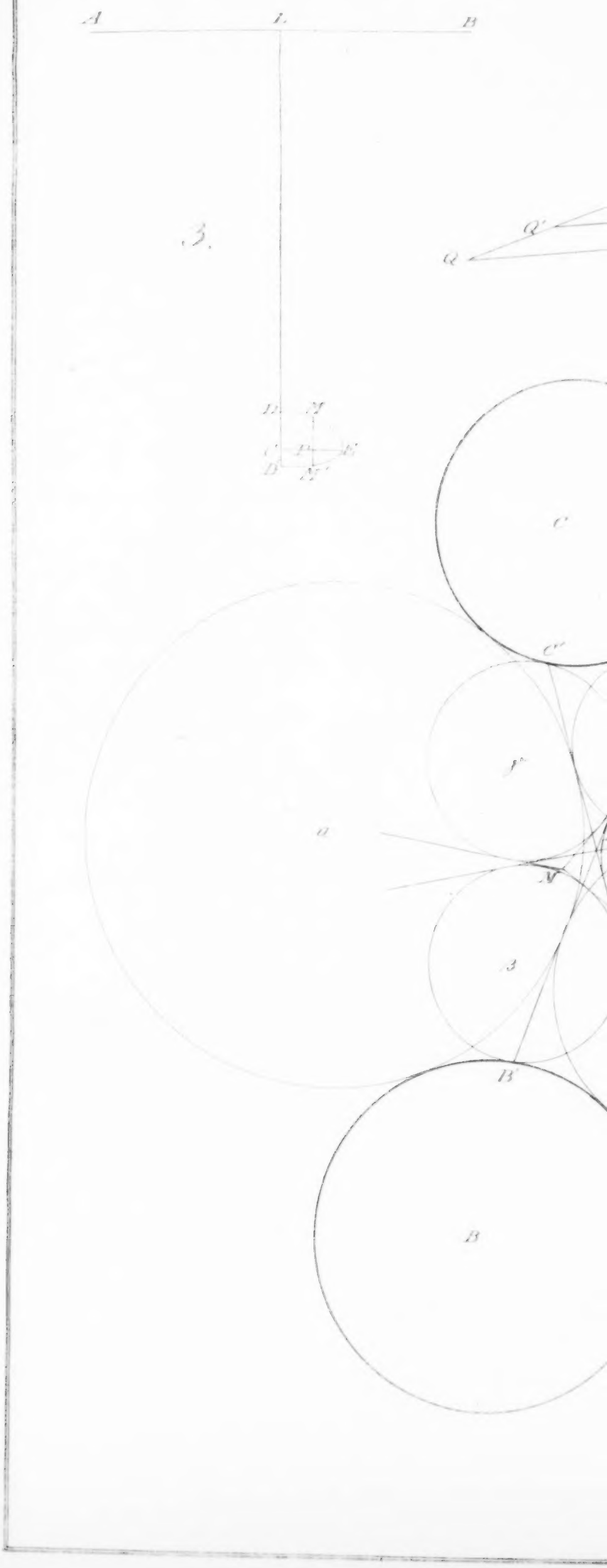

B
a
E
q
b
O
A
L
G
d
H
D
m_1
D
M_1
G
C

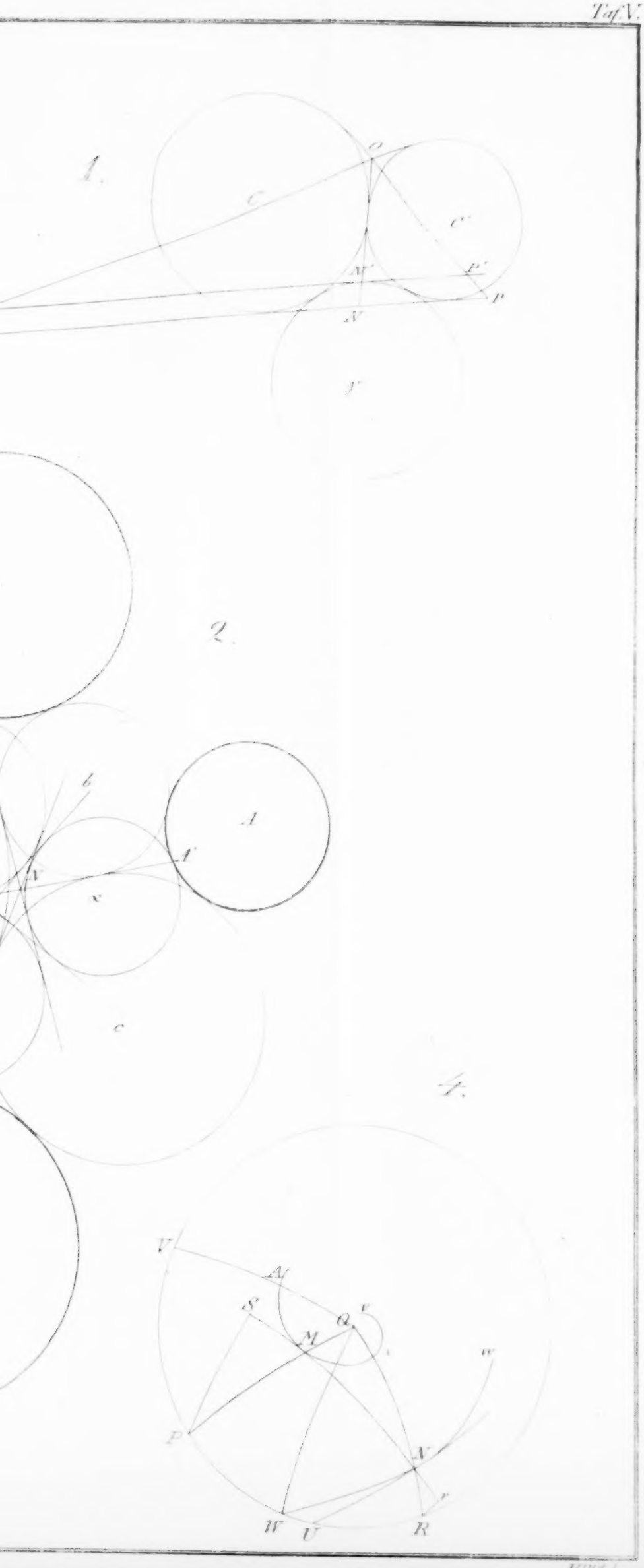
1.



2.




A
L
B
3.
Q'
Q
D
M
C
P
E
D'
M'
C
C'
f
a
M
3
B'
B


1.
O
C
C'
N'
P'
P
N
2.
A
A'
b
c
4.
V
A
S
Q
M
P
N
W
U
R